PAULLI FRISII
OPERUM
TOMUS TERTIUS
COSMOGRAPHIAM
PHYSICAM, ET MATHEMATICAM
CONTINENS.

Nil parvum sapias, & adhuc sublimia cures:
Quæ mare compescant caussæ: quid temperet annum;
Stellæ sponte sua, jussæ ne vagentur, & errent:
Quid premat obscurum Lunæ, quid proferat orbem;
Quid velit, & possit rerum concordia discors?
Horat. Epist. XII.

MEDIOLANI.)o(MDCCLXXXV.

APUD JOSEPH GALEATIUM REGIUM TYPOGRAPHUM.
Superiorum approbatione.

POTENTISSIMO ET CLEMENTISSIMO

GUSTAVO III.

SVECORUM GOTHORUM
VANDALORUMQUE REGI
NORVEGIÆ HÆREDI
ET
DUCI SLESVICO-HOLSATIÆ
&c. &c. &c.

QUÆ hæreditario jure ad nos pervenerunt Fratris amantiſſimi ſcripta in vulgus edimus, ut defuncti, & doctorum ho-

hominum votis ſatisfaciamus. Neque nobis Operis Patronus quærendus eſt, cum Frater ipſe ſingulari humanitate, atque clementia, a Majeſtate Tua Mediolani exceptus, maxime gloriaretur, quod ſe ſuaque omnia Regi in litteras & litteratos homines ſtudio nemini, qui unquam extitere, ſecundo conſecrare potuerit. Quæ offerimus læta fronte accipe, noſque potentiſſimo Tuo Patrocinio tuere, ac fove.

Devoti Nomini Majeſtatique Tuæ

Antonius Franciſcus, & Aloyſius
Friſi Fratres.

GUSTAVO III.

SVECORUM GOTHORUM VANDALORUM REGI

&c. &c. &c.

QUOD

GUSTAVI ADOLPHI ET CHRISTINÆ

AMOREM IN SCIENTIAS AC LITTERAS ÆMULATUS
RESTITUTIS IMPERII JURIBUS
FELICITATE PUBLICA ASSERTA
PROMOTO COMMERCIO ET BONIS ARTIBUS
SCIENTIARUM ET LITTERARUM STUDIA
FOVERIT MUNIFICENTIA ATQUE EXEMPLO
SUMMOS PHILOSOPHOS ASTRONOMOS MATHEMATICOS
SVECOS EXTEROS
EUROPA ATTENTE PERLUSTRATA
IN HONORE UBICUMQUE HABUERIT
ASTRONOMICAS HASCE LUCUBRATIONES
OBSERVATIONIBUS ATQUE INVENTIS SVECICIS
AUCTAS

PAULLUS FRISIUS

HOLMIENSIS ET UPSALIENSIS
ACADEMIÆ SOCIUS
N. M. Q. E.
D. D.

PRÆFATIO.

CŒlestia corpora multitudine, ac venustate sua, regulari motuum varietate, ac constante phasium reversione primorum hominum oculos in se convertere, eosque, qui præstantiore erant ingenio, ad contemplationem, ac studium allicere debuerunt. Et plane antiquissima illius Zonæ, extra quam Sol, & Luna, & Planetæ alii non evagantur, in duodecim partes, & totius siderei cœli in constellationes divisio, & ipsa plurimum fixarum, atque omnium Planetarum nomina indicant cœlum ab antiquissimis usque temporibus fuisse observatum: & qui apud Sinenses, Chaldæos, ac vetustiores Græcos ad Kalendarii alicujus normam assumpti fuerunt cycli, ac periodi Lunæ ad priores cum Sole aspectus redeuntis indicant etiam periodica Solis, ac Lunæ tempora primævis illis observatoribus proxime innotuisse: cyclus annorum 600, quem Josephus a Patriarchis veteribus, ab Hipparcho autem Plinius inventum refert: periodus annorum 60, quam veteres Sinenses a conjunctione quinque omnium Planetarum dicuntur auspicasse: & Chaldæorum Saros, quæ 223 mensium Lunarium, sive annorum Solarium 18, & proxime dierum 10 periodus erat: & qui observationibus magis conformis a Methone Atheniense denominatus est cyclus 235 mensium Lunarium, sive annorum Solarium proxime 19 & quæ decennovennali huic cyclo a Calippo Cyziceno adjecta correctio est diei unius quarto quoque cyclo, sive post annos 76, ex plenilunii, aut novilunii cujusvis tempore subducendi. Quæ etiam multo ante Hipparchum methodus jam innotuerat Eclipsium Solarium, ac Lunarium prænuntiandarum, quæque & a Gallo Sulpitio Romanis Eclipsis Lunæ, & Græcis a Thalete Milesio Solis Eclipsis feruntur prænuntiatæ, jamdiu observatum fuisse indicant Lunam non omnino in eodem plano revolvi circa Terram, in quo ferri videtur Sol, & plani utriusque interfectiones, ubi Eclipses contingunt, ad varia cœli puncta successive dirigi, & post datum tempus in pristinum locum

reverti. Quæ ad Aſtronomiam veterem pertinent ſumma eruditionis, atque elegantiæ laude recenſuit Cl. Bailly in priore Aſtronomicæ Hiſtoriæ volumine, iiſque omnibus conſideratis veriſimillimum eſſe oſtendit quod quæ apud vetuſtiſſimas nationes Aſtronomiæ primordia fuiſſe videntur, non fuerint vere niſi Aſtronomicæ ſcientiæ multo ante excultæ, atque aliis rerum humanarum caſibus ex hominum memoria deperditæ reliquia.

Licet autem antiquior fuerit apud Sinenſes, Chaldæos, Indos & Perſas phænomenorum cœleſtium obſervatio; in Ægypto potiſſimum videtur cœli clementiam, & planitiem ſoli, & navigationum maximarum ſubſidia ad obſervationem cœli allicuiſſe: ibi præcipuam, ac diuturniorem vetuſtioris Aſtronomiæ ſedem fuiſſe. Cum enim primum Ægyptii Solarem annum in duodecim menſes tricenorum dierum partiti eſſent, adjecta ut vocabant ipſi epagomene dierum 5, cumque ad eamdem Solaris anni rationem referri debeat circulus ille aureus circa Amenophidis, ſive, ut vocabant alii, Onaximandri tumulum extructus, cujus peripheria 365 cubitorum erat, & in cubitis ſingulis pro ſingulis anni diebus ſignatum exhibebat ortum, & occaſum ſiderum præcipuorum, ut a Plutarcho, & Diodoro Siculo memoriæ proditum eſt; ex Horo Apolline accepimus deprehenſum fuiſſe ab Ægyptiis apparitionem Sirii ex radiis Solaribus emergentis integro die poſt annos quatuor tardiorem fieri: quæ prima dierum $365\frac{1}{4}$ in integro Solari anno numerandorum, & biſſextilis anni quarto quoque anno intercalandi origo videtur eſſe. Inſuper ex Diodoro Siculo accepimus jam diu ab Ægyptiis obſervatum fuiſſe apparentem Solis motum ab oriente in occidentem diebus ſingulis non fieri in eodem plano, in quo Sol ab occidente in orientem motu annuo videtur ferri, quæ prima eſt inclinationis Eclipticæ, Æquatoriſque obſervatio: & noviſſe etiam Ægyptios motum Mercurii, ac Veneris non circa Terram, ſed circa Solem fieri a Macrobio teſtatum eſt. Denique magnæ illius pyramidis conſtructio, quam D. de Chazelles quatuor extremis angulis quatuor ſphæræ cardinibus accurate reſpondere deprehendit, ſatis indicat Meridianæ lineæ ducendæ methodum, & alia ad eamdem methodum ſpectantia Ægyptiis innotuiſſe. Aſtronomiæ vetuſtioris ſedes Straboni, cum in Ægypto degeret, Heliopoli monſtrata eſt

eſt: ea vero Alexandriam ſub Ptolemæo Sotere tribus fere ante æram vulgarem ſæculis ab Ariſtillo, & Timochari translata ſummis obſervatoribus, & longa obſervationum ſerie uſque ad everſum Ptolemæorum regnum illuſtrior extitit, atque alios adhuc cœli obſervatores habuit ad ſeptimum uſque æræ noſtræ ſæculum, quo a Saracenis ſubacta Ægypto Aſtronomiæ ſedes Babylonem translata eſt.

Qui in Alexandrina ſchola ſub Ptolemæis floruerunt potiſſimum memorari debent Ariſtarchus Samius, Eratoſthenes Cyrenenſis, & Hipparchus Bithinienſis. Ariſtarchus proportionem diametrorum Lunæ, & Solis veræ proximam determinavit, & reſtituta Philolai ſententia diurnum, & annuum Solis motum ad Terram retulit, & Terræ orbitam præ cœlo omni ſidereo tam parvam eſſe animadvertit, ut nulla ob varium Terræ locum haberi poſſit fixarum aberratio, quæ ſit ſenſibilis. Eratoſthenes cum differentiam maximæ, & minimæ Solis diſtantiæ a vertice in hyemali, & æſtivo ſolſtitio obſervaſſet, Tropicorum diſtantiam, & dimidium accipiendo Tropici unius diſtantiam ab Æquatore, quæ Eclipticæ obliquitas eſt, proxime determinavit: cumque inſuper dimenſus eſſet Alexandriæ a Syene urbe diſtantiam, quæ directe ad meridiem urbs ſita eſt, obſervataque utrobique altitudine ſolſtitiali Solis agnoviſſet qui meridiani arcus diſtantiæ illi reſponderet, primum unius terreſtris gradus determinandi, & Terræ magnitudinis inde eruendæ tentamen poſteris exhibuit. Hipparchus cum ſolſtitialibus obſervationibus vetuſtiorum Aſtronomorum inter ſe collatis anni Solaris tempus determinare aggreſſus eſſet; æquinoctiales ipſe obſervationes inſtituit, quibus ad recentiores alias obſervationes relatis tempus hujuſmodi accurate determinari poteſt. Determinavit etiam Hipparchus & quo proxime angulo orbita a Luna circa Terram deſcripta inclinetur ad planum Eclipticæ, & qui ſit motus lineæ, ut vocant nodorum, in qua ſcilicet lunaris orbita planum idem Eclipticæ interſecat, quique inſuper ſit motus lineæ alterius, in qua habetur maxima, & minima Lunæ diſtantia a Terra, ſive ut vocant apogæum, & perigæum, quæque apſidum linea appellari ſolet. Priorem etiam inæqualitatem motus Lunæ, quæ variæ diſtantiæ a Terra, & ab apogæi loco reſpondet, detexit Hipparchus, annuum Solis motum ſimiliter inæquabilem eſſe ſenſit, aliquam

agnovit esse dierum, ac temporum æquationem; quæ ex motu illo inæquabili ortum ducat. Denique intersectiones Eclipticæ, & Æquatoris, quæ puncta æquinoctialia dici solent, continue regredi agnovit Hipparchus, & locis fixarum omnium ad puncta illa relatis fieri ipse censuit, quod Stellæ fixæ in planis ad Eclipticam parallelis continue videantur progredi, & rem, ut ajebat Plinius, Deo improbam aggressus catalogum fixarum Hipparchus pro singulis constellationibus exhibere cœpit.

Ægypto in potestatem Romani populi redacta cœli observandi studium Alexandriæ diu viguit, & præ aliis omnibus observatoribus excelluit Ptolemæus Pelusiensis, qui cum revocata Terræ immobilis, & Solis, ac Planetarum omnium circa Terram se se volventium hypothesi potissimum memorari soleat, præcipuis tamen laudibus debet extolli quod omnium Astronomorum veterum observationes in Almagesti opere collegerit, quod tot alias observationes ipse instituerit, quod prioris illius inæqualitatis Lunarium motuum ab Hipparcho detectæ quantitatem æquatione alia correxerit, quod differentiam locorum cœli, ad quæ ex variis Terræ locis Planeta idem refertur, ab Hipparcho subobscure indicatam, ad calculum revocare cœperit. Post Ptolemæum, qui sub imperio Hadriani floruit, ad septimum usque æræ nostræ, ac decimum scholæ Alexandrinæ sæculum plures alii fuerunt, qui observandis cœli phænomenis Alexandriæ se dederent, qui excelleret autem nemo. Post Arabum irruptionem nullum jam amplius scholæ ejusdem vestigium superfuit Alexandriæ, nec nisi sæculo nono sub Califis Principibus Babylone Astronomiæ studium restitui cœpit: & cum tribus fere sæculis Arabes Astronomiæ promovondæ operam dederint, ac plures nobis reliquerint Solis, ac Lunæ, Planetarumque, ac Fixarum observationes, eamdemque fere exhibuerint unius gradus mensuram quam Eratosthenes; novi tamen nihil fere aliud protulerunt nisi quædam promotæ Trigonometriæ sphæricæ theoremata, & quod ope gnomonum altissimorum solstitialem umbram observantes, distantiam Solis ab Æquatore, & Eclipticæ obliquitatem minorem invenerint quam ipse Eratosthenes statuerat. Albategnius etiam Astronomorum Arabum præcipuus memorari præcipue debet quod cum theoriam annui motus Solis jam ab Hipparcho, & Ptolemæo traditam recognosceret, comparatis observationibus maximæ,

&

& minimæ Solis diſtantiæ differentiam, ſive ut vocant orbitæ excentricitatem, & maximæ diſtantiæ locum, ſive ut vocant aphelium, & aphelii progreſſum annuum, & motum annuum fixarum reſpectu punctorum æquinoctialium proxime determinaverit.

Aſtronomiæ ſtudium, quod ex Ægypto in Græciam Thales Mileſius, atque in Italiam Pythagoras olim detulerat, quodque paulo amplius excoli poſt Eudoxi, & Methonis ex Aſia reditum apud Græcos cœperat, everſo Arabum regno iterum in Europam delatum eſt. Et primo quidem Aſtronomia omnis medio fere ſæculo decimo tertio Toletum ſe ſe recipere viſa eſt, cum ab Alphonſo Decimo Caſtellæ Rege accerſitis undique celebrioribus ætatis illius Aſtronomis, & ſumma diligentia reaſſumptis Arabum obſervationibus correctæ primum tabulæ Ptolemaicæ, atque Alphonſinæ tabulæ fuerunt conditæ. Deinde vero Auſtriacorum Principum, ac potiſſimum Alberti tertii Auſtriæ Ducis, & Friderici tertii Imperatoris cura, & præſidio diuturnior Aſtronomiæ ſedes Vindobonæ ſtatuta eſt. Ibi enim Henricus Haſſiacus, Aſtrologiæ judiciariæ, a qua coævos ſuos editis ſcriptis revocare cœperat, Aſtronomiæ ſtudium ſubſtituit, & cum anno 1379 obiiſſet in Vindobonenſi cathedra ſucceſſores habuit Joannem de Gmunden, qui Eclipſium, ac Planetarum tabulas ad meridianum Vindobonenſem accomodatas elucubravit, Georgium Purbachium Auſtriacum, decimalis Aritmethicæ inventorem, qui Planetarum theoriam anno 1459 in lucem edidit, & Joannem Regiomontanum, qui primus omnium Ephemerides cœleſtium motuum ab anno 1475 ad annum uſque 1506 prænuntiatorum edidit. Purbachius, & Regiomontanus noverunt etiam quam Ptolemaicæ, & Alphonſinæ tabulæ eclipſibus recte ſupputandis, determinandiſque locis Planetarum impares eſſent, & ſingillatim loco Martis ad Stellas fixas relato errorem pluſquam duorum graduum deprehenderunt. Regiomontanus poſt reditum ex Italia Norimbergæ ad Aſtronomiæ ſtudium excitavit Walterum, qui majoribus inſtrumentis Planetarum loca determinare cœpit, & horologio authomato ad menſuram temporis accuratius quam veteres clepſydrarum ope præſtare poterant definiendam eſt uſus. Aſtronomiæ totius veteris defectum Copernicus, & Galilæus ampliſſime demonſtrarunt: & quidem ille qui eſſet ordo, ac motus cœleſtium corporum explicavit,

cavit,

cavit, atque iſte invento Teleſcopio Copernici ſyſtema confirmavit undique, & quæ accurata eſſet menſura temporis indicavit cum pendulum horologio aptandum eſſe monuit, ut poſtmodum ab Hugenio fuit præſtitum. Copernico, & Galilæo intermedius Tycho Brahe in Hiſtoria Aſtronomica memorari debet, qui majoribus, & melioribus inſtrumentis ſiderum loca explorare, & refractionum tabulis ſupputatis loca eadem cœpit corrigere: & Galilæi coævus, atque amicus Keplerus hic debet adjici, qui Planetarum locis diligentiſſime comparatis inter ſe, quæ priores, ac præcipuæ ſint motuum cœleſtium leges invenit, atque aliis Newtoni inventis proxime anteceſſit. Tournii Copernicus, Vranopoli, & Pragæ Tycho Brahe, Patavii, & Florentiæ Galilæus, Keplerus Vindobonæ, & Græcii veterem illam Heliolitanam, Alexandrinam, Babylonenſem, Toletanam Aſtronomiam reformaſſe, aut veram potius, accuratamque Aſtrorum ſcientiam condidiſſe cenſendi ſunt.

Licet enim ſummis laudibus ſemper primævi Aſtronomi, & prima iila perluſtrandi cœli tentamina commemorari debeant, quid vere in Aſtrorum-ſcientia profeciſſe cenſendus eſt Ariſtarchus cum in libro de magnitudinibus, & diſtantiis Solis, & Lunæ diametrum Solis non niſi ſex, aut ſeptem vicibus diametro Terræ, & teſte Plinio diſtantiam Solis non niſi novendecim vicibus diſtantia Lunæ a Terra majorem eſſe dixit? Cum diametrum Lunæ ad diametrum Terræ, qua methodo ignotum eſt, ſe habere invenit in majore ratione quam 43:108, minore quam 19:60, unde eſſet media ratio 100:283, quæ vere eſt 100:365? Cum longiore regula circa centrum mota ut totam Solis, ac deinde Lunæ diametrum e centro percurrere videretur, Solis diametrum ſtatuit dimidii gradus, & Lunæ diametrum, quæ diametro Solis eſt minor, circiter duorum graduum? Aut quam leviter ab Ariſtarcho dictum cenſeri debet, quod retulit Archimedes, Solem in centro Mundi eſſe immobilem, & apparentias diurni, & annui motus Solis ex motibus Terræ oriri, cum poſt Hipparchum ſchola omnis Alexandrina ſententiam Terræ circa Solem motæ rejecerit, & Ptolemæus ad immobilitatem Terræ aſſerendam abſurdas adeo circulorum excentricorum, & epicyclorum hypotheſes advexerit? Neque hoc præcipuum Aſtronomiæ inventum Copernico

præripuiſſe

præripuisse censeri debet Pythagoras qui Solem in centro mundi ea tantum ratione statuit quod dignior substantia esset ignis, aut Philolaus, qui, ut legitur apud Plutarchum libro tertio de placitis Philosophorum, non Terram, ac Lunam tantum, sed etiam Solem in Ecliptica moveri asseruit, aut Hicetas Siracusanus, qui, ut refert Cicero in Lucullo, non Solem, ac Stellas tantum, sed Lunam etiam stare dixit, nec præter Terram rem ullam in Mundo moveri: & cum tot inter figmenta aliis etiam Philosophis Telluris motæ verbum exciderit; omnis inventi gloria illi dumtaxat adjudicari debet, qui quo ordine Planetæ singuli, & qua axis inclinatione Terra circa Solem feratur explicavit, & quæ inde oriantur tempestatum vicissitudines, & apparentiæ Planetarum in adversas partes statis temporibus progredientium, ac regredientium. Atque ita pariter cum veteres etiam Ægyptii opinati fuerint Venerem, & Mercurium non circa Terram, sed circa Solem ferri, quod primum Planetarum omnium circa Solem motorum analogiæ argumentum est; primus omnium Galilæus invento Telescopio, & phasibus Veneris, & Mercurii consideratis Planetam utrumque circa Solem ferri demonstravit.

Quod etiam Terræ circuitum stadiorum 250000 Erastothenes; & 240000 Possidonius ex observata Alexandriæ a Syene urbe distantia prodire invenerint, quodque mensuras alias memoraverint stadiorum 180000 Ptolemæus, 300000 Cleomedes, & 400000 Aristoteles, tanto numerorum dissensu mensurarum indiligentiam, defectumque indicare prima fronte videri posset. Utique mensura illa assumpta, quam Aristoteles libro secundo de Cœlo Mathematicis sui temporis tribuit, & qua meridiani terrestris gradus stadiorum 1111, peripheria 400000 rotundo numero prodierat; si stadium æstimetur hexap. 51. ped. 2. poll. 6. lin. 11., ut D. Freret contendit; esset gradus hex. 57183: esset autem hex. 57066, nec nisi 6 circiter hexapedis a Parisiensi gradu differret, si juxta D. Bailly assumatur stadium hexap. 51. ped. 1. poll. 1.92. Hic etiam illustris Author Cap. IV. Lib. I. Astronomiæ recentioris cum tres alias determinationes stadiorum usitatas olim protulisset, quæ ad priorem illam se habebant ordine ut numeri 15, 20, 12 ad 9, numeros alios Possidonii, Ptolemæi, & Cleomedis ad eamdem Aristotelis mensuram

reduxi,

reduxit, & quatuor iis diverſis ſtadiis aſſumptis mirum oſtendit veterum omnium menſurarum cum recentioribus conſenſum. Poſitis autem hiſce omnibus conſiderandum eſt primo quod cum hexapedis 2400 Eratoſthenes in menſura unius gradus erraverit, cumque ſemidiametro Terræ ſtadiorum 39772 inde eruta, atque, ut refert Plutarchus, Lunæ a Terræ diſtantia ſtadiorum 780000, Solis 804000000, qua methodo ignotum eſt, aſſumpta, in determinanda etiam ratione ſemidiametri Terræ ad Lunæ diſtantiam adeo erraverit, nec minus erraverit cum, ut refert Macrobius, diametrum Solis non niſi vicibus 27 diametro Terræ majorem eſſe cenſuit; non niſi caſui jam tribui poterit quod iis numeris relatis inter ſe invicem ratio diſtantiæ Solis ad Terræ ſemidiametrum fere eadem prodierit, quam aliis poſtmodum Aſtronomiæ ſubſidiis Caſſinus determinavit. Conſideratis autem quinque iis Terræ totius menſuris, ac reductionibus occurrunt plura, quæ mihi omnino inveriſimilia videntur eſſe: quod nullam menſuræ ab Ariſtotele commemoratæ, ſi certior erat, rationem habuerit Eratoſthenes, qui paulo poſt ipſum vixit: quod Erathoſthenes, Poſſidonius, Ptolemæus non longo temporis intervallo a ſe diſſiti Alexandriæ diverſas adeo ſtadiorum determinationes ad Tellurem metiendam ſecuti ſint: quod cum in hac Aſtronomiæ luce unius ſecundi error ad poli altitudinem determinandam præcaveri nequeat, qui in menſura unius gradus hexapedarum 16 errorem parit; veteres illi Aſtronomi non niſi hexapedis 6 in menſura unius gradus erraverint. Qui poſt illos ſæculo nono ſub Almamonis regno melioribus ſubſidiis obſervationes eaſdem renovarunt Aſtronomi Arabes obſervationum veterum non ignari, meridiani terreſtris gradum milliarium Arabum $66\frac{2}{3}$ eſſe deprehenderunt: errorem autem hexapedarum 10000 Picartus, & 2500. D. Bailly in ea menſura ſubrepſiſſe, reductione milliaris Arabis diverſimode facta, opinati ſunt.

Ut ad priores illos Aſtronomos redeamus, quam parum eſt quod cum tamdiu, & tot ipſi obſervando cœlo incubuerint, comparatis obſervationibus longo intervallo temporis a ſe diſſitis, & erroribus obſervationum per revolutionum numerum diviſis proxime agnoverint quod ſit tempus reverſionis Solis, ac Lunæ ad eamdem fixam, aut ad eoſdem aſpectus inter ſe? Id autem non adeo proxime

xime

xime veteribus innotuisse ex ipsa Chaldaicæ, Methonicæ, Calippicæ periodi imperfectione satis colligitur, & inde etiam patet, quod bissextilis anni intercalationi, quæ non nisi Julii Cæsaris tempore, & Sosigenis consilio Romæ institui cœpit, nulla alia Solaris anni correctio ad sextum decimum usque sæculum adjecta sit: quod anni Solaris tempus ex solstitialibus observationibus, quæ magis incertæ, ac dubiæ sunt, sex fere minutis primis majus esse collegerit Hipparchus quam ex æquinoctialibus observationibus ab Hipparcho ipso institutis colligatur: quod eamdem anni determinationem Hipparchi auctoritate retinuerit Ptolemæus: quod ex vero anni tempore Albategnius tria fere minuta prima subduxerit: quod accurate a Waltero primum Solaris annus decimo quinto sæculo exeunte determinatus fuerit. Quam parum est etiam quod veteres Astronomi semitas annui, & diurni motus, atque Eclipticam, & Æquatorem ad se invicem inclinari agnoverint, observataque annis singulis maxima, & minima Solis distantia a vertice inclinationis angulum Eratosthenes, Hipparchus, Ptolemæus proxime determinaverint? Quod ex hac ipsa Eclipticæ ad Æquatorem obliquitate, atque ex varia Solis distantia, quæ ex sensibili diametrorum apparentium varietate adeo facile dignosci poterat, aliquam dierum inæqualitatem haberi collegerit Hipparchus, qui tamen æquationem temporis triplo majorem esse censuit quam vere sit? Quod fixarum quarumdam distantiam ab intersectione Eclipticæ, & Æquatoris supputando eam post longum temporis intervallum augeri agnoverit Ptolemæus, qui tamen progressum hujusmodi fixarum respectu punctorum æquinoctialium multo minorem vero esse statuit? Et cum adeo irregularis sit Lunæ motus, cum tot exiguæ, ac periodicæ medii motus Lunæ æquationes a Tychone, & Astronomis aliis recentioribus deprehensæ sint, quamparum est quod comparatis Chaldæorum observationibus Hipparchus medii, ac veri motus differentiam ad quinque gradus pertingere æstimaverit, quodque adjecerit Ptolemæus quinque graduum differentiam in Pleniluniis tantum, ac Noviluniis haberi, in quadraturis autem Lunæ, & Solis differentiam veri, ac medii Lunæ motus esse usque graduum $7 \frac{1}{3}$?

Quod etiam Hipparchus, Theone teste, distantiam Lunæ a Terra majorem vera, distantiam Solis multo minorem vera æstima-

verit, & tribus fere post Hipparchum sæculis Ptolemæus distantiam Solis minorem adhuc quam Hipparchus censuerit, quod Ptolemæus differentiam locorum cœli, ad quæ Planetæ ex Telluris superficie, atque ex centro referri possent, determinare aggressus, differentiam omnem, sive ut vocant parallaxim, in Sole, ac Luna invenerit multo majorem quam vere sit, quod adeo informem Mundi compagem Hipparchus, Ptolemæus, Arabes alii omnes Astronomi ad Copernicum usque confinxerint, quod Arabes sibi finxerint etiam motum quemdam trepidationis fixarum, plura alia hujus generis plane indicant non fuisse illam nisi infantiam Astronomiæ, & veteres omnes observationes non fuisse nisi quœdam tentamina Astronomiæ condendæ, ac promovendæ? Et ne quis plus justo tribuat methodo Eclipsium prænuntiandarum, quam veteribus etiam Ægyptiis innotuisse diximus, considerandum est præcipuum illud, ac maximum cœli phænomenon, quo & a Luna occultari Solem quandoque, & a Terra obumbrari Lunam contingit, homines omnes ad observationem præcipue allicere debuisse, nec fuisse admodum difficile ut qui minimas Solis, & Lunæ distantias a vertice, & Plenilunia, ac Novilunia Solstitialia observare cœperant, Lunam deprehenderint non in eodem Eclipticæ plano moveri, atque illico intellexerint haberi non posse Eclipses nisi prope communem duorum planorum interfectionem, comparatisque plurium Eclipsium locis, atque intervallis temporum agnoverint interfectionem ipsam, quæ linea nodorum dicitur, ad varia cœli puncta successive dirigi, & post annos circiter 18 $\frac{2}{3}$ in pristinum locum reverti. His autem proxime longa observationum serie deprehensis, cum tantæ sint Lunæ, & Solis diametri, & quæ in partem Soli aversam a Terra projicitur umbrosus conus ad Lunæ distantiam diametro Lunæ sit multo latior, non erat admodum difficile majores saltem Lunæ per umbram Terræ, aut citra Solis discum transeuntis Eclipses aliquo modo prænuntiare. At vero Eclipsium accuratius per duodecimas partes Lunaris, aut Solaris diametri, quæ digiti appellantur, supputandarum methodum in Astronomiam primum invexit Ptolemæus, eamque adeo imperfectam, & mancam adhuc esse senserunt Purbachius, Regiomontanus, Walterus, ut cum verteribus tabulis corrigendis incumberent novæ veluti Astronomiæ condendæ recentioribus occasionem dederint.

Facile etiam quisque intelliget non potuisse amplius in Astrorum scientia

ſcientia proficere ingenioſiſſimos antiquitatis totius homines teleſcopio, pendulo, quadrantibus, ſextantibus, micrometris, inſtrumentis majoribus ad menſuram ſpatii, & temporis deſtitutos, non promota adhuc Mechanica, & Optica quantum ad accuratas obſervationes, nec promota Geometria, atque Analyſi quantum ad accuratas ſupputationes, comparationeſque cœleſtium motuum neceſſe erat. Tempus enim Aſtronomi veteres metiebantur ex quantitate aquæ in clepſydris effluentis, quæ quidem quantitas clepſydris utcumque compoſitis neque eſt tempori proportionalis, nec minores temporis fractiones exhibere poteſt: & licet ab anno uſque 1484 Walterus horologio authomato, in quo rotæ pondere inferius appenſo in motum agebantur, in ſuis obſervationibus uſus fuerit, licet aliquem pendulorum uſum apud Arabes fuiſſe teſtatus ſit Eduardus Bernardus Aſtronomus Oxfordienſis; pendulum tamen horologiis aptato ad magni Galilæi votum non niſi Hugenius pro accurata menſura temporis primo uti cœpit. Aſtrolabium ex binis laminis circularibus, ac concentricis, neque ita magnis, ut apud Ptolemæum legimus, in gradus 360, atque in minores alias partes diviſis conſtabat, quarum quæ interior erat intra ipſam exterioris laminæ cavitatem erat mobilis, atque ex utroque diametri unius extremo binas habebat apices perpendiculariter ad laminæ utriuſque planum aſſurgentes: unde ad metiendam Solis diſtantiam a vertice, qui filo, ac pondere appenſo deſignari poterat, verticaliter erecto laminarum duarum plano, euſque deducebatur lamina interior ut ſuperioris apicis umbra in apicem alium inferiorem caderet. Quod triquetron appellabat Ptolemæus conſtabat ex binis regulis, quarum una verticaliter fili, & ponderis ſuſpenſi ductu ſtatuebatur, altera duorum apicum ductu ex anguli vertice ad ſidus quodvis propoſitum dirigebatur, & duarum regularum angulus ad oculum ſubtenſus, ſeu ſideris diſtantia a vertice, traducta ab una ad alteram tertia regula, & in ſexaginta partes diviſa ſupputabatur: unde & in ſexageſimali diviſione, & in tertia eadem regula ad æqualem a centro diſtantiam utrimque ſtatuenda, & in ſupputando arcu ex ſubtenſa errores non ita exigui, ac multiplices haberi poterant. Quædam etiam triquetri ſpecies eſt, qua ad apparentium diametrorum menſuram Hipparchus jam uſus fuerat, binis ſcilicet regulis ita ad invicem incli-

 natis,

natis, ut qui in utroque extremo erant apices ex anguli apice diametrum propositam complecti viderentur; quique in æstimanda Solis, ac Lunæ diametro errores Hipparcho exciderant satis indicant quam incertus, ac dubius instrumenti hujusmodi esset usus. Vix autem credibile videtur, quod in Transactionibus Philosophicis num. 103. se ex Arabum scriptis collegisse scripsit Bernardus jam memoratus, anno 992 ope sextantis, cujus radius plusquam 50 pedum erat, Eclipticæ obliquitatem deprehensam fuisse 23° 32′ 21″, & aliquot post annis exploratam quadrante, cujus radius erat circiter 20 pedum, prodiisse 33° 35′. Nam & instrumentorum tantæ magnitudinis constructio artificum omnium hujus temporis ingenium, ac diligentiam superaret, & usus esset admodum difficilis, & differentia omnis observationum exiguo intervallo temporis dissitarum errorem instrumentorum, observatorumque non plane exiguum fuisse ostendit, & quæ nullæ aliæ innotuerunt tantis instrumentis habitæ observationes fidem, aut saltem scriptorum Arabum sensum omnino dubium relinquunt.

Quamdiu igitur Astronomiæ sedes Heliopoli, Alexandriæ, Babylone, ac Toleti fuerat nullam fuisse videtur cœli, astrorumque accurate observandorum rationem, & veteres illos Astronomos fuisse potius Astronomiæ præcursores quam fundatores: & cum ad Copernicum usque non nisi informis habita sit Planetarii systematis delineatio, quidquid superædificaretur non nisi mancum, monstruosumque esse poterat. Inprimis enim cum Planetæ singuli quandoque ad eamdem plagam cum Sole, & Luna videantur progredi, quandoque regredi in adversam partem, & retrogradationem inter, directionemque in eodem cœli loco consistere appareant, cumque illas non apparentias motuum dumtaxat, sed veras motuum oppositiones Ptolemæus, Arabes, Astronomi veteres fere omnes esse intelligerent, sibi finxerunt Planetam quemvis in circulo quodam exiguo, quem epycyclum appellabant, revolvi, & epycieli centrum revolvi in peripheria amplioris alterius circuli Terræ excentrici, quem idcirco appellabant excentricum, seu deferentem circulum: & cum motus omnes Planetarum circulis Terræ concentricis exhibere vellent Eudoxus, & Calippus 56 sphæras, ac plures etiam Fracastorius in libro de Stellis proposuerunt, ut sphæris diversimode motis singula motuum phenomena

mena

mena explicarentur. Hæc omnis, atque adeo abſurda oppoſitorum motuum compoſitio, atque inprimis Veneris motus, qui nullis omnino circulis circa Terram utcumque motis explicari poterat, Nicolaum Copernicum impulit ut teſtimonio ſenſuum rejecto, diuturna contemplatione cœli, & obſervationum comparatione, qui veri eſſent, qui apparentes motus, & quæ eſſet Planetarii ſyſtematis conſtitutio inveſtigaret. Itaque in libro de revolutionibus cœleſtibus, qui Norimbergæ primum anno 1543 in lucem prodiit, conſtituit Terram ſimul cum Luna, & Primarios Planetas omnes ob occidente in orientem circa Solem immobilem revolvi, & diurno etiam motu revolvi Terram circa axem ſibi proxime parallelum, & gradibus fere $66\frac{1}{2}$ ad ſemitam annui motus inclinatum: atque ex hoc ipſo axis parallelismo oriri oſtendit dierum, ac noctium viciſſitudines, & ob diverſam Terræ, Planetarumque circa Solem motorum velocitatem oſtendit fieri quod Planetæ in adverſam partem quandoque videantur regredi: ac denique ſtatuit terreſtrem axem a parallelismo aliquantulum deflectere, & circa axem Eclipticæ lentiſſime revolvi, atque inde oriri dixit quod regredientibus punctis æquinoctialibus fixarum diſtantiæ ab iiſdem punctis continue augeantur. Proxime autem Copernico Galilæus in delineando Mundi ſyſtemate adjungi debet, & quod ſyſtema ipſum nitidiſſime expoſitum ab objectis omnibus vindicaverit, & quod invento Teleſcopio, obſervatiſque Veneris phaſibus Venerem, ac propterea etiam Mercurium circa Solem revolvi certiſſime oſtenderit, & quod in dialogo tertio de Mundi ſyſtemate parallelismum axis ſola impreſſi motus ratione haberi dixerit, nec motu illo ad ſervandum parallelismum eſſe opus, quem Cap. XI. Lib. I. de revolutionibus cœleſtibus Copernicus declinationis motum appellaverat.

Ea Planetarii ſyſtematis delineatione cum ſummi Aſtronomi, & Philoſophi gloriam aſſecutus fuerit Copernicus, vix quidpiam aliud eſt in toto opere de revolutionibus cœleſtibus quod memorari debeat. Nam & proportionem diſtantiarum Planetæ cujuslibet a Sole non recte adhuc determinavit Copernicus, & determinatione anni Solaris a Ptolemæo, & Albategnio traditas recenſendo, non autem corrigendo, ſtatuit Solarem annum continue imminui, & quamdam aliam finxit librationem Terræ, qua inæqualis, & contrarius quandoque motus

tus

tus punctorum æquinoctialium jam antea a Ptolemæo, & Albategnio confictus explicaretur, & cum fixarum distantiam ab Ecliptica invariabilem censuisset, & comparatis aliis observationibus deprehendisset Eclipticæ obliquitatem minorem fieri, motum alium exeogitavit, quo Terræ Æquator ad Eclipticæ planum continue accederet. Hanc aliam Astronomiæ partem, in qua adeo defecerat Copernicus, corrigendam, perficiendamque suscepit Tycho Brahe, qui licet Terræ immobilis figmentis, & Astrologiæ etiam præstigiis addictus esset, singulari tamen ingenio, ac patientia, atque instrumentorum maximorum præsidio ad observationem cœli conversus recte observandi scientiam instituit, & cum Universi systema unius hominis vires, & conatus omnes excederet, simul Copernici, Galilæi, & Tychonis studiis factum est, ut ab illis quidem Universi centro, ac Terræ, Planetarumque circa centrum se se volventium ordine designato, ab isto autem recognitis locis, ac variationibus fixarum ad extremas partes jacentium, undique perspectum Systema, ac delineatum fuerit. Paratis igitur armillis æquatorialibus, & zodiacalibus, quadrantibus muralibus, sextantibus, bipartito ut vocabat arcu, singulis instrumentis sæpius recognitis, perforatis dioptris, divisione limbi per transversales lineas instituta, adhibito ad minores partes determinandas micrometro, quod paulo ante Vernerius, & Nonnius invenerant, instituto accuratius quam antea calculo parallaxium, & temporibus etiam accuratius supputatis ex angulari conversione alicujus fixæ, & distantia a vertice, quam quidem temporis determinandi rationem Astronomi veteres agnoverant, accurate autem determinare quadrantium, & sextantium defectu nequaquam poterant, ac denique supputatis angulis deviationis loci apparentis siderum, quæ ex refractionibus radiorum lucis per atmosphæram Terræ transeuntium oriri debet, quamque aliquam quidem esse Ptolemæus, Alhazenus Arabs, & Walterus agnoverant, primus autem omnium Tycho numerica tabula exhibere cœpit ad altitudinem usque graduum 45 supra horizontem ubi exigua esse incipit refractio; plusquam triginta annorum studio Havniæ, & Vranopoli in Dania Eclipticæ obliquitatem, anni solaris tempus, apogæi, & perigæi Solis diametrum, præcessionem annuam æquinoctiorum, elementa motus Planetarum omnium, æquationem motus Lunæ, quæ pendet ex va-

ria

ria Lunæ ipsius distantia a Sole, & loca fixarum 777 determinavit, iisque locis ad vetustiores observationes relatis deprehendit fixarum distantiam ab Ecliptica continue imminui, & planum Eclipticæ ad immobile æquatoris terrestris planum continue accedere.

Tycho ex Dania profugus a Rodulpho Secundo Imperatore splendide exceptus Astronomiæ sedem Pragæ constituit, atque ibi observationum adjutores habuit Longomontanum, Jostelium, & Keplerum: observationes autem omnes Tychonis, post ipsius mortem, furore belli Bohemici dispersæ, jussu Ferdinandi Secundi a Martinusio Bohemiæ Cancellario collectæ sunt, jussuque Ferdinandi Tertii, & Leopoldi Cæsaris auspiciis in lucem editæ. Keplerus continuatis Pragæ, Viennæ, & Græcii observationibus, iisque summo studio, & labore inter se comparatis binas leges detexit, quibus præcipue reguntur motus Planetarum omnium, ac Satellitum. Primo enim excentricis vetustiorum Astronomorum orbitis ellipticas orbitas substituendas esse agnovit, in quarum communi foco esset Sol, & quæ ita a Planetis singulis describerentur ut a maxima Solis distantia ad minimam transeundo celeriores fierent Planetæ ipsi, & non quidem arcus, neque anguli, sed areæ radiis ab utroque arcus extremo ad Solem ductis comprehensæ essent temporibus proportionales. Deinde comparatis mediocribus distantiis, & temporibus periodicis Planetarum deprehendit Keplerus quadrata temporum periodicorum proportionalia esse cubis mediocrium distantiarum: & cum invento Telescopio quatuor Jovis Satellites a Galilæo, quartus Saturni Satelles ab Hugenio, & quatuor alii Satellites Saturni a Dominico Cassino detecti fuerint; eadem lege secundarios Planetas circa primarios revolvi deprehensum est ut areæ sint proportionales temporibus, & quadrata temporum periodicorum sint distantiarum cubis proportionalia. Keplerus etiam in Astronomica Historia memorari debet quod refractionum tabulas ab horizonte usque ad verticem accuratius supputaverit: Hugenius quod pendulum horologio ad accuratam mensuram temporis aptaverit, ut dictum est: Dominicus Cassinus quod tabulas Satellitum Jovialium a Galilæo incœptas condiderit, quod meridiani terrestris gradus trigonometrice metiri cœperit, quod Cometarum motu ad Solem relato ipsa motus regularitate ostenderit Cometas, ut jam antea Keplerus, Hevelius,

Ty-

Tycho, Regiomontanus, & Seneca teste vetustiores alii Astronomi opinati fuerant, corpora esse perennia, quæ in orbitis prælongis moventur circa Solem. Dominicus Cassinus, qui a Lodovico XIV. ex Italia ad Astronomiam in Galliis fundandam anno 1669 evocatus est, Richerius qui anno 1672 longitudinem penduli secundis singulis oscillantis, & absolutam vim gravitatis prope æquatorem minui deprehendit, Roemerus, qui comparatis temporibus eclipsium in unoquoque Jovis Satellite successivam propagationem lucis detexit, Flamstedius, qui minores alias observavit Lunaris motus inæqualitates, Newtono coævi fuerunt Astronomi celebriores, Hallejus etiam studiorum consors.

Newtonus omnibus Geometriæ, atque Analyseos subsidiis ad Physicam cœlestem se se convertens, phænomenis omnibus consideratis, comparatisque observationibus inter se, ex quo Planetæ omnes Primarii, ac Cometæ circa Solem, & Secundarii circa Primarios lineas curvas, & in se redeuntes describant, collegit cœlestia corpora vi gravitatis a cursu rectilineo continue deflecti: ex quo & circa Solem illi, & isti circa Primarios suos describant areas proportionales temporibus collegit vim gravitatis Planetarum Primariorum, Cometarumque in Solem dirigi, & Satellitum vim in Primarios: ex quo in Planetis omnibus circa idem centrum se se volventibus quadrata temporum periodicorum proportionalia sint cubis mediocrium distantiarum collegit vim gravitatis esse in ratione inversa duplicata distantiæ a centro, & Planetarum, ac Satellitum motum in ellipsi fieri, motuque Lunæ ad gravium cadentium motum relato, & Cometarum motibus consideratis deprehendit eadem lege Cometas circa Solem, & Lunam circa Terram revolvi. Deinde vero ex continuis, periodicis, atque exiguis Planetarum, ac Lunæ inprimis in elliptica semita perturbationibus collegit Newtonus omnia cœlestia corpora non in corpus illud dumtaxat, quod elliptici motus est focus, sed etiam in se invicem esse gravia: & ex phænomenis præcessionis æquinoctiorum, fluxusque, ac refluxus maris collegit singulas Terræ particulas in Solem, ac Lunam esse graves, atque ex observationibus figuræ Terræ collegit etiam in se invicem particulas singulas graves esse, sicque universim statuit gravitatem, attractionem, vim centripetam esse generalem corporum omnium proprietatem, & gravitatis vim acceleratri-

cem

cem esse quantitati materiæ attrahentis directe, & quadrato distantiæ reciproce proportionalem. Quæ post Newtonum a summis Astronomis aut diligentitus observata, aut detecta fuerunt phænomena amplificandæ gravitatis theoriæ, atque explicando Planetario systemati argumenta totidem summis aliis Geometris, ac Mathematicis præbuerunt. Phænomena autem cœlestia post Newtonum observata præcipua sunt: quæ a Bradlejo detecta est loci apparentis, ad quem Stellæ referuntur, a loco vero aberratio, & exigua, ac periodica nutatio terrestris axis: quæ diligentius recognitæ, atque in tabulas a Cl. Wargentino redactæ sunt æquationes motus periodici Satellitum Jovialium: quæ a Tobia Mayero tabulis pariter exhibitæ, & singillatim explicatæ sunt æquationes omnes motuum Lunarium: quæ in Cometæ reversione deprehensa est periodicorum temporum differentia: quæ a Parisiensi Academia potissimum decretis expeditionibus sub æquatore, & polari circulo, aliisque in locis deprehensa est absolutorum ponderum, & Meridiani graduum differentia. Qui universam gravitatis theoriam ad hunc usque perfectionis apicem perduxerunt, & quorum suo loco amplior a nobis habenda erit mentio, ordine hic memorari debent Eulerus, Clairaut, Alembert, Simpson, Mayer, Mac-Laurin, Daniel Bernoulli, la Grange, Bailly, la Place, Walmesley, la Lande.

Ego cum ab ineunte usque ætate hanc ipsam Matheseos partem excolendam potissimum suscepissem, præcipuam etiam studiorum meorum partem in præsens usque esse volui. Ut vero studiorum omnium, aliorumque operum a me antea editorum, & postremi hujus operis rationem aliquam benigno Lectori afferam, memoranda in primis erit Dissertatio de Magnitudine, & Figura Terræ anno 1751 Mediolani edita, in qua soluto, evolutoque Problemate attractionis corporum rotundorum ostendere volui observationum ad illud usque tempus institutarum ab hypothesi Terræ homogeneæ, & in æquilibrio compositæ dissensum in exiguos aliquos obsevationum errores refundi posse. Deinde memoranda est Dissertatio de inæqualitatibus motus diurni Terræ, quæ anno 1756 in lucem Pisis edita est, eodemque anno Regiæ Berolinensis Academiæ præmium obtinuit. In ea vero cum variatæ velocitatis, qua Terra circa axem

volvitur, rationem nullam, ac caussam physicam deprehendissem, & de iis etiam variationibus directionis axis, quæ ex Solis, ac Lunæ attractione ortum ducunt, cœpissem agere, assumpta eadem Newtoni, authorumque aliorum hypothesi de motu annuli, qui in Æquatore Terræ libere circumponi intelligatur, correctaque motus per Terram omnem distributione, quam Newtonus eodem modo fieri censuerat si terra exterior ad annulum illum solidum reduceretur, ostendi præcessionem æquinoctiorum vi Solis genitam non nisi secundis aliquot majorem prodire quam statuerat Newtonus ipse. Subinde vero in eadem studia, ac totis viribus obnitens, omissa annuli hypothesi, inventoque theoremate compositionis motuum rotationis, Tomo primo Dissertationum Lucæ editarum anno 1759, novam exhibui solutionem problematum præcessionis, nutationisque, & præcessionis annuæ quantitatem duplo majorem inveni quam Newtonus, eamdemque omnino quam invenerat ante Alembertus. In eo etiam volumine edita est Dissertatio de altitudine, figura, & variationibus Atmosphæræ Terræ, aliorumque Planetarum, quæ jam anno 1758 a Regia Parisiensi Academia præmium obtinuerat. Tomo autem altero, qui anno 1761 in lucem prodiit, formulis virium perturbatricium in convergentes series resolutis, specimen quoddam exhibui variationis temporum periodicorum, quæ in orbitis ellipticis pendere videntur ex loco apsidum Planetæ attracti, & attrahentis: quod quidem specimen anno 1760 proxime accesserat præmio Parisiensis Academiæ, & novis studiis auctum in Dissertatione, quæ in Commentariis Bononiensibus anni 1767 legitur, atque adhuc ad ampliorem formam deductum anno 1770 obtinuit præmium Regiæ Havniensis Academiæ. In iisdem etiam Dissertationibus Lucæ editis anno 1761 novam protuli solutionem problematis aberrationis lucis, quæ ob successivam lucis propagationem, atque ob motum Terræ in Stellis fixis, Planetisque omnibus haberi debet, resolutisque simul problematis motus nodorum, inclinationisque orbitarum, qui ex attractione mutua proficiscuntur, inveni obliquitatem Eclipticæ, attractione potissimum Veneris, Jovisque imminui, & post datam periodum temporis reverti oportere in locum pristinum, & limitem maximæ, ac minimæ obliquitatis Eclipticæ censeri posse circiter unius

gradus

gradus. Dissertationis totius compendium habetur in priore parte tomi quinti Academiæ Bononiensis, atque in parte altera ejusdem tomi pariter in compendium redacta habentur, quæ ad præcessionem æquinoctiorum, & nutationem axis terrestris, atque ad Lunæ figuram, & librationem pertinent.

Hisce omnibus in lucem editis, evoluto adhuc, & considerato theoremate compositionis motuum rotationis agnovi demum hypothesim illam, quam proposuerat Newtonus, quamque alii authores secuti fuerant, de motu nodorum annuli solidi circa Æquatorem Terræ diurno motu revoluti falsam esse, & verum nodorum motum duplo majorem esse, quam Newtonus censuerat, eoque errore correcto ex Newtoni etiam methodo veram collegi præcessionis annuæ quantitatem. Soluto igitur, quod adhuc supererat hacce in re, dubio ad alia Physicæ cœlestis phænomena studiis omnibus conversis plura alia inveni, quæ ad theoriam figuræ Terræ, fluxusque, ac refluxus maris, & atmosphæræ illusttandam conducere videbantur, ac deinde ad theoriam Lunæ progressus speciem illam Geometrici calculi primum excolui, qua Newtonus potissimum, & Walmeslejus, aliique Angli usi fuerant, ac supputatis præcipuis æquationibus, quas evectionis, & variationis vocant, iisque per æquationem centri correctis, atque aliis consideratis lunarium motuum elementis, XXVI æquationes medii motus Lunæ in longitudinem, XIV motus nodorum, & XII inclinationis orbitæ exhibui. Itaque simul collectis omnibus, & quæ jam sparsim edita, & quæ adhuc in lucem edenda erant, Celeberrimi Euleri, aliorum illustrium Mathematicorum exempla demum sequenda esse censui, ac singulis Dissertationibus in opus integrum coalitis, opus ipsum de Gravitate universali corporum inscripsi, atque in tres libros partiri volui, quorum primus erat de gravitate omnium corporum in se invicem, ac de iis omnibus phænomenis gravium cadentium, pendulorum, rotantium, projectorum, quæ ex unica vi ad unicum centrum tendente proficiscuntur: alter erat de gravitate omnium particularum, & de phænomenis aliis, quæ ex varia singularum partium in commune centrum vi pendent, de figura Terræ, de fluxu, ac refluxu maris, de variationibus, ac librationibus diurni motus: tertius de gravitate in omnia corpora, ac de reliquis omnibus phænomenis, quæ in Luna, ac

Planetis aliis Primariis; ac Secundariis ex mutua in se invicem actione oriri debent.

Opus hujusmodi anno 1768 Augusti Cæsaris auspiciis Mediolani editum est. Quæ vero in tertia operis parte, specie illa synthetici calculi sejunctim erutæ, reductæque a me fuerant lunarium motuum æquationes, licet cum Astronomicis observationibus satis congruerent fere omnes, dissentiebant tamen nonnullæ, atque illa in primis quæ proportionalis est simplici distantiæ Lunæ a Sole. Jam igitur analytice explorata æquatione ipsa, & generali æquatione alia problematis trium corporum se se attrahentium, quam Eulerus, Clairaut, Alembert, Simpsonius, & Majerus tradiderant, attentius considerata deprehendi singulari quadam terminorum dispositione & ad approximationes integrationis facilius reduci æquationem differentialem, & omnes simul Lunarium motuum inæqualitates summo observationum consensu supputari, atque in primis apogæi motum satis accurate supputari ex priore integratione, correctionibus aliis omnibus se se invicem compensantibus. Analyseos totius specimen exhibui in epistola ad D. Melanderhielm data, quæ Parmæ anno 1769 edita est, & cum hanc aliam methodum late ad præcipuas omnes Lunæ, ac Satellitum Jovialium, Planetarumque inæqualitates definiendas traduxissem, non ideo tamen priorem methodum sepofui, eaque adhuc promota inveni quod quæ circularis est orbita actione virium perturbatricium in ellipsim concentricam abire debet, & quod Planetæ attracti motus proxime exhiberi potest ellipsi circa centrum revoluta, & Planetam attrahentem versus transposita. Ope hujus theorematis syntheticum etiam æquationis utriusque calculum, quæ pendet & ex dupla, & ex simplici Lunæ distantia a Sole, cum observationibus proxime conciliare potui, atque in orbitis Satellitum Jovialium, quæ ad circulos propius accedunt, solis hisce subsidiis Geometriæ æquationes illas satis accurate supputavi, quas ex observationibus Wargentinus, aliique authores ex generali æquatione problematis trium corporum se se attrahentium analytice derivaverant. Cum itaque nonnulla alia invenissem, quibus cœlestem, ac terrestrem Physicam illustrari mihi visus fueram, novum jam opus proferre volui, quod de Cosmographia Physica, & Mathematica inscripsi. Pars prior, quæ motuum periodi-

dicorum theoriam continet, Mediolani edita eſt anno 1774, pars altera, quæ agit de motu rotationis, & de phænomenis inde pendentibus anno 1775.

In tertio hoc operum volumine eum de Aſtronomia, & Coſmographia phyſica agendum eſſet, omnia accuratius quam fieri potuit recognoſcere, in ordinem redigere, ac latius explicare, & quæ occaſione lucubrationum nuperrimarum a celebrioribus Mathematicis editarum decennii elapſi tempore conſcripſeram ſuo loco ſingula volui adjicere. Præcipue autem adjecta ſunt: in priore libro, qui de ſyſtemate Planetario inſcribitur, alia formularum celebris Lambert demonſtratio, atque ad faciliorem Cometarum calculum applicatio, & phænomenorum omnium ſtationis, & retrogradationis Planetarum, quæ non adhuc ſatis alii Aſtronomi evolverant, amplior explicatio: in libro altero, qui de figura Planetarum eſt, nova reſolutio problematis a D. Saint Jacques de Sylvabelle propoſiti de ſolido maximæ attractionis, & nonnulla alia quæ ad figuræ terreſtris quæſtiones elucidandas pertinent: in libro tertio, qui eſt de fluxu, & refluxu maris, & atmoſphæræ, conſiderationes variæ de variationibus exiguis diurni, ac nocturni æſtus maris, quod non adhuc ſatis phænomenon in hypotheſi exiguæ profunditatis maris explicatum cenſuerat Clariſs. la Place, & calculus variationum Barometricarum ex Solis, ac Lunæ viribus pendentium, qui ut per partes ſingulas calculus expoſitus modo eſt renovatæ apud Italos quoſdam opinionis meteorologicorum influxuum Lunæ fundamentum præcipuum penitus convellit: in quarto libro, qui de motu diurno eſt, theoremata nonnulla de exiguis variationibus diurni motus ex diſſertatione illa excerpta, quæ anno 1783 a Petropolitana Academia præmium retulit, & uberior applicatio theorematis compoſitionis motuum rotationis ad alia elegantiſſima D. la Grange theoremata demonſtranda de libratione, atque oſcillatione Lunæ oblongæ circa axem plano orbitæ perpendicularem, & de paralleliſmo duarum linearum, quibus planum Eclipticæ duo plana, lunaris orbitæ, & æquatoris rotationis circa axem illum conceptæ interſecat. In libris aliis ſubſequentibus cum de perturbationibus motus periodici Planetarum omnium, ac Satellitum agendum eſſet, primo ſecernere, atque explicare volui quæ ſatis accurate determinari poſſunt ſynthetice, ut ſunt æquationes

mo-

motus Satellitum Jovialium, motus nodorum, inclinationisque orbium Planetarum, & quæ non adhuc ab aliis Mathematicis definita fuerat imminutæ obliquitatis Eclipticæ periodus, ac reversio. Deinde reassumpta analysi problematis trium corporum se se attrahentium, & calculis singulis recognitis studium omne in eo contuli ut simpliciorem adhuc efficerem theoriam motuum Lunæ, aliorumque Planetarum.

Ad hunc autem quod pertinet syntheticæ, & analyticæ methodi delectum, præmonendum jam demum est quod cum in id totis viribus incumberem ut solutiones problematum non accuratæ tantum sed etiam breves essent, ac faciles, atque ut hæc omnis Matheseos pars in compendium veluti reduceretur; synthesi, atque analysi promiscue usus non ea tantum analytice tradidi quibus evolvendis impar est synthesis, ut diuturno studio exploratam Newtoni methodum supputandis omnibus Lunæ, & Planetarum inæqualitatibus, atque in primis apogæi motui imparem esse inveni, verum etiam alia complura quæ ad analysim brevissime revocantur, ut sunt in priore volumine tot Cavalerii, Viviani, vetustiorumque aliorum Geometrarum theoremata, in secundo problemata non pauca motus, ac resistentiæ corporum solidorum, fluidorumque, & in tertio hoc volumine tot aliæ Astronomicæ, ac Physicæ investigationes. Newtoni vero, aliorumque Geometrarum Anglorum potissimum, atque Italorum genio indulgere volui in problematis iis evolvendis, quæ ope syntheseos, & quadam calculi Geometrici specie non directe solum, & breviter, & accurate, sed etiam eleganter resolvi possunt, ut sunt in priore volumine quæ quantitates Isoperimetricas, in secundo quæ motum rotationis corporum, atque in tertio hoc volumine potissimum quæ attractionem, & æquilibrium corporum sphæroidicorum, quæ æquationes motus Satellitum Jovialium, quæ præcessionem æquinoctiorum, nutationemque terrestris, & lunaris axis respiciunt. Ut hanc etiam operum partem, hæc illustrandi Planetarii systematis tentamina studiosus Lector benigne excipiat vehementer opto.

COS-

COSMOGRAPHIÆ
PHYSICÆ ET MATHEMATICÆ
LIBER PRIMUS
DE SYSTEMATE PLANETARIO.

Planetarum ſyſtema ſic conſtituitur. Planetæ Primarii Mercurius, Venus, Terra, Mars, Jupiter, & Saturnus, Cometæque omnes ellipticos orbes circa Solem in foco poſitum deſcribunt, parum excentricos Planetæ, Cometæ autem maxime excentricos, & ad parabolas propius accedentes: ac pariter Secundarii Planetæ circa Primarios, quinque Satellites Saturni circa Saturnum, quatuor Jovis Satellites circa Jovem in ellipſibus parum excentricis, & ad circulos proxime accedentibus moventur. Luna vero circa Terram in orbita alia revolvitur, quæ licet non admodum ſit excentrica, continuis tamen aberrationibus ab ellipſi magis recedere videtur. Planetæ omnes Primarii, & Secundarii communem habent directionem motus, & velocitatem majorem habent qui centro motus propiores ſunt, & orbitæ, quas ſinguli deſcribunt, licet in uno, eodemque plano non jaceant, & ad ſe invicem aliquantulum inclinentur, una tamen Zodiaci zona comprehenduntur, nec niſi ad ſeptem uſque gradus hinc inde a plano terreſtris orbitæ excurrunt: Cometæ vero aliqui eamdem Planetarum directionem, aliqui contrariam habent, plerique orbitarum plano a plano terreſtris orbitæ, quæ Ecliptica dicitur, majoribus angulis recedunt. Sol, Terra, Luna, Mars, Jupiter circa axem datum eadem directione motus volvuntur, qua Planetæ omnes moventur circa Solem, & axis motus diurni Terræ ad planum Eclipticæ inclinatur gradibus fere $66\frac{1}{2}$, & in ſingulis annui orbis locis ſibi fere parallelus manet, plani autem Eclipticæ, & Æquatoris diurni motus non omnino eadem eſt interſectio, ſed continue in adverſas partes regreditur, tanquam ſi æquator ipſe angulo fere graduum $23\frac{1}{2}$ ſupra Eclipticæ planum decurreret ad plagam op-

oppositam illi, in quam feruntur Planetæ omnes, & axis Terræ circa axem Eclipticæ duas conicas superficies sibi invicem in centro obversas, & polus Terræ circa polum Eclipticæ circulum lentissime describeret.

Unico motu Terræ, qui ab occidente in orientem peragitur circa centrum, haberi debent apparentiæ motuum Solis, ac Lunæ, Planetarumque, ac siderum aliorum omnium ab oriente in occidentem se se volventium, qui si non apparentes tantum, sed reales potius essent motus, atque essent distantiæ ab axe in sideribus singulis proportionales, absurdam Mundi machinationem exhiberent, in qua tot, & tam variis, & tam magnis motibus ea gignerentur phænomena, quæ unico Telluris motu obtineri possent. Parallelismo autem axis, & inclinatione illa ad planum orbitæ circa Solem descriptæ dierum, ac noctium inæqualitas, & tempestatum anni vicissitudo haberi debet: quod & breviter indicavit Copernicus Cap. XI. Lib. I. de Revolutionibus Cœlestibus, & nitide explicavit Galilæus in Dialogo tertio de Mundi Systemate, & nunc temporis artifices authomatis Planetariis tyronum oculis tam clare exhibent, ut supervacaneum sit idipsum schematis delineare. Terra etiam annuo motu delata circa Solem Sol ipse ex adversa parte ab occidente in orientem motu annuo, & contraria directione ac fiant motus diurni apparentiæ ferri videbitur; & cum Planetæ propiores Soli sint velociores, ac Planetæ inferiores Terram, Terra autem superiores Planetas prætergrediatur, Planetæ singuli videbuntur quandoque ad eamdem partem simul cum Terra progredi, quandoque regredi in adversam partem: quod instituto absolutæ, & relativæ velocitatis calculo clarius perspicietur suo loco, quam schematum delineatione authores alii explicaverint. Denique ob motum terrestris axis circa Eclipticæ axem, atque ob regressionem punctorum æquinoctialium fieri debet quod Stellæ fixæ respectu punctorum eorumdem videantur progredi, & circa axem Eclipticæ revolvi.

Qui fusius contra hanc Copernici, & Galilæi sententiam disputavit Ricciolus Lib. IX. To. II. Almagesti sui argumenta LXXVII. contra diurnum Terræ motum proposuit, quæ in unicum argumentum jam olim a Ptolæmeo Lib. I. Cap. VII. Almagesti propositum recidunt

fere

fere omnia: quod scilicet corpora superficiei Terræ non adhærentia non iisdem omnino legibus in Terram quiescentem, ac motam caderent. Difficultates autem hujusmodi præoccupavit jam Galilæus cum monuit eodem angulari motu, eodemque tempore terram solidam, & maria, & atmosphætam omnem, & terrestria omnia corpora circa axem ferri oportere: unde cum motus communis quicumque additus relativos motus corporum non turbet, omnino eadem gravium cadentium, & in altum projectorum, ac sibi utcumque occurrentium phænomena in Terra circa axem, aut circa Solem mota habebuntur, quæ in Terra omnino quiescente haberi possent. Quæ etiam ex constante apparentia fixarum, atque ex defectu parallaxis annuæ adversus annuum Telluris motum difficultas olim desumebatur ea consideratione omnino solvitur quod cum Terræ a Sole distantia præ distantia fixarum adeo sit parva ut nullo modo possit esse sensibilis, in singulis punctis orbitæ annuo motu percursæ circa Solem, moles, ac lux fixarum, & apparens locus, & alia hujusmodi fixarum phænomena eadem erunt quæ ex Terra in sphæræ cœlestis centro quiescente spectari possent. Exigua, ac regularis illa loci apparentis fixarum a loco vero aberratio, quam longa observationum serie detexit Bradlejus, & quæ sexto libri hujus capite explicabitur, Telluris motu annuo circa Solem se se volventis certissimum indicium est: quæque in subsequente libro exponentur observationes pendulorum tardius semper prope æquatorem quam circa polum vibrationes suas absolventium, & absoluti ponderis in minoribus ab æquatore distantiis imminuti, manifeste vim aliquam esse indicant, quæ opponatur gravitati, augeaturque accedendo ad æquatorem, eaque non nisi vis centrifuga ex motu diurno Terræ circa axem orta esse potest.

Venerem etiam, & Mercurium non circa terram, sed circa Solem moveri ex phasibus illuminationis compertum est, quæ sunt Lunæ phasibus simillimæ: Plena enim facie ultra Solem, dimidiata e regione Solis, cis Solem falcata apparent, & per Solis discum quandoque ad modum nigricantium macularum transcurrere videntur, neque ultra gradus 28 Mercurius, & Venus ultra 47 hinc inde a Sole digrediuntur. Simili ratione Mars cum circa quadraturas Solis versatur nec eamdem omnino superficiei partem & Soli, & Telluri obvertit,

gibbosus aliquantulum apparet, plena autem facie fulget cum ultra Solem conspicitur, aut citra Solem Telluri ex adverso objicitur. Jupiter, & Saturnus cum multo majorem a Sole distantiam habeant idem semper hemisphærium & Soli, & Telluri obvertere videntur, & plena semper facie fulgent, quamvis lucem omnem a Sole mutuatam habeant, atque ideo aliqua disci parte interpositione Satellitum obscurentur. Singulare etiam Terræ, & Planetarum omnium superiorum, atque inferiorum circa Solem motorum argumentum est quod relatis ad Solem motibus eædem leges omnino prodeant, quibus Jovis Satellites circa Jovem, & Saturni Satellites moventur circa Saturnum: quod scilicet areæ a Planetis omnibus Primariis circa Solem, & a Secundariis Planetis circa Primarios descriptæ sint proportionales temporibus: quodque quadrata temporum periodicorum proportionalia sint cubis mediocrium distantiarum a centro motus. Nam si mediocres distantiæ Planetarum a Sole referantur ad radium mediocrem terrestris orbitæ & distantiæ Satellitum Jovialium a centro Jovis accipiantur in semidiametris Jovis, & distantiæ Satellitum Saturni in semidiametris annuli quo cingitur; distantiæ, & tempora periodica, ut ea pro Planetis Primariis ex Keplero, pro Secundariis vero ex Cassini opere desumpserat Newtonus, sunt ut in tabula sequenti.

	Tempora periodica.		*Distantiæ mediocres.*	*Ex lege temporum.*
Mercurii.		$87.9692.^{d}$	38806.	38710.
Veneris.		224.6176.	72400.	72333.
Terræ.		365.2565.	100000.	100000.
Martis.		686.9785.	152350.	152369.
Jovis.		4332.5140.	519650.	520096.
Saturni.		10759.2750.	951000.	954006.
Satellitum Jovis.	I.	$1.^{d}\,18.^{h}\,27.'\,34.''$	$5.\frac{2}{3}$	5.667.
	II.	3. 13. 13. 42.	9.	9.017.
	III.	7. 3. 42. 36.	$14.\frac{23}{60}$	14.384.
	IV.	16. 16. 32. 9.	$25.\frac{3}{10}$	25.299.
Satellit. Saturni.	I.	1. 21. 18. 27.	$1.\frac{19}{20}$	1.93.
	II.	2. 17. 41. 22.	$2.\frac{1}{2}$	2.47.
	III.	4. 12. 25. 12.	$3.\frac{1}{2}$	3.45.
	IV.	15. 22. 41. 14.	8.	8.
	V.	79. 7. 48. 00.	24.	23.35.

Ex hac eadem lege periodicorum temporum, & distantiarum colligi poterit quod si mediocris distantia novi Planetæ a Sole ad radium mediocrem terrestris orbitæ se habeat ut 19:1 circiter, quod primum a D. D. Prosperin, & Slop determinatum accepi, tempus periodicum circa Solem erit annorum $82.\frac{+}{1}$.

Ad variationes autem motuum quod pertinet, cum in orbitis Satellitum Saturni, & Jovis, quæ proxime circulares sunt, & in orbita etiam Veneris, quæ parum admodum est excentrica, arcus, & anguli, & areæ circa centrum descriptæ augeantur quam proxime in eadem ratione temporis; in orbitis aliorum Planetarum, quæ magis excentricæ sunt, deprehendit Keplerus observationibus accuratissime satisfieri si orbitæ ellipticæ intelligantur, in quarum communi foco sit Sol, & ellipsium perimetri ita a Planetis singulis intelligantur describi, ut non jam arcus, neque anguli circa Solem descripti, sed areæ arcu proposito, & binis rectis ab utroque arcus extremo ad Solem ductis comprehensæ sint proportionales temporibus. Scilicet si in fig. 1. sit *ADBE* orbita elliptica, in qua fertur Planeta aliquis circa Solem in foco *C* positum, & sit ellipseos axis major *AB*, minor *ED*, excentricitas *CO*, summa apsis, sive aphelium Planetæ *A*, ima apsis, seu perihelium *B*, ducaturque ex foco radius quicumque *CF*; area *ACF* erit semper ad totam aream ellipseos ut tempus, quo arcus *AF* describitur, ad tempus integræ revolutionis. Radius *AF* dicitur radius vector orbitæ ellipticæ, & angulus *ACF* dicitur anomalia Planetæ vera, anomalia autem media dicitur angulus, qui ad quatuor rectos se habeat ut area *ACF* ad totam aream ellipseos: adeoque si circa focum eumdem *C* describi intelligatur circulus *HKLI*, cujus area æqualis sit areæ ellipseos, radius vero sit medius proportionalis inter binos ellipseos semiaxes, accipiaturque sector circularis *ACK* æqualis sectori elliptico *ACF*, erit anomaliæ mediæ angulus *HCK*. Differentia angulorum anomaliæ veræ, & anomaliæ mediæ, qua motus Planetæ est inæquabilis, dicitur æquatio centri, & medii motus æquatio universim dicitur quantitas, quæ motui medio sideris cujusvis additur, aut detrahitur ut motus verus habeatur, sive est differentia inter motum illum, qui tempori proposito respondet, & motum alium, qui haberetur si eadem summa motus totius periodici

divideretur in simplici ratione temporis. Universim etiam æquationis cujusvis argumentum dicitur angulus, cujus sinui, aut cosinui proportionalis est ipsa æquatio, & coefficiens sinus, aut cosinus dicitur quantitas constans æquationis.

Planum, in quo Terra movetur circa Solem, quod Luna in ipso reperiri debeat ut eclipses contingant, Eclipticæ habet nomen, atque ad ipsum exiguis angulis Lunæ, & aliorum Planetarum orbitas, angulo autem paulo minore gradibus $23\frac{1}{2}$ æquatorem diurni motus Terræ inclinari a primis usque Astronomiæ excultæ temporibus innotuit. Interfectiones cujusque orbitæ cum plano Eclipticæ nodi appellantur, & nodus ascendens quo emenso Planeta aliquis ab Ecliptica ad Boream, descendens quo ad Austrum declinat: interfectiones autem Eclipticæ, & Æquatoris, quæ sunt prima puncta signorum Arietis, & Libræ, dicuntur puncta æquinoctialia, quod Terra ad alterutrum ex his punctis delata Sol ad punctum oppositum refertur, & in plano æquatoris videtur volvi, & continuata Terræ circa axem revolutione dies æquantur noctibus. Hoc etiam in loco cum armillarem sphæram describere, & quæ in scholis elementaribus tradi solent Geographiæ notiones repetere omnes non vacet, ad pleniorem tamen sequentium intelligentiam lectoribus revocandum est in memoriam quod cum Meridianus terrestris appelletur curva, quæ in superficie Terræ designari potest plano per axem diurni motus perpendiculariter ad æquatoris planum traducto, & latitudo Geographica Meridiani arcu metiatur traducto ab æquatore usque ad locum propositum, longitudo vero sit Æquatoris arcus Meridiano proposito, atque alio circulo maximo, qui primi Meridiani loco assumatur, interceptus; si per propositum aliquod sidus traduci intelligatur circulus sphæræ mundanæ maximus, & qui propterea sit planis Eclipticæ, & Æquatoris perpendicularis, mutatis denominationibus arcus ab eodem sidere ad Eclipticam usque interjectus latitudo, & qui ad Æquatorem usque intercipitur declinatio sideris dicitur, longitudo autem dicitur Eclipticæ arcus, ascensio recta arcus æquatoris, qui a primo Arietis puncto usque ad circulum illum maximum intercipitur, quique idcirco proportionalis est differentiæ temporum appulsus & puncti ejusdem, & sideris ad Meridianum. Memo-

morandum est insuper quod cum ob multo minorem Planetarum distantiam a Sole quam quæ distantia fixarum est, pro vario Terræ, & Planetæ cujusvis loco in orbita circa Solem descripta ad varia cœli puncta Planeta idem referatur, si in fig. 2. Terræ semita sit Tt, & Terra in T, Sol in S, Planeta in P reperiri intelligatur, atque ex P in planum Eclipticæ STt demittatur perpendiculum PL, angulus PSL latitudo Planetæ e Sole visa, sive Heliocentrica dicitur, angulus PTL latitudo e Terra visa, sive Geocentrica; angulus LTS elongationis, angulus LST commutationis, & angulus TLS parallaxis magni orbis dicitur, recta SL distantia curtata a Sole, punctum T Planetæ locus ad Eclipticam reductus, & differentia motuum in punctis P, L Planetæ ad Eclipticam reductio. Simplici autem parallaxis nomine designatur angulus, quem binæ rectæ e centro, atque e superficie Telluris ad centrum Planetæ alterius ductæ intercipiunt, seu differentia loci e centro, atque e superficie Telluris visi, quique manifeste idem est angulus, quem Terræ semidiameter ad centrum Planetæ alterius subtenderet.

Comparatis inter se veterum Astronomorum observationibus fixarum longitudines continue augeri, & puncta æquinoctialia regredi ab Hipparchi usque temporibus deprehensum est: recentioribus autem, atque accuratissimis observationibus comparatis regressionem annuam punctorum eorumdem Caillius, aliique Astronomi statuerunt $50.3''$. Hipparchus etiam cum solstitii a se observati tempus cum solstitiali alia Aristarchi observatione annis 145 ante instituta comparasset annum solarem, ac tropicum esse censuit $365^d\ 5^h\ 55'\ 12''$: quam eamdem anni determinationem retinuit Ptolemæus cum solstitiales observationes intervallo annorum 571, & observationes alias æquinoctiales annorum 285 intervallo dissitas simul comparasset. At vero quæ ex solstitialibus observationibus colligitur anni solaris quantitas nimium incerta est, cum ob motum lentissimum declinationis Solis, quem non nisi armillis suis Astronomi veteres observare poterant, error etiam exiguus declinationis Solis non exiguum errorem in determinando solstitii tempore possit parere: cumque æquinoctii determinatio accuratior esse possit, Ptolemæum Hipparchi authoritate æquinoctiales observationes ad solstitialium normam accomodasse censuit

D.

D. Bailly in notis ad librum secundum Historiæ vetustioris Astronomiæ. Ricciolus autem Lib. I. Astronomiæ Cap. IV. cum æquinoctium autumnale anno 158 ante æram vulgarem Alexandriæ ab Hipparcho observatum die 27 Septembris, atque ut putabat Hipparchus circa meridiem, ut vero adjectis correctionibus refractionum censebat Ricciolus ipse die 26 hora 20 post meridiem, comparasset cum observatione alia æquinoctii, quam ipse Bononiæ habuerat, anno 1655, annum solarem statuit $365^d\ 5^h\ 48'\ 48''$: nec nisi 1″ longiorem annum æquinoctialem, ac tropicum Cassinus tomo primo elementorum Astronomiæ prodite ostendit correctionum omnium ratione habita, & æquinoctiis ab Hypparcho observatis collatis simul cum æquinoctiis aliis, quæ posteriore sæculo Parisiis observata sunt. His positis si ob regressum lentissimum punctorum æquinoctialium fiat ut 360° ad arcum 50.3″ ita tempus $365^d\ 5^h\ 48'\ 48''$ ad quartum, patebit arcum illum 50.3″ tempore 20′ 25″ a Terra absolvi, eoque addito fiet tempus reversionis Terræ ad idem punctum eclipticæ $365^d\ 6^h\ 9'\ 13''$. Quantitas autem illa 11′ 12″, qua annus Tropicus vere a diebus $365\frac{1}{4}$ deficit, quæque annis 128 integrum fere diem conficeret, exegit ut quarto quoque anno bissextili posito, ut Sosigenis consilio ab Julio Cæsare statutum fuerat, centesimus quisque annus, bis, & ter centesimus pro bissextilibus non habeantur, adjectoque ad annum quadringentesimum bissextili variandæ intercalationis necessitas ad vigesimum quartum usque centenarium protrahatur: quæ Kalendarii Juliani correctio, a Gregorio XIII. Boncompagno summorum Astronomorum consilio decreta, atque ex Italia ad nationes alias transvecta, singulari tanti Principis laude, Gregorianæ reformationis nomen obtinuit.

Minime vero expectet quispiam ut ad Astronomici operis complementum Astronomiæ practicæ regulas, ac principia modo exponamus, quibus scilicet æquinoctia, ac solstitia observari, & apparentes Planetarum, ac Cometarum motus referri ad Solem, singulorumque distantiæ a Sole, periodica revolutionum tempora, orbitarum inclinationes, atque excentricitates, nodorum, & apheliorum loca, ascensiones rectæ, longitudines, declinationes, latitudines Geocentricæ, Heliocentricæ, atque alia motuum cœlestium elementa determinari possunt. Nam & Astronomicæ praxeos recensio longius nos in hoc

C opere

opere a theoria cœlestium motuum abduceret, & cum plura habeamus, quæ aliorum studiis circa cœlestem Physicam, & Terræ ac Lunæ, Planetarumque, ac Satellitum aliorum theoriam hic addi possint, nihil habemus quod vulgatissimis Astronomicæ praxeos institutionibus addamus: quas inter adhuc præcipue memorari, ac commendari debet secundus Eustachii Manfredii liber Introductionis ad Ephemerides, & Domini la Lande opus, quo Astronomicam scientiam omnem, ac praxim simul complexus est, & quæ habemus priora duo Prælectionum Astronomicarum Domini Melanderhjelm volumina. Qua igitur ratione in duobus prioribus Algebræ, & universæ Mechanicæ voluminibus exegimus ut ante Tyro Arithmeticæ vulgaris, & Geometriæ, ac Trigonometriæ planæ elementa sibi compararet; ita in tertio hoc volumine, quod tradendæ Astronomiæ Physicæ, ac Mathematicæ destinatum est, Tyroni commendamus ut armillaris Sphæræ notiones, & Trigonometriæ sphæricæ elementa, & quæ triangulorum resolvendorum analogiæ, & principia Astronomiæ practicæ in elementis iisdem tradi solent ex aliis institutionibus sibi comparet. Hic elementa præcipua motuum Planetarum ex lectionibus Astronomicis Cl. Caillii desumemus, quæque a Caillio minime memorantur retrogradationum, & stationum tempora ex Ptolemæo, & æquationes centri ex Cassini opere supplebimus. Retrogrados autem apparere Planetas inferiores, Mercurium scilicet, ac Venerem monuit Ptolemæus cum citra Solem e Terra conspiciuntur, directos cum plena facie fulgent, ac sunt ultra Solem: Planetas vero superiores Martem, Jovem, ac Saturnum directos esse dixit quando ad eamdem plagam cum Sole referuntur, retrogrados videri ex adversa parte, & retrogradationem, directionemque inter stationis apparentiam haberi. In Satellitibus Jovis, & Saturni, quæ proxime assumi possint distantiæ a centro, & periodica revolutionum tempora superius jam dictum est. De motu Lunæ cum fusius suo loco acturi simus satis erit hic attigisse tempus reversionis Lunæ ad eamdem fixam assumi posse $27^d 7^h 43' 12''$, tempus reversionis ad aspectum eumdem cum Sole, sive ut vocant mensem synodicum $29^d 12^h 45' 3''$, inclinationem orbitæ ad eclipticam $5° 9' 8''$, excentricitatem orbitæ 0.0548. Elementa motus aliorum Planetarum ita in unicam tabulam possunt conjici.

Tem-

Tempora:	*Mercurii.*	*Veneris.*	*Terræ.*	*Martis.*	*Jovis.*	*Saturni.*
Revolutionum Periodicarum.	$87^d 23^h 15\frac{1}{2}'$.	$224^d 16^h 48\frac{1}{2}'$.	$365^d 6^h 9\frac{1}{6}'$.	$686^d 23^h 30\frac{1}{2}'$.	$4332^d 12.^h$	$10759^d 8.^h$
Retrogradationum in Perigæo.	$21.^d$	$40^d 16.^h$		$64^d 12.^h$	$118.^d$	$136.^d$
Retrogradationum in Apogæo.	$22^d 12.^h$	$43.^d$		$80.^d$	$122^d 12.^h$	$140^d 16.^h$
Tempora Stationum.	$12.^h$	$1^d 12.^h$		$2.^d$	$4.^h$	8.
Orbitæ axis major.	7742.	14466.	20000.	30474.	104020.	190758.
Axis minor.	7570.	14465.	19997.	30342.	103899.	190448.
Excentricitas.	810.	52.	168.	1415.	2505.	5430.
Media diſtantia a Sole.	3827.	7233.	10000.	15203.	51980.	95302.
Ratio excentricitatis.	0.2117.	0.0072.	0.0168.	0.0931.	0.0482.	0.0569.
Æquatio centri.	$24^\circ 2' 58.''$	$49' 6.''$	$1^\circ 55' 51.''$	$10^\circ 39' 19.''$	$5^\circ 31' 17.''$	$6^\circ 31' 40.''$
Inclinatio ad Eclipticam.	$7.^\circ$	$3^\circ 23' 20.''$		$1.^\circ 50' 54''$	$1^\circ 19' 30.''$	$2^\circ 30' 36.''$
Locus nodi anno 1700.	$1^s 14^\circ 43.'$	$2^s 13^\circ 59\frac{1}{2}'$		$1^s 17^\circ 17\frac{1}{2}.'$	$3^s 7^\circ 30.'$	$3^s 21^\circ 13\frac{1}{2}'$.
Locus aphelii.	$8^s 12^\circ 34\frac{1}{2}'$.	$10^s 6^\circ 26\frac{1}{2}'$.	$9^s 7^\circ 28.'$	$5^s 0^\circ 36\frac{1}{2}.'$	$6^s 9^\circ 26\frac{1}{2}'$.	$8^s 28^\circ 8\frac{1}{2}'$.
Diametri e Sole viſæ.	$21.''$	$29.''$	$21.''$	$12.''$	$37.''$	$16''$.
Ratio diametrorum.	0.38.	1.	1.	0.87.	9.16.	7.26.
Superficierum.	0.15.	1.	1.	0.75.	83.87.	52.73.
Soliditatum.	0.05.	1.	1.	0.65.	768.1.	382.8.

CAPUT PRIMUM.

DE MOTU CORPORUM IN ORBITIS CIRCULARIBUS.

THEOREMA I.

Vires centripetæ corporum motu æquabili circulos describentium diriguntur ad centra circulorum, & sunt inter se directe in ratione simplici radiorum, & reciproce in duplicata ratione periodicorum temporum.

Sint ABH, abh, fig. 3., bini circuli circa centra C, & c æquabiliter descripti, & sint AB, ab elementa arcuum eodem tempore absolutorum, tangentes AD, ad, sinus versi AE, ae. Manifestum est primo utrumque corpus sibi relictum in A, & a, velocitate omni, qua ibidem pervenit, excurrere debere per tangentes AD, ad, nec posse ad circularis peripheriæ puncta B, b deflecti dato tempore nisi spatiis AE, ae a tangentibus utrumque retrahatur, hoc est nisi in punctis singulis A, a vi aliqua secundum radios AC, ac impellatur ad centra C, c. Patet deinde vires centripetas in A, a proportionalis esse spatiis AE, ae centrum versus eodem tempore percursis, sive esse inter se vires ut $\frac{AB^2}{AC} : \frac{ab^2}{ac}$.

Cum igitur arcus AB, ab eodem tempore æquabilirer descripti proportionales sint circularis motus velocitatibus, si velocitates ipsæ sint V, v, circulorum radii R, r, vires centripetæ G, g, erit $G : g = \frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r}$. Sunt autem velocitates directe ut spatia æquabiliter descripta, & reciproce ut tempora, quibus describuntur: & spatia singulis revolutionibus æquabiliter percursa sunt ipsæ circulorum peripheriæ: peripheriæ vero sunt radiis proportionales. Quare si tempora periodica sint T, t, erit $V : v = \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, adeoque etiam $G : g = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$.

COROLLARIA.

I. Binæ hujus theorematis analogiæ $G : g = \frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r} = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$ quatuor alia ſuppeditant theoremata: I. ſi tempora periodica ſint æqualia, erunt vires centripetæ ut radii: II. ſi ſint æquales velocitates, erunt vires ut radii reciproce: III. ſi radii ſint æquales, erunt vires in ratione duplicata velocitatum: IV. ſi æquales ſint vires, erunt radii reciproce in duplicata ratione velocitatum, ſive directe in duplicata ratione temporum integrarum revolutionum. In eodem etiam circulo, data projectionis velocitate, radius variabitur in ratione reciproca vis centripetæ: & data vi centripeta radius variabitur in duplicata ratione velocitatis.

II. Generatim ſi tempora periodica ſint ut radiorum poteſtas quævis exponentis n, hoc eſt ſi ſit $T : t = R^n : r^n$, erit $V : v = \frac{R}{T} : \frac{r}{t} = \frac{1}{R^{n-1}} : \frac{1}{r^{n-1}}$, adeoque etiam $G : g = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2} = \frac{1}{R^{2n-1}} : \frac{1}{r^{2n-1}}$. Quare ſi ſit $n = \frac{1}{2}$, nimirum ſi tempora periodica ſint in ratione radiorum ſubduplicata, velocitates pariter erunt in ratione ſubduplicata radiorum, & vires centripetæ æquales erunt inter ſe: & ſi vires centripetæ ſint ut radii, erit $n = 0$, hoc eſt æqualia erunt tempora periodica, & velocitates pariter erunt radiis proportionales.

III. Si ſint $n = \frac{3}{2}$, hoc ſi tempora periodica ſint in ratione radiorum ſeſquiplicata, & quadrata eorumdem temporum ſint in ratione triplicata radiorum, erit $V : v = \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}} : \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}}$, $G : g = \frac{1}{R^2} : \frac{1}{r^2}$, nimirum velocitates erunt reciproce in ratione radiorum ſubduplicata, & vires centripetæ erunt reciproce in ratione duplicata radiorum. Viciſſim ſi vires centripetæ ſint ut quadrata radiorum reciproce, erunt quadrata temporum periodicorum directe ut radiorum cubi. Data etiam hac lege velocitatis ſi in eodem circulo varietur projectionis velocitas, & juxta Coroll. I. varietur radius in duplicata ratione velocitatis, periodicum tempus variabitur in triplicata ratione ipſius velocitatis. Cum

IV. Cum igitur quadrata temporum periodicorum Planetarum primariorum circa Solem, & Satellitum Jovis circa Jovem, & Satellitum Saturni circa Saturnum sint inter se ut cubi mediocrium distantiarum a centro Solis, Jovis, & Saturni, cumque Satellitum eorumdem orbitæ quam proxime circulares sint, atque orbitæ Planetarum non admodum differant a circulis; vires centripetæ Planetarum primariorum in Solem erunt reciproce ut quadrata mediocrium distantiarum a centro Solis: & vires centripetæ Satellitum Jovis, aut Saturni erunt reciproce ut quadrata distantiarum a centro, ad quod tendunt, Jovis ipsius, aut Saturni.

V. Pariter cum Luna periodum suam absolvat tempore minutorum 39343, & 60 circiter semidiametris a Terra distet, ac Terræ radius mediocris assumi possit pedum 19638051, si inde supputetur ambitus lunaris orbitæ, & quadratum arcus uno minuto absoluti dividatur per diametrum, prodibunt circiter pedes 15, atque addita parte duodecima unius pedis, quod vis mediocris Solis Lunam a Terra distrahens sit circiter $\frac{1}{178}$ totius attractionis Terræ, ut videbimus suo loco; spatium, quod uno minuto primo a Luna Terram versus describi posset vi gravitatis, erit circiter pedum $15\frac{1}{12}$ cumque idem spatium prope terrestrem superficiem a corpore decidente absolvatur tempore minuti unius secundi, atque uno minuto primo absolvi debeant pedes $60^2 . 15\frac{1}{12}$, vires etiam centripetæ Lunæ, & terrestrium corporum in Terram reciproce inter se erunt ut quadrata distantiarum a centro Terræ.

THEOREMA II.

Si vis centripeta sit constans, corpus per dimidium radium cadendo acquiret velocitatem æqualem illi, qua in circulo ejusdem radii uniformiter circa centrum revolvi posset.

Cum enim velocitas, quæ constante vi gravitatis tendente ad centrum C, fig. 3., per sinum versum AE libere decidendo motu uniformiter accelerato acquiri posset, ea sit, qua duplum spatium eodem tempore æquabiliter posset absolvi, coeuntibus punctis A, & B velocitas ipsa ad velocitatem circularis motus se habebit ut $2AE : AB = 2AE : \sqrt{2AE . R} = \sqrt{2AE} : \sqrt{R}$. Insuper in hypothesi gravitatis constantis velocitas, quæ per sinum versum AE ca-

dendo acquiritur, esset ad velocitatem, quæ acquiri posset cadendo per aliam quamlibet altitudinem AG ut $\sqrt{AE} : \sqrt{AG}$, ut ex Mechanica notum est. Compositis igitur rationibus velocitas, qua elementaris arcus AB describitur, sive qua corpus uniformiter in circulo revolvitur, erit ad velocitatem lapsus per spatium quodcumque AG in subduplicata ratione $R : 2AG$, & quo in loco G velocitas liberi descensus velocitati circularis motus æquabitur, erit $AG = \frac{1}{2} R$: nimirum corpus per dimidium radium cadendo, eadem vi centripeta, quam habet in data a centro distantia, acquiret velocitatem, qua in data ipsa distantia circulum uniformiter circa centrum posset describere.

COROLLARIA.

I. Quia in motu æquabili spatia descripta sunt proportionalia temporibus, & quo tempore dimidius radius describitur motu uniformiter accelerato, velocitate ultimo acquisita totus radius describi posset; tempus integræ revolutionis in circulo erit ad tempus descensus per dimidium radium, ut peripheria circuli ad radium: & quia tempus unius oscillationis in cycloide est ad tempus descensus per dimidiam longitudinem penduli ut peripheria ad diametrum; si longitudo penduli radio circuli æquetur, tempus unius oscillationis in cycloide dimidium erit temporis integræ revolutionis in eodem circulo.

II. Et quia insuper tempus, quo circularis arcus quicumque AQ describitur, ad tempus integræ revolutionis in circulo se habet ut arcus ipse ad peripheriam: & tempus integræ revolutionis est ad tempus descensus per dimidium radium ut peripheria ad radium ipsum: tempus autem descensus per dimidium radium est ad tempus descensus per spatium aliud quodcumque AG in subduplicata ratione radii ad $2AG$; tempus, quo describitur arcus AQ erit ad tempus descensus per AG ut $AQ : \sqrt{2AC \cdot AG}$.

III. Si tempora hujusmodi æqualia sint inter se erit $AQ^2 = 2AC \cdot AG$, nimirum circularis arcus dato tempore uniformiter descriptus erit medius proportionalis inter diametrum circuli, & spatium, quod corpus eodem tempore ob solam vim centripetam describeret. Denique si GR sit perpendicularis diametro in puncto G, jungaturque

AR

AR, ob $AR^2 = 2AC \cdot AG$, chorda ipſa AR æquabitur arcui AQ uniformiter deſcripto quo tempore ſpatium AG ob ſolam vim centripetam deſcribi poſſet.

THEOREMA III.

Velocitas corporis centro C, & radio AC circulum ADd deſcribentis, fig. 4., ad velocitatem acquiſitam libere decidendo ex A in B, in hypotheſi gravitatis proportionalis ſimplici diſtantiæ ſe habebit radius AC ad ſemiordinatam circuli BM, in hypotheſi vero gravitatis diſtantiarum quadratis reciproce proportionalis erit in ratione ſubduplicata $BC : 2AB$.

Nam per ſuperius theorema velocitas corporis circa C ad diſtantiam AC circulum deſcribentis æqualis eſt velocitati, quæ conſtante vi gravitatis agentis in loco A acquiri poſſet cadendo per $\frac{1}{2} AC$. Jam vero juxta Theor. XI. Lib. I. Mechanicæ velocitas deſcenſus per $\frac{1}{2} AC$ eſt ad velocitatem in eadem gravitatis hypotheſi acquiſitam deſcendendo per ſpatium aliud quodcumque AB in ratione ſubduplicata $\frac{1}{2} AC : AB$: & juxta Coroll. II. Theor. XIII. velocitates per AB acquiſitæ in duabus hypotheſibus gravitatis conſtantis, & gravitatis proportionalis ſimplici diſtantiæ a centro ſunt inter ſe ut $\sqrt{2AC \cdot AB} : BM$: ac pariter juxta Coroll. I. Theor. XIV. velocitates acquiſitæ in duabus hypotheſibus gravitatis conſtantis, & gravitatis reciproce proportionalis quadratis diſtantiæ a centro ſunt inter ſe in ratione ſubduplicata $BC : AC$. Quare compoſitis rationibus circularis motus velocitas in hypotheſi gravitatis proportionalis ſimplici diſtantiæ a centro erit ad velocitatem acquiſitam deſcenſu per AB ut $AC : BM$, in hypotheſi vero gravitatis diſtantiæ quadratis reciproce proportionalis ſe habebit in ratione ſubduplicata $BC : 2AB$.

COROLLARIA.

I. Si gravitas in loco A exprimatur unitate, varieturque in ratione ſimplici diſtantiæ, juxta idem Theor. XIII., erit in loco B velocitas deſcenſus $= BM$, & circularis motus velocitas $= AC$, ac tempus, quo deſcribetur arcus quicumque AM, erit $= \frac{AM}{AC}$, æquale ſcilicet tempori deſcenſus ex A in B, & totum tempus deſcenſus uſque ad centrum C æquale erit quartæ parti revolutionis in circulo

radii

radii AC. Et quia in eadem hypothesi gravitatis, per Coroll. II. Theor. I., æqualia sunt tempora periodica omnium corporum circa idem centrum circulos describentium, tempora etiam descensus liberi ad centrum ex quibusvis altitudinibus erunt inter se æqualia.

II. Si gravitas sit reciproce ut quadratum distantiæ, & in loco A exprimatur unitate, ac fiat pariter $AC = 1$, juxta idem Theor. XVI. erit velocitas descensus ex A in $B = \sqrt{\left(\frac{2\,AB}{BC}\right)}$. Quare etiam velocitas in circulo radii AC exprimetur unitate, & tempus, quo describetur quicumque arcus, exprimetur arcu ipso, ac tempus totius revolutionis erit $4AMD$. Cum igitur juxta Coroll. II. Theor. XIV. Lib. I. Mechanicæ tempus descensus liberi ex A in C sit $\frac{AMD}{\sqrt{2}}$, tempus revolutionis integræ in circulo erit ad tempus descensus liberi per totum radium ut $4\sqrt{2} : 1$. Ita cum Luna $27^d\,7^h\,43'$ volvatur circa Terram, si fiat $4\sqrt{2} : 1 = 27^d\,7^h\,43' : 4^d\,19^h\,55\frac{1}{2}'$, hoc erit tempus, quo Luna libere decidendo ob vim centripetam, quæ sit reciproce ut quadratum distantiæ a centro, ad centrum usque perveniret.

III. Quia in eadem hypothesi gravitatis, per Coroll. III. Theor. I. velocitates corporum radiis AC, BC circulos describentium sunt inter se in ratione subduplicata $BC : AC$; velocitas libero lapsu per AB acquisita erit ad velocitatem, qua circulus circa C, & radio BC describi potest, in ratione subduplicata $2AB : AC$, & si fiat $AB = \frac{1}{2} AC = BC$, velocitas corporis circulum describentis ea erit, qua ad duplam usque distantiam a centro e peripheria descripti circuli per rectam lineam posset ascendere. In eadem etiam gravitatis hypothesi, juxta idem tertium corollarium, cum periodica tempora in duobus circulis, ad distantiam AC, & BC descriptis circa idem centrum sint inter se ut $2\sqrt{2} : 1$; tempus dimidiæ revolutionis in circulo radii BC æquabitur tempori totius descensus ex A in C.

PROBLEMA I.

Iisdem positis, & dato quod vires centripetæ corporum circa diversa centra circulariter se volventium sint massis centralibus directe, & quadratis distantiarum reciproce proportionales, rationem massarum invenire.

Sint

Sint T, t periodica tempora Planetæ primarii P circa Solem S, fig. 5., & Satellitis L circa primarium: sint R, & r radii duarum orbitarum, & ratio massarum Solis, & Planetæ primarii sit $M:1$. Si vires centripetæ G, & g paribus ab unoquoque centro distantiis proportionales sint massis in centro positis, varienturque in duplicata ratione distantiarum reciproce, ac sit $G:g = \frac{M}{R^2} : \frac{1}{r^2}$, cum juxta Theor. I. esse debeat etiam $G:g = \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$, fiet primo $M:1 = \frac{R^3}{T^2} : \frac{r^3}{t^2}$. Deinde si sit m sinus maximi anguli LSP, quem radius orbitæ Satellitis subtendit ad Solem S, & qui dicitur angulus maximæ elongationis heliocentricæ Satellitis L a primario Planeta P; erit $PL = r = m.R$, ac fiet eadem massarum ratio $1:m^3 \frac{T^2}{t^2}$. Denique si p sit sinus anguli, quem semidiameter Planetæ P e Sole visa subtendit, quique dicitur angulus parallaxeos Solis, ut monitum supra est, ac sit q sinus semidiametri Planetæ ejusdem visæ e Satellite, qui angulus parallaxeos Satellitis dici debet, erit $p:q = PL:PS = m.PS:PS = m:1$, ac fiet eadem massarum ratio $1:\frac{p^3}{q^3}.\frac{T^2}{t^2}$. Ita igitur massæ Planetarum, circa quos Satelles aliquis volvitur, comparari poterunt inter se, atque iis positis denominationibus universim erit $M:1 = 1:\frac{r^3}{R^3}.\frac{T^2}{t^2} = 1:m^3.\frac{T^2}{t^2} = 1:\frac{p^3}{q^3}.\frac{T^2}{t^2}$.

COROLLARIA.

I. Si parallaxis mediocris Solis cum Newtono assumatur $10\frac{1}{2}''$, diameter apparens Lunæ $31'\ 16\frac{1}{2}''$, proportio veræ diametri Terræ ad Lunæ diametrum 365:100, adeoque sit Terræ semidiameter visa e Luna $57'\ 4''\ 37'''$, & maxima elongatio Lunæ a centro Terræ e Sole visa $10'\ 33''$, cujus sinus est 0.003068866; quantitas materiæ Terræ ad massam Solis pro unitate acceptam relata, juxta secundam formulam evadet $(0.003068866)^3 \left(\frac{365^d\ 6^h\ 9'}{27^d\ 7^h\ 43'}\right)^2 = 0.0000000289024 \times 178.725 = 0.00000516558$. Newtonus in Propos. VIII. Lib. III. as-

assumpta eadem maxima Lunæ elongatione a centro Terræ quantitatem materiæ Terræ invenit $\frac{1}{169282}$ = 0.0000059. Si parallaxis mediocris Solis statuatur 9″, cum juxta formulam tertiam massa Terræ imminui debeat in triplicata parallaxeos ratione, evadet tantum 0.00000325.

II. Sunt autem quantitates materiæ in ratione composita voluminum, & densitatum, ac sunt volumina ut cubi diametrorum: adeoque densitates sunt directe ut massæ, & reciproce ut cubi diametrorum. Insuper si diameter apparens Solis cum Newtono assumatur 32′12″, diameter Terræ e Sole visa, quæ est dupla parallaxis Solis, statuatur 21″, erunt diametri Terræ, & Solis inter se quam proxime ut 109:10000, quemadmodum Newtonus statuit. Hisce autem positis si ratio massarum Solis, & Terræ ut antea sit 1:0.00000516558, erit ratio densitatum 10000: 39889. Newtonus posita Telluris massa $\frac{1}{169282}$ rationem densitatum proxime eamdem eruit 1:4, quæ tamen ipsi prodire debuisset 1:4$\frac{1}{2}$ circiter. In quo cum dupliciter a Newtono erratum sit, ab ipso tamen recte adnotatum est rationem densitatum Solis, & Terræ manere eamdem in quavis alia parallaxeos Solis hypothesi. Minuitur enim semidiameter Terræ in ratione simplici, & massa Terræ in triplicata ratione parallaxeos imminutæ, densitas autem est directe ut massa, & reciproce ut cubus diametri.

III. Si elongatio maxima heliocentrica quarti Jovis Satellitis a Jove, sive semidiameter orbitæ ipsius Satellitis e Sole visa cum Cassino statuatur 8$\frac{1}{4}$′, & semidiameter orbitæ quarti Satellitis Saturni pariter visa e Sole 3′, tempora autem periodica Satellitis utriusque circa primarios, & primarii utriusque circa Solem assumantur eadem quæ supra, eodem processu calculi ratio massarum Solis, Jovis, & Saturni prodibit 1,0.0011113, 0.000303. Quod si insuper diametri Jovis, & Saturni e Sole visæ statuantur 37″, & 16″, ac propterea diametri Solis, Jovis, & Saturni sint inter se quam proxime ut 10000,997,791, quemadmodum etiam Newtonus statuit prodibit ratio densitatum 100, 112$\frac{1}{4}$, 61$\frac{1}{3}$. Sic Jupiter densior erit quam Sol, & Sol densior quam Saturnus, Terra autem quadruplo fere densior quam Sol ipse. Newtonus assumpta elongatione maxima heliocentrica Satellitis

tis extimi circumjovialis 8′ 16″, & quarti Satellitis Saturni 3′ 4″ rationem maſſarum ſtatuit 1000000,937,331, denſitatum 100,94.$\frac{1}{2}$, 67.

SCHOLION.

Tribus prioribus theorematis ea fere omnia complexi ſumus, quæ Hugenius, Newtonus, Keillius, aliique de legibus circularis motus tradiderant. In hoc autem priore problemate eaſdem formulas explicavimus, quas Newtonianæ Philoſophiæ Interpretes le Seur, & Jacquier tradiderant in notis ad Propoſ. VIII. Lib. III. Princip. In corollariis denique poſterioribus arithmeticos quoſdam Newtoni lapſus emendavimus. Alios inferius indicabimus cum de figura Terræ, & Lunæ, aliiſque pluribus ad cœleſtem phyſicam ſpectantibus agendum erit. Modo a prioribus hiſce circularis motus notionibus ad generales curvilinei motus formulas, atque ad peculiares leges corporum in ſectionibus conicis motorum conſiderandas tranſeamus.

CAPUT SECUNDUM.

DE MOTU QUOLIBET CURVILINEO.

THEOREMA IV.

SI corpus aliquod data velocitate ſemel projectum urgeatur viribus centripetis quibuſcumque tendentibus ad puncta quilibet *S*, *V*, *O* &c., fig. 6., poſita in eadem recta *CB*, radiis ad duo quælibet puncta *C*, & *B* ductis, deſcribet ſolida proportionalia temporibus: & viciſſim ſi hæc ſolida ſint proportionalia temporibus, vires corporis dirigentur ad puncta *S*, *V*, *O* &c datæ alicujus rectæ *CB*.

Dividatur tempus in quotlibet æquales partes, & prima temporis parte deſcribat corpus rectam *AQ*. Idem ſecunda temporis parte, ſi nihil impediret, pergeret ad *T* deſcribens rectam *QT* æqualem rectæ *AQ*; adeoque radiis *AB*, *AC*, *QB*, *QC*, *TB*, *TC* ductis ſolida *QCBA*, *QCBT* ejuſdem baſis *QCB*, ejuſdemque altitudinis æqualia eſſent inter ſe. Quod ſi viribus quibuſcumque accedentibus, quæ tendant ad puncta quælibet *S*, *V*, *O* &c. ejuſdem rectæ *CB*, corpus

retrahatur a tramite QT, compofita actio omnium virium erit in plano QBC, & poft finem fecundi temporis perveniet corpus ad locum D, & recta TD parallela erit plano QCB, & folida $QCBT$, $QCBD$ ejufdem altitudinis, & bafis QCB erunt inter fe æqualia. Simili modo manifeftum fiet aliis æqualibus temporis partibus folida æqualia circa eadem puncta defcribi a corpore. Unde fi numerus partium temporis, & rectarum AQ, QD augeatur ultra quofcumque limites, femita $AQDH$ ultimo abibit in lineam curvam, & corpus continuis viribus impulfum circa puncta C, & B defcribet folida proportionalia temporibus.

Viciffim fi hæc folida $QCBA$, $QCBD$ æqualibus temporibus defcripta fint æqualia, recta TD parallela erit plano QCB, adeoque corpus urgebitur viribus tendentibus ad puncta aliqua ejufdem lineæ rectæ CB.

COROLLARIA.

I. Si corpus aliquod ad duo puncta C, B perpetuo urgeatur viribus quibufcumque, & projiciatur quacumque cum velocitate fecundum quamcumque rectam, circa duo eadem puncta defcribet folida proportionalia temporibus: atque ita cum Luna in Terram fimul, ac Solem gravitet, folida, quæ circa lineam jungentem centra & Terræ, & Solis a Luna defcribentur, erunt temporibus proportionalia: quod olim theorema a Machinio traditum fuerat in opufculo de Lunæ motibus, nec nifi peculiarem cafum exhibet theorematis hujus noftri.

II. Si corpus juxta rectam AQ impulfum unica vi urgeatur tendente ad unicum punctum C, peculiaris alius cafus habebitur, & triangula QCA, TCQ, DCQ, quorum duo prima æqualem bafem, & eamdem habent altitudinem, duo alia fupra eamdem bafem CQ, & intra parallelas lineas CQ, DT conftituuntur, æqualia erunt inter fe, imminutifque ultra quemcumque limitem temporis partibus area QCq, fig. 7., quæ dato tempore circa centrum virium C defcribetur, data erit, & in eodem femper manebit plano, atque ad aliam quamcumque aream QCD fe habebit ut tempus, quo arcus Qq percurritur, ad tempus quo percurritur arcus QD: nimirum areæ, quas corpora viribus centripetis ad datum punctum tendentibus defcribent,

in

in planis immobilibus consistent, atque erunt temporibus proportionales, & vicissim: quod est theorema primum Lib. I. Princip. Newtoni.

III. Cum igitur Planeta quisque Primarius, & Cometæ etiam singuli circa Solem describant areas proportionales temporibus, duplici vi motus omnium absolvetur, scilicet vi projectili, ac centripeta, & vis projectilis dirigetur juxta tangentem orbitæ cujusvis descriptæ circa Solem, vis autem centripeta dirigetur ad Solem ipsum: & cum Luna circa Terram, & Satellites alii circa Primarios suos se se volvendo servent eamdem legem temporum, & arearum, præter communes Primariorum vires, aliam Satellites habebunt vim projectilem, aliamque pariter vim centripetam, quæ ad Primarios ipsos dirigetur: quod præcipuum, & fœcundissimum inventum est a Newtono ex Kepleri observationibus, atque ex recta curvilineorum motuum consideratione derivatum.

IV. Si qM, CP sint perpendicula ex puncto q in vectorem radium CQ, atque ex virium centro C in tangentem QO ducta, ac punctis Q, q coeuntibus vocetur A duplum areæ QCq, erit $A = QC \cdot qM = CP \cdot Qq$, sive erit $Qq = \frac{A}{CP}$, & cum dato tempore data sit area QCq, velocitas absoluta, qua percurretur arcus Qq, erit reciproce ut perpendiculum CP ex centro in tangentem ductum. Velocitas autem angularis, quæ scilicet ex angulo circa centrum C descripto metitur, erit reciproce in duplicata ratione vectoris radii QC: etenim punctis Q, q coeuntibus erit angulus QCq directe ut qM, & reciproce ut QC, atque ob $qM = \frac{A}{QC}$, erit angulus $QCq = \frac{A}{QC^2}$.

V. Si vim, quæ tendit ad centrum C, imminui per gradus singulos, ac demum evanescere intelligamus, corpus per lineam rectam QqR excurrendo æqualibus temporibus æqualia spatia Qq describeret, & dato tempore area QCq data erit, ductoque ex C in QqR perpendiculo CR erit $QCq = \frac{1}{2} QC \cdot qM = \frac{1}{2} Qq \cdot RC$, & qM circularis motus, qua angulus QCq circa punctum quodcumque C describitur, erit reciproce ut QC, atque idem semper in punctis singulis rectæ QR erit productum massæ, velocitatis circularis qM circa punctum C conceptæ, & distantiæ ab eodem puncto QC: quod productum Daniel Bernoul-

 lius

lius Tomo primo Academiæ Berolinensis momentum circularis motus appellavit.

PROBLEMA II.

Iisdem positis exhibere generales formulas vis centripetæ.

Si in fig. 7. sit qO vectori radio QC parallela, quo tempore describetur area QCq, corpus ob vim projectilem spatio QO excurret per tangentem, atque ob vim centripetam spatio qO, vel Qm a tangente retrahetur. Et quia coeuntibus punctis Q, q radii vectores QC, qC, & vires centripetæ in quavis distantiarum ratione agentes in punctis ipsis æquales fiunt; corpus a tangente retrahetur motu uniformiter accelerato, & quo tempore describetur area QCq eam velocitatem acquiret corpus, qua uniformiter continuata duplum spatium Qm æquali tempore æquabiliter absolvi posset. Dato igitur tempore vis centripeta, juxta Coroll. I. Probl. X. Lib. I. Mechanicæ, debebit esse ut duplum sagittæ Qm, quæ chordam qo tangenti parallelam bisecat in puncto m, & convergit ad centrum virium. Jam vero si sit BQ radius circuli transeuntis per puncta q, Q, o, ac fiat radius hujusmodi $= R$, radius vector $QC = X$, & perpendiculum $CP = P$, erit intercepta $Qn : Qm = qM : qm = P : X$, eritque ex natura circuli $Qn = \frac{qn^2}{2R} = \frac{qm^2}{2R}$. Itaque ob $qm = qQ = \frac{A}{P}$, erit vis centripeta $2Qm = \frac{2Qn.X}{P} = \frac{A^2.X}{R.P^3}$.

At insuper si vis omnis centripeta vocetur G, eaque ut dirigitur ad centrum C resolvatur in binas alias, quarum una secundum tangentem QP agat, altera sit tangenti perpendicularis in puncto Q, erit vis qua juxta tangentem orbitæ corpus sollicitabitur $\frac{G.QP}{QC} = \frac{G.QM}{Qq}$. Cum igitur juxta generales formulas alias problematis decimi jam memorati velocitas in elementum suum ducta æquari debeat vi acceleratrici ductæ in elementum spatii, si projectionis velocitas vocetur V, & negative accipiatur elementum spatii $-dX$, fiet eadem vis centripeta $G = \frac{VdV}{-dX}$.

COROLLARIA.

I. Quia punctis Q, q coeuntibus spatium Qq æquabili motu absolvi debet, in motu autem æquabili velocitas proportionalis est spatio, quod dato tempore absolvitur, si fiat $Qq = V = \frac{A}{P}$, elementis sumptis erit $dV = -\frac{A.dP}{P^2}$; ac fiet $G = \frac{VdV}{-dX} = \frac{A^2.dP}{P^3 dX}$: quam formulam proposuit primum Keillius in Transact. Philosoph. num. 417., ac deinde in secunda dissertatione de legibus virium centripetarum alia ratione demonstravit. Priorem illam formulam $G = \frac{A^2.X}{R.P^3}$ proposuit primum Abrahamus de Moivré initio Lib. VIII. Miscellaneorum Analyticorum, ac deinde alia ratione demonstravit Joannes Bernoullius in actis Parisiensis Academiæ anni 1710.

II. Si fiat $Qq = dS$, & $qM = dZ$, erit $P = \frac{X.dZ}{dS}$, sumptoque elemento dP, & substitutione facta habebitur alia vis centripetæ expressio, quam protulerant Varignonius in Actis Parisiensibus anni 1701, & 1706. Illa autem expressio cum in denominatore, & numeratore fractionis differentialia quarti ordinis involvat tanto fit complicatior, & usus difficilioris. Newtonus, qui problemata hæc omnia primus resolvit, a simplicissimis formulis exorsus, valorem sagittæ Qm in sectionibus conicis, ac curvis aliis directe supputavit. Videbimus in capitulo subsequente ad simplicem, atque elegantem horum problematum solutionem sufficere primariam illam, ac generalem motuum variabilium formulam $VdV = -G.dX$.

III. Si binæ virium centripetarum formulæ $\frac{A^2.X}{R.P^3}$, & $\frac{A^2.dP}{P^3.dX}$ exæquentur inter se invicem fiet $R = \frac{X.dX}{dP}$, & alia habebitur formula radii osculatoris in curvis omnibus ad focum aliquem relatis. Ea etiam radii osculatoris expressio directe exhiberi posset si intelli-

telligamus in puncto q duci tangentem aliam, quæ cum priore tangente QP constituet angulum angulo QBq æqualem. Erit enim $R : Qq = QP : dP$, & $QM : Qq = QP : CQ$, adeoque $Qq . QP = R . dP = X . dX$. At vero hæc etiam radii osculatoris expressio, cum elementa vectoris radii, & perpendiculi in tangentem demissi involvat, difficilioris erit usus quam quæ ex curvæ coordinatis ad axem alique relatis deduci solet.

THEOREMA V.

Si plura corpora in diversis curvis eadem vi centripeta ad idem centrum tendente revolvantur, eorumque velocitates in casu aliquo distantiarum æqualium a centro æquales fuerint inter se, eæ etiam in aliis omnibus distantiis æqualibus erunt inter se æquales.

Si duo corpora duas curvas AQH, aRh, fig. 8, describant circa idem virium centrum C, & in æqualibus a centro distantiis vires centripetæ agant æqualiter, accipiaturque $CQ = CR$, & radiis CQ, Cq describantur circulares arcus QR, $qMrm$, adeoque sit $Rm = QM, = - dX$, atque insuper si projectionis velocitates in punctis Q, & R vocentur V, & U, ob gravitatem acceleratricem utrobique æqualem erit $- G . dX = VdV = UdU$, sive erit $dV : dU = U : V$, nimirum in æqualibus distantiis a centro virium incrementa velocitatum erunt totis velocitatibus reciproce proportionalia. Quod si igitur in binis locis quibuslibet Q, & R a centro virium æque dissitis duorum corporum velocitates æquales fuerint, ibidem etiam incrementis omnibus, aut decrementis æqualibus simul sumptis totæ velocitates projectionis in aliis omnibus distantiis æqualibus a centro erunt inter se æquales.

COROLLARIA.

I. Si deflexio a tangente in curva aliqua per gradus singulos sic minuatur ut curva in lineam rectam degeneret transeuntem per centrum virium, & in ea corpus aliquod ascendat, aut descendat, corpus autem aliud aut filo suspensum oscilletur, aut alia ratione aliqua lineam aliquam curvam describat, & in casu aliquo distantiarum æqualium a centro velocitates duorum corporum æquales fuerint, in aliis etiam di-

distantiis omnibus æqualibus velocitates æquales erunt: quod eximium theorema alia ratione primum Newtonus in Propos. XL. L. lib. Princip., alia deinde Joannes Bernoullius in actis Parisiensis Academiæ anno 1710. demonstravit: ita autem facillime theorema ex generali illa motuum variabilium formula videtur colligi.

II. Si corpus ex altitudine A supra centrum libere descendere incipiat, & in distantia R a centro gravitas vocetur G, in alia autem qualibet distantia X sit gravitas $\frac{G.R^m}{X^m}$, erit velocitas corporis per rectam lineam decidentis $\sqrt{\left(\frac{2G.R^m}{m-1}\right)}\sqrt{\left(\frac{1}{X^{m-1}} - \frac{1}{A^{m-1}}\right)}$, ut in Probl. XI. Lib. I. Mechanicæ dictum est. Itaque hæc etiam erit velocitas corporis, quod ex altitudine A primum moveri cœperit, quodque aut filo suspensum oscilletur, aut in curva aliqua libere moveatur, & ad distantiam eamdem X a centro motus pervenerit. Varignonius in Actis Parisiensis Academiæ anni 1719 abstractum etiam casum considerare voluit quod massæ non sint ponderibus proportionales, & vires acceleratrices duorum corporum in æqualibus distantiis a centro non sint æquales.

III. Data autem velocitate corporis ad quamlibet distantiam a centro in qualibet curva proposita delati, & data æquatione curvæ, elementum arcus per velocitatem eamdem dividendo habebitur expressio temporis, quo elementum quodvis absolvetur, & summas omnium accipiendo dabitur tempus, quo a data distantia a centro corpus ad datam aliam distantiam perveniet. Id figurarum rectilinearum quadraturis Geometrice determinavit Newtonus in Propos. XLI. Lib. I. In casu autem quovis proposito ut figurarum areæ, aut summæ illæ accipiantur, definianturque descensuum tempora semper summatoriis calculis erit opus. Nos aliis abstractis casibus centripetarum virium omissis legem præcipuam virium quadratis distantiarum reciproce proportionalium, & casum corporum in sectionibus conicis motorum distincte hic evolvemus.

SCHOLION.

In evolvendis legibus corporum sectionem aliquam conicam describentium sintheticam methodum authores alii secuti sunt, quos inter

ter

ter primum recenseri debet Newtonus, analyticam methodum alii quos inter eminet Eulerus. Nos in hisce omnibus tradendis analysi sinthesim præferemus non solum quod elegantius, verum etiam tanto brevius, ac simplicius leges corporum in sectionibus conicis motorum sinthetice tradi possint. Proprietates autem omnes, quæ sparsim, ac diversimode a diversis authoribus recensentur, Newtono, Moivreo, Stewarto, aliisque ita simul colligemus ut cum nihil novi hacce in re diuturnis summorum Mathematicorum studiis adjungi possit, omnia in unicam veluti tabulam conjecta invenire studiosus lector, atque inter se facile possit comparare.

CAPUT TERTIUM.

DE MOTU CORPORUM IN SECTIONIBUS CONICIS.

THEOREMA VI.

Si corpus in sectione conica AQH moveatur, fig. 9., & 10., ac vis centripeta tendat ad focum C, velocitas in quolibet puncto Q erit directe in ratione simplici areæ eodem tempore descriptæ, & in ratione subduplicata distantiæ QF a superiore foco F, ac reciproce in ratione simplici semiaxis conjugati, & in ratione subduplicata distantiæ a foco C.

Si in puncto quocumque Q sectionis conicæ HQq ducatur tangens QK, atque in ipsam ex focis C, F demittantur perpendicula FK, CP, junganturque CQ, FQ, erit $PC \cdot FK = OD^2$, ut in Coroll. III. Propos. XXX. & in Coroll. II. Probl. XXXIV. Algebræ dictum est. Cumque insuper æquales sint anguli FQK, CQP, & bina hujusmodi triangula similia, erit $FK = \frac{QF \cdot PC}{QC}$. Jam vero per Coroll. IV. Theor. IV. velocitas corporis in curva quacumque moti in puncto quocumque Q exprimi debet dupla area QCq, quæ dato

dato tempore describitur, per perpendiculum PC divisa. Quod si igitur duplum areae QCq ut antea vocetur A, erit velocitas corporis in sectione conica moti $\frac{A}{PC} = \frac{A.FK}{OD^2} = \frac{A.QF.PC}{OD^2.QC}$, & $\frac{A^2}{PC^2} = \frac{A^2.QF}{OD^2.QC}$, adeoque erit velocitas eadem $\frac{A}{PC} = \frac{A}{OD}\sqrt{\left(\frac{QF}{QC}\right)}$.

COROLLARIA.

I. In vertice H sectionis conicae erit quadratum velocitatis $\frac{A^2}{OD^2}.\frac{AC}{HC}$: & quia velocitas radio vectori perpendicularis, per Coroll. IV. Theor. IV. est reciproce ut distantia, fiet quadratum perpendicularis velocitatis in loco $Q = \frac{A^2.AC.HC}{OD^2.CQ^2} = \frac{A^2}{CQ^2}$, ac praeterea $\frac{A^2}{CQ^2}$ exprimet quadratum velocitatis ipsius perpendicularis divisum per distantiam loci propositi a foco: quod cum aequetur duplae sagittae circularis arcus ad eamdem distantiam dato tempore descripti: dupla vero sagitta exprimat vim centripetam, qua idem circularis arcus describi posset: & cum denique vis centripeta in circulo aequalis sit vi centrifugae, qua scilicet sibi relictum corpus juxta tangentem excurrendo a peripheria circuli recederet; erit $\frac{A^2}{CQ^2}$ vis omnis, qua corpus in ellipsi motum nitetur directe a foco ellipseos recedere.

II. Cum sit $QF = HA \mp QC$, erit etiam $\frac{A^2}{CP^2} = \frac{A^2.HA}{OD^2.QC} \mp \frac{A^2}{OD^2}$; aut si latus rectum principale $\frac{4OD^2}{HA}$ sectionis conicae vocetur L, erit quadratum totius velocitatis in puncto quocumque $Q = \frac{4A^2}{L.QC} \pm \frac{4A^2}{L.HA}$, superiore signo ad ellipsim, inferiore ad hyperbolam pertinente, & si foco F longius abeunte evanescat posterior terminus, & ellipsis desinat in parabolam, fiet ultimo quadratum idem velocitatis $= \frac{4A^2}{L.QC}$.

III. Patet autem quod si cuipiam quantitati data lege variabili dematur, addaturve quantitas quæpiam constans, differentia, aut summa duarum quantitatum variabitur in ratione majore, aut minore, quam prior illa quantitas variaretur. Cum igitur in ellipsi, & hyperbola sit quadratum velocitatis $\frac{4A^2}{L.QC} \mp \frac{4A^2}{L.HA}$, & in parabola sit $\frac{4A^2}{L.QC}$; erit velocitas in parabola in ratione reciproca subduplicata distantiæ a foco illo, ad quem tendit vis, & in ellipsi magis, in hyperbola vero minus variabitur velocitas, quam pro ratione ipsa subduplicata: quod erat Coroll. VI. Propos. XVI. Lib. I. Princip. Mathem. Newtoni.

THEOREMA VII.

Si corpus in sectione conica moveatur, & vires centripetæ ad focum tendant; erunt vires ipsæ centripetæ in ratione composita ex duplicata directa areæ dato elemento temporis descriptæ, ex reciproca simplici semilateris recti principalis, & reciproca duplicata distantiarum ab eodem foco.

Theorema hoc fœcundissimum pluribus modis ex antecedentibus aliis theorematis potest colligi. Omnium autem simplicissimus videtur esse, quod si projectionis velocitas vocetur V, & sit radius vector $CQ = X$, per Coroll. II. Theor. VI., erit $V^2 = \frac{4A^2}{L}\left(\frac{1}{X} \mp \frac{1}{HA}\right)$, & sumptis utrimque elementis erit $VdV = -\frac{2A^2.dX}{L.X^2}$. Jam vero si vis centripeta vocetur G, juxta formulam posteriorem Probl. II. debebit esse $VdV = -G.dX$. Itaque exæquatis terminis fiet $G = \frac{2A^2}{L.X^2}$. Id ipsum ex priore formula colligetur si ex Probl. XXXII. Algebræ loco radii osculatoris assumatur quadruplus cubus normalis per quadratum lateris recti divisus, atque ex analogia Coroll. V. Probl. XXX. normalis statuatur quarta proportionalis ad perpendiculum ex foco in tangentem demissum, ad vectorem radium, & ad dimidium latus rectum principale. Fiet enim $R = \frac{1}{2}L . \frac{X^3}{P^3}$, & $G = \frac{2A^2}{L.X^2}$. Quæ vis centri-

petæ

petæ expreſſio cum minime pendeat ex quantitate axis tranſverſi, aut conjugati, in hyperbola, & in ellipſi qualibet habebit locum, atque ubi etiam, aucto ſemper axe tranſverſo, ellipſis in parabolam vertatur: & univerſim in quavis ſectione conica vis centripeta æquabitur duplo quadrato areæ, quæ dato tempore deſcribitur, diviſo per latus rectum principale, & per quadratum diſtantiæ corporis a foco.

COROLLARIA.

I. Si a quantitate hac vis centripetæ ſubducatur valor vis centrifugæ in Coroll. I. Theor. VI. antea inventus, fiet vis utriuſque differentia $\frac{A^2}{CQ^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}L} - \frac{1}{CQ}\right)$: nimirum vis centripeta erit potior quouſque CQ major erit quam $\frac{1}{2}L$. Et quia ſemiordinata per focum tranſiens æquatur ſemilateri recto principali; corpus e maxima diſtantia a foco, ſive e ſumma apſide digreſſus accelerabitur ſemper juxta vectorem radium quouſque radius ipſe fiet axi perpendicularis, ibique velocitas deſcenſus fiet maxima, ac deinde motus juxta vectorem radium conceptus retardabitur ſemper uſque ad imam apſidem, atque ibi extinguetur velocitas omnis deſcenſus, & corpus contrariis gradibus a foco recedere incipiet: atque ita patebit phyſica acceſſus totius ad focum, & ſucceſſivi receſſus ratio.

II. Si QE ſit ſpatium illud, per quod corpus libere decidendo ea vi centripeta, quam in Q habet, aucta in ratione duplicata imminutæ diſtantiæ a foco, velocitatem projectionis acquireret, & in diſtantia illa a foco, quæ exprimitur unitate, vis centripeta ut antea ſit $\frac{2A^2}{L}$, juxta Theor. XIV. Lib. I. Mechanicæ, erit $V^2 = \frac{4A^2 . QE}{L.QC.EC}$: cumque per ſuperius theorema ſit etiam $V^2 = \frac{A^2 . QF}{OD^2 . CQ} = \frac{4A^2 . QF}{L.HA.CQ}$, binis valoribus inter ſe æquatis fiet $\frac{QE}{EC} = \frac{QF}{HA}$, productaque CQ in L ut ſit $QL = QF$, $CL = HA$, erit $CL : QL = EC : QE$; & $CQ + 2QL : QL = CQ : QE$.

 In

III. In hyperbola cum ſit HA minor quam QF, erit etiam EC minor quam QE, & corpus eadem vi centripeta, quam in Q habet, aucta in ratione duplicata diſtantiæ imminutæ, per dimidiam altitudinem QC cadendo non adhuc velocitatem illam concipiet, qua projicitur in loco Q. In ellipſi cum ſit HA major quam QF, erit etiam EC major quam QE, & corpus antequam per dimidium radium vectorem decidat, acquiret ſuæ projectionis velocitatem. Sed ſi ſuperiore ellipſeos foco F longius abeunte ellipſis in parabolam degeneret, erit $HA = QF$, & $EC = QE$: nimirum corporis in parabola moti ea erit velocitas in puncto Q, quæ per dimidium vectorem radium cadendo abſolutæ vis centripetæ actione acquiri poſſet: quæ ſingulares proprietates corporum in ſectionibus conicis motorum a Stewarto primum traditæ fuerant, ac ſingillatim demonſtratæ in Propoſ. VI., VII., & VIII. Tractatus tertii Phyſico-Mathematici.

IV. Si vero QE ſit ſpatium, per quod corpus libere decidendo, ea vi centripeta, quam in Q habet, uniformiter ſemper agente projectionis velocitatem poſſet acquirere, erit $V^2 = 2G.QE = \frac{4A^2.QE}{L.CQ^2}$ $= \frac{4A^2.QF}{L.HA.CQ}$, & producta CQ in L ut ſit $QL = QF$, erit $HA:QF = CL:QL = QC:QE$, & $CL:QC = QC:CE$, ſcilicet in ellipſi punctum E ut antea acceptum cadet intra Q, & C, in parabola coincidet cum foco C, & in hyperbola cadet ultra focum: quas ſingulares alias proprietates Cl. Boſcovich primum tradidit in Propoſ. I. de Inæqualitatibus Jovis, & Saturni.

V. Eſt vero $PC^2 = \frac{OD^2.QC}{QF} = \frac{L.HA.QC}{4QF}$. Itaque erit $PC^2:QC^2 = \frac{L.HA}{4QF}:QC = \frac{1}{4}L:\frac{QF.QC}{HA} = \frac{1}{4}L:QE$, ſcilicet altitudo illa, per quam corpus ſua vi centripeta libere decidendo projectionis velocitatem acquireret, erit quarta proportionalis ad PC^2, CQ^2, & $\frac{1}{4}L$: quod ſingulare theorema Cl. Franciſcus Zanottus tradidit ad calcem Cap. III. de Viribus Centralibus. Inde autem patet in vertice ſectionis conicæ ob $PC = QC$, velocitatem proje-

ctionis

ctionis eam eſſe, quæ acquiri poſſet cadendo per quartam partem lateris recti principalis, & in vertice minoris axis ellipſeos D, ob $PC = DO$, & $QC = HO$, atque inſuper $DO^2 : HO^2 = L : HA$, eam eſſe velocitatem, quæ acquiri poſſet cadendo per quartam partem majoris axis. In parabola vero univerſim erit $\frac{1}{4} L = \frac{PC^2}{QC}$.

THEOREMA VIII.

Viciſſim ſi vires corporis centripetæ ſint inter ſe reciproce ut quadratum diſtantiæ a puncto aliquo; corpus data cum velocitate ſecundum datam rectam projectum ſectionem conicam circa illud punctum veluti focum deſcribet.

Nam ſi detur velocitas projectionis, & quantitas vis centripetæ in puncto Q verſus C, dabitur etiam altitudo QE, per quam corpus libere decidendo eadem invariabili vi centripeta velocitatem eamdem ſibi compararet. Tum ſi data ſit projectionis directio KQP, & ſit CL tertia proportionalis ad CE, & CQ, ducaturque perpendiculum LK, quod tantundem producatur in F, ut fiat $LK = KF$, focisque C, F, & axe tranſverſo HA, qui ſummam duarum CQ, QL exæquet ſi QE minor fuerit quam QC deſcribatur ellipſis HQA, fig. 9., quod ſi vero QE major fuerit, axe tranſverſo HA, qui exæquet differentiam duarum QL, QC, deſcribatur hyperbola HQ, fig. 10., tranſibit utraque ſectio conica per punctum Q, & a recta KQP tangetur. Quod ſi autem fuerit $QE = QC$, centroque C, ac radio CQ ducatur circularis arcus, qui ſecet tangentem QP in K, fig. 11., atque in recta KC accipiatur CH tertia proportionalis ad QC, & PC, ac foco C, vertice H, latere recto principali $4CH$ deſcribatur parabola HQ; eadem pariter a recta QP tangetur. Jam vero ſi corpus aliquod in alterutra ex tribus hiſce conicis ſectionibus moveretur, haberet vires reciproce proportionales quadratis diſtantiarum QC, & in puncto Q velocitatis directionem haberet QP, quantitatemque velocitatis, juxta poſtrema duo corollaria, haberet illam, quæ cadendo per altitudinem QE, eadem vi centripeta, quæ in Q agit, acquiri poſſet. Itaque etiam corpus propoſitum, eadem vis centripetæ lege, ac quantitate, eademque quantitate, ac directione vis projectilis eamdem ſectionem conicam deſcribet. CO-

COROLLARIA.

I. Cum igitur viribus decrefcentibus in duplicata ratione auctarum diftantiarum fectio aliqua conica femper defcribi debeat, data velocitate projectionis agnofcetur facile quæ fectio conica debeat effe, prout fcilicet altitudo illa, per quam libere decidendo, motu uniformiter accelerato, eademque femper vi centripeta projectionis velocitas acquiri poffet, minor, æqualis, vel major fuerit tota diftantia a centro virium: habebitur enim ellipfis in primo cafu, parabola in cafu altero, atque in tertio citerior ramus hyperbolæ. Et quidem in primo cafu ellipfis in circulum abibit fi altitudo illa diftantiæ totius dimidia fuerit: in cafu autem tertio fimili methodo colligetur ulteriorem etiam ramum hyperbolæ AT defcribi poffe, fig. 10., fi vires non tendant ad focum C, fed inde in adverfas partes recedant.

II. Si fit G centrum gravitatis, fig. 12., & PF, QE fint fpatia, quæ duo corpora P, & Q ad fe accedendo fimul percurrerent, ac PB, QC fpatia, quæ percurrerent parallelis projectionum directionibus, & fit $GP:GQ = PF:QE = PB:QC$, junctaque BGC, & completis parallelogrammis PD, QH corpora fimul perveniant in D, & H; ob æquales angulos GBD, GCH, & latera circa ipfos angulos proportionalia, erunt fimilia triangula GBD, GCH, & puncta D, G, H jacebunt in eadem linea recta, eritque $GD:GP = GH:GQ = DH:PQ$. Quare fi vires acceleratrices cujufque corporis fint reciproce ut quadratum diftantiæ unius ab altero, erunt itidem ut quadratum diftantiæ a centro gravitatis, & duo corpora ut fupra impulfa circa ipfum centrum veluti focum binas fectiones conicas defcribent.

III. Quia gravitatis centro quiefcente poft finem dati temporis duo corpora reperiuntur in directum femper cum centro ipfo, anguli a duobus corporibus fimul defcripti circa centrum fibi invicem æquales erunt: & quia infuper duo triangula GBP, GDP, itemque duo GCQ, GHQ parallelis lineis intercepta funt inter fe æqualia, unumquodque corpus circa gravitatis centrum defcribet areas temporibus proportionales. At fi fit $GP: GQ = PF:QE = PB:QC$, erunt vires acceleratrices duorum corporum, atque item projectionis velocitates directe ut diftantiæ a centro gravitatis, five reciproce ut

maffæ.

maſſæ. Duo igitur corpora ſe ſe trahentia circa centrum gravitatis ſectiones conicas, & areas proportionales temporibus deſcribent ſi vires centripetæ ſint maſſis attrahentibus proportionales, & ſi inſuper juxta directiones contrarias, & parallelas eæ projectionis velocitates impreſſæ fuerint, quæ eamdem pariter ſequantur maſſarum proportionem.

THEOREMA IX.

Velocitas corporis in quovis ſectionis conicæ puncto Q, fig. 9., eſt ad velocitatem, qua ad eamdem diſtantiam QC a foco C eadem vi centripeta circulus deſcribi poteſt, in ſubduplicata ratione diſtantiæ QF a ſuperiore foco F ad ſemiaxem tranſverſum ſectionis conicæ HO.

Per Coroll. IV. Theor. VII. corpore in ſectione conica moto viribus centripetis tendentibus ad focum C, & decreſcentibus in duplicata ratione auctarum diſtantiarum, ſi ſit QE ſpatium illud per quod libere decidendo eadem vi centripeta, quæ in Q agit, uniformiter ſemper agente projectionis velocitas acquiri poſſet, eſſet etiam $CL : 2QL = \frac{1}{2} QC : QE$. Sed per Theor. II. eſt $\frac{1}{2} QC$ altitudo illa, per quam corpus libere decidens, eadem vi centripeta, quæ in Q agit, velocitatem illam acquireret, qua circulum radii QC circa centrum virium C uniformiter poſſet deſcribere: & ſpatia, quæ eadem vi centripeta libere decidendo deſcribuntur, ſunt in ratione duplicata velocitatum acquiſitarum. Itaque erit quadratum velocitatis in puncto Q propoſitæ ſectionis conicæ ad quadratum velocitatis, qua circa virium centrum C, atque ad diſtantiam QC circulus uniformiter deſcribi poſſet, ut $QE : \frac{1}{2} QC = 2QL : CL = QF : HO$, velocitas ſcilicet in puncto Q ſectionis ejuſdem conicæ erit ad velocitatem in circulo deſcripto ad eamdem diſtantiam a centro virium in ſubduplicata ratione diſtantiæ QF a foco F ad ſemiaxem tranſverſum HO.

COROLLARIA.

I. Si velocitas in ſectione conica ad velocitatem in circulo ſe habeat ut $V:1$, erit $1 : \frac{1}{2} V^2 = CL : CL - QC$, atque inde eruetur $1 : 1 - \frac{1}{2} V^2 = CL : QC$. Quare foco F longius abeunte in parabola evadet $CL = CL - QC$, & $1 = \frac{1}{2} V^2$: in ellipſi eum puncta

cta C, Q, L ordine jaceant ad eamdem plagam erit $1 - \frac{1}{2} V^2$ quantitas positiva, eritque V^2 binario minor: in hyperbola vero, punctis Q, L jacentibus in adversas partes eum puncto C, erit V^2 major binario. Velocitas igitur in parabola erit ad velocitatem in circulo in subduplicata ratione binarii ad unitatem, in ellipsi minor, & in hyperbola major erit velocitas quam pro hac ratione: quod est Coroll. VII. Propos. Lib. XVI. Lib. I. Newtoni.

II. Et eum sit ut antea $PC^2 = \frac{L.HO.QC}{2QF}$, erit $QF:HO = \frac{1}{2} L.QC:PC^2$, & velocitas in sectione conica erit ad velocitatem in circulo descripto eadem vi, & ad eamdem distantiam a foco, ut media proportionalis inter distantiam ipsam QC, & semissem lateris recti principalis sectionis, ad perpendiculum PC demissum e foco in tangentem: in maxima autem, & minima a foco distantia, cum sit $QC = PC$, velocitas in sectione conica ad velocitatem in circulo se habebit in subduplicata ratione lateris recti principalis ad duplam communem distantiam: quod est Coroll. IX. ejusdem propositionis.

III. At si vires centripetæ sint inverse ut quadrata distantiarum erunt velocitates reciproce in distantiarum ratione subduplicata, per Coroll. III. Theor. I., & velocitates corporum radiis QC, & $\frac{1}{2} QC$ circulos describentium inter se erunt ut $1:\sqrt{2}$. Velocitas igitur in parabola æqualis erit velocitati corporis ad dimidiam distantiam circulum describentis, in ellipsi minor, & major in hyperbola. Pariter velocitas in sectione conica erit ad velocitatem in circulo, cujus radius sit $\frac{1}{2} L$, in ratione composita ex subduplicata $\frac{1}{2} L.QC:PC^2$, & subduplicata $\frac{1}{2} L:QC$, sive ut dimidium lateris recti principalis ad perpendiculum demissum e foco in tangentem.

IV. Quia tempora, quibus æquales anguli describuntur, sunt in ratione inversa angularium velocitatum, tempus quo exiguus arcus Hn, fig. 11., in parabola describi poterit, erit ad tempus, quo in circulo radii HC describi poterit angulus HCn ut $1:\sqrt{2}$. Tempus autem revolutionis integræ in circulo est ad tempus, quo exiguus arcus Hn describitur ut peripheria p ad arcum ipsum: tempus in circulari arcu ad tempus in parabola ut $\sqrt{2}:1$, & tempus, quo angulus HCn

in

parabola describitur, est ad tempus, quo angulus rectus circa focum a perihelio incipiendo describi potest, ut sector HCn ad aream parabolicam comprehensam abscissa CH, & perpendiculari ad axem erecta in foco C: ac posita $CH = 1$, parametro $= 4$, semiordinata $= 2$ est sector $HCn = \frac{1}{2} Hn$, & area parabolica $= \frac{4}{3}$. Quare compositis rationibus tempus integræ revolutionis in circulo radii HC erit ad tempus, quo Cometa aliquis angulum rectum circa Solem a perihelio incipiendo posset describere ut $1 : \frac{4\sqrt{2}}{3p}$.

V. Si sit CH radius mediocris terrestris orbitæ, & tempus revolutionis Terræ circa Solem vocetur T, radius vero ad peripheriam se habeat ut $1 : p$, erit $\frac{4T.\sqrt{2}}{3p}$ tempus, quo Cometa, aliquis in orbita parabolica, quæ distantiam perihelium haberet radio mediocri terrestris orbitæ æqualem, angulo recto a perihelii loco recederet, & posito anno sidereo $365^d 6^h 9' 13''$, tempus, quo in eadem parabola angulus rectus circa Solem a perihelio incipiendo describi posset, perductis longius numerorum $\sqrt{2}$, & p approximationibus invenietur esse $109^d 14^h 46' 13''$: & tempus hujusmodi augendo, aut minuendo in ratione areæ descriptæ exhiberi poterit tabula omnium temporum, quæ cuicumque alio anomaliæ angulo respondebunt.

THEOREMA X.

Si duo corpora Q, & R, fig. 8., circa idem virium centrum C describant sectiones conicas QH, Rh, velocitates in distantiis CQ, CR erunt directe in ratione subduplicata laterum rectorum principalium, & reciproce in ratione simplici perpendicularium CP, Cp ex foco in tangentes dimissarum: areæ vero QCq, RCr eodem tempore descriptæ erunt in ratione dumtaxat subduplicata eorumdem laterum.

Etenim per Coroll. II. theorematis antecedentis velocitas in puncto Q sectionis conicæ QH est ad velocitatem corporis radio CQ circa C circulum describentis in ratione subduplicata $\frac{1}{2} L . QC : CP^2$. Velocitas autem in circulo radii QC est ad velocitatem in circulo radii RC in ratione subduplicata $RC : QC$. Atque insuper si latus rectum principale sectionis conicæ Rh vocetur l, velocitas corporis in circulo radii RC erit ad velocitatem in puncto R sectionis coni-

cæ Rh in ratione pariter ſubduplicata $pC^2 : \frac{1}{2} l . RC$. Quare compoſitis rationibus velocitates in punctis Q, & R ſectionum conicarum inter ſe erunt in ratione ſubduplicata $L . pC^2 : l . PC^2$, ſive in ratione ſubduplicata $L : l$, & ratione ſimplici $pC : PC$. Sunt autem velocitates ut ſpatia Qq, Rr percurſa eodem tempore : & areæ QCq, RCr ſunt ut $Qq . PC : Rr . pC$. Itaque areæ eodem tempore in duabus ſectionibus conicis deſcriptæ circa idem centrum inter ſe erunt in ratione dumtaxat ſubduplicata laterum rectorum principalium L, l.

COROLLARIA.

I. Latera recta principalia ſectionum erunt in ratione duplicata perpendiculorum ſimul, ac celeritatum : & ſi latera recta ſint æqualia, velocitates in diverſis ſectionibus conicis, perinde ac in ſectione eadem, erunt reciproce ut perpendicula. In maximis, aut minimis a foco diſtantiis, cum perpendicula ſint ipſæ diſtantiæ maximæ, aut minimæ, erunt velocitates corporum diverſas ſectiones conicas deſcribentium in ratione compoſita ex ſimplici diſtantiarum inverſe, & ſubduplicata laterum principalium directe : quod eſt corollarium Propoſ. XIV. Newtoni.

II. Cum ſit $PC^2 = \frac{L . HO . QC}{2QF}$, & $QF = 2HO \mp QC$, erit $\frac{L}{2PC^2} = \frac{QF}{HO . QC} = \frac{1}{\frac{1}{2}QC} \mp \frac{1}{HO}$. Quo patet in diverſis etiam conicis ſectionibus habere locum theoremata, quæ in Coroll. III. Theor. VI. attigimus: nimirum in diverſis etiam parabolis circa eumdem focum deſcriptis erit velocitas in ratione ſubduplicata diſtantiæ a centro virium reciproce, & in diverſis ellipſibus magis, minus vero in diverſis hyperbolis variabitur velocitas, quam pro ratione eadem ſubduplicata reciproca diſtantiæ.

III. Areæ vero in diverſis conicis ſectionibus deſcriptæ temporibus quibuſcumque univerſim erunt in ratione ſimplici temporum, & ſubduplicata laterum principalium conjunctim. Quod ſi ſectiones conicæ ſint ellipſes, erit tota area ellipſeos in ſubduplicata ratione lateris recti principalis, & in ratione ſimplici periodici temporis conjunctim. Sed eſt tota eadem area proportionalis rectangulo axis

ma-

majoris, & minoris: & latus rectum principale æquatur quadrato minoris axis per majorem divifo. Rectangulum igitur majoris, & minoris axis ellipfeos erit directe in ratione compofita minoris axis, & temporis periodici, & reciproce in ratione fubduplicata majoris axis.

IV. In ellipfibus circa eumdem focum defcriptis tempora periodica erunt in ratione compofita ex fimplici, & fubduplicata majorum axium, five in ratione majorum axium fefquiplicata. Majores autem ellipfium femiaxes funt ipfæ diftantiæ mediocres a foco. In ellipfibus igitur circa eumdem focum defcriptis quadrata temporum periodicorum erunt ut cubi mediocrium diftantiarum: quæ motuum omnium cœleftium lex primaria ex obfervationibus a Keplero, a Newtono autem in Propof. XV. Lib. I. ex generali gravitatis lege deducta eft. Univerfim etiam æqualia erunt periodica revolutionum tempora in ellipfibus, quarum femiaxes minores æquentur inter fe, adeoque etiam in circulis, quorum radii æquentur femiaxibus majoribus ellipfium: & quæ pofita orbitarum circularium hypothefi in Probl. I. prodiit ratio maffarum Solis, Terræ, Jovis, & Saturni, ea etiam erueretur fi ellipticæ Planetarum orbitæ conftituantur.

V. Si fectiones conicæ fint parabolæ, & circa earumdem focos accipiantur anguli inter fe æquales, quia parabolæ omnes funt curvæ fimiles inter fe, ut in Coroll. V. Probl. XXX. Algebræ notatum eft, erunt etiam fimiles areæ, quæ æquales angulos ad focum fimiliter fubtendent, eruntque propterea eædem areæ in duplicata ratione laterum homologorum, five etiam laterum rectorum principalium. Cum igitur univerfim tempora fint ut areæ directe, & reciproce ut radices eorumdem laterum principalium; tempora quibus æquales parabolarum anguli defcribentur, erunt in ratione fefquiplicata laterum principalium, & quadrata temporum erunt ut cubi laterum.

SCHOLION.

Newtonus cum in Propof. XI., XII., & XIII. Lib. I. fingillatim demonftraffet vires centripetas, quæ ad focos tendunt, in orbitis parabolicis, ellipticis, & hyperbolicis effe reciproce ut quadrata diftantiarum ab iifdem focis, inde viciffim collegit quod fi vires centripetæ fint reciproce ut quadrata diftantiarum a puncto aliquo, corpora circa illud punctum veluti focum fectionem aliquam

conicam describet: quia scilicet dato umbilico, & puncto contactus, ac tangentis positione describi potest sectio conica, quæ in puncto illo habeat datam curvitatem: datur autem curvitas ex data vi centripeta, ac velocitate corporis: & orbes duo se mutuo tangentes eadem velocitate, eademque vi centripeta describi nequeunt. Quæ licet Joannes Bernoullius in Actis Parisiensis Academiæ anni 1710. singillatim demonstranda esse contenderit, videtur tamen inversi centripetarum virium Problematis solutionem ex directo Problemate manifeste colligi: data enim positione tangentis, velocitate, ac vi centripeta, data jam, ac determinata est omnis a tangente ipsa deflexio, ut in Theoremate octavo supra explicatum est. In postremo autem theorematis ejusdem corollario attigimus peculiarem conditionem, quæ debet adjici prioribus Propositionibus Sect. XI. Lib. I. Princip. Newtoni. Corpora nimirum se se attrahentia, & circa gravitatis centrum projecta ellipses circa idem centrum debent describere si projectionis directiones parallelæ sint, ac contrariæ, & velocitates insuper sint massis attrahentibus proportionales. Unde ex mutua Terræ, ac Lunæ attractione minime sequitur Terram etiam simul cum Luna circa commune gravitatis centrum revolvi, nisi Terra simul cum Luna in adversas partes directionibus parallelis initio projecta fuerit ea cum velocitate, quæ ad velocitatem projectionis Lunæ se habuerit ut massa Lunæ ad massam Terræ.

CAPUT QUARTUM.

DE VARIATIONIBUS MOTUS ELLIPTICI, ET DE ÆQUATIONE CENTRI.

PROBLEMA III.

Si corpus aliquod in ellipsi AQH moveatur, fig. 13., & detur angularis ipsius distantia a summa apside ellipseos A, invenire absolutam distantiam QC a foco C.

Si sit OA semiaxis major ellipseos, minor OD, excentricitas OC, juxta formulam Coroll. I. Probl. XXIX. Algebræ, initio a summa apside-

de A ducto erit $CQ = \frac{OD^2}{OA - OC.\text{cof.}ACQ}$. Fiat igitur $OA = 1$, $OC = \varphi$, $OD^2 = 1 - \varphi^2$, & angulus anomaliæ veræ ACQ vocetur ς: Erit radius vector orbitæ ellipticæ $CQ = \frac{1 - \varphi^2}{1 - \varphi.\text{cof.}\varsigma} = (1 - \varphi^2)$ $(1 + \varphi\ .\ \text{cof.}\ \varsigma + \varphi^2\ .\ \text{cof.}\ \varsigma^2 + \varphi^3.\text{cof.}\ \varsigma^3$ &c. Est autem cof. $\varsigma^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ .\ \text{cof.}\ 2\varsigma$, & cof. $\varsigma^3 = \frac{3}{4}\ .\ \text{cof.}\ \varsigma + \frac{1}{4}\ .\ \text{cof.}\ 3\varsigma$. Ita igitur pro variis potestatibus cosinus angularis distantiæ a summa apside substituendo cosinus angulorum multiplorum fiet radius idem vector $CQ = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + (\varphi - \frac{1}{4}\varphi^3).\text{cof.}\varsigma + \frac{1}{2}\varphi^2\text{cof.}2\varsigma + \frac{1}{4}\varphi^3\text{cof.}3\varsigma$ &c.

COROLLARIUM.

Si centro ellipseos longius abeunte ellipsis in parabolam vertatur, & parabolæ parameter exprimatur unitate, juxta formulam alteram Coroll. II. Probl. XXIX. erit in fig. 11. radius vector $CQ = \frac{2CH}{1 + \text{cof.}QCH} = \frac{CH}{(\text{cof.}\frac{1}{2}QCH)^2}$: adeoque in orbitis parabolicis erunt vectores radii in ratione simplici distantiæ foci a vertice, atque in ratione inversa duplicata cosinus dimidii anguli anomaliæ veræ QCH. Si fiat $CH = \frac{1}{4}$, & incipiendo ab ima apside angulus QCH vocetur ς, erit radius vector CQ parabolicæ ejusdem orbitæ $= \frac{\frac{1}{2}}{1 + \text{cof.}\varsigma} = \frac{1}{2}(1 - \text{cof.}\varsigma + \text{cof.}\varsigma^2 - \text{cof.}\ \varsigma^3$ &c.)

PROBLEMA IV.

Iisdem positis, & dato angulo anomaliæ veræ angulum anomaliæ mediæ invenire.

Si maneant omnia ut in Probl. III., & in fig. 13., quia radius circuli, cujus area æquatur toti areæ ellipseos, est medius proportionalis inter binos ellipseos semiaxes 1, & OD, assumendo $CT = \sqrt{OD} = \sqrt{1 - \varphi^2}$, & radio hujusmodi describendo circularem arcum TR; juxta ea, quæ initio hujus libri adnotavimus, erit anomalia

lia media proportionalis tempori, five etiam areæ ACQ, quæ per Theor. IV. augeri debet in eadem ratione temporis, & anomalia vera proportionalis erit angulo ACQ: atque ob ellipfeos, & circuli ita defcripti æqualitatem anomalia vera ad anomaliam mediam fe habebit ut fector circularis TCR ad aream ellipticam ACQ. Anomaliæ autem utriufque, & veræ, & mediæ incrementa inter fe erunt ut fectores quam minimi RCr, QCq, five etiam ut $CR^2 : CQ^2$. Quod fi igitur angulus TCR ut antea fit $c\zeta$, & angulus anomaliæ mediæ vocetur cZ, erit $cdZ = \frac{CQ^2 . c . d\zeta}{\surd(1-\varphi^2)}$, & quadrati CQ^2 valorem ex problemate antecedente affumendo fiet

$$dZ = \frac{CQ^2 . d\zeta}{\surd(1-\varphi^2)} = \frac{(1-\varphi^2)^{\frac{3}{2}} . d\zeta}{(1-\varphi . \text{cof.} c\zeta)^2}$$

$$= (1-\varphi^2)^{\frac{3}{2}} . d\zeta . (1 + 2\varphi . \text{cof.} c\zeta + 3\varphi^2 . \text{cof.} c\zeta^2 + 4\varphi^3 . \text{cof.} c\zeta^3 \text{ \&c.})$$

$$= d\zeta . (1 + 2\varphi . \text{cof.} c\zeta + \frac{3}{2}\varphi^2 . \text{cof.} 2c\zeta + \varphi^3 . \text{cof.} 3c\zeta \text{ \&c.}):$$

ac denique fingulis fummis acceptis fiet

$$Z = \zeta + \frac{2\varphi}{c} . \text{fin.} c\zeta + \frac{3\varphi^2}{4c} . \text{fin.} 2c\zeta + \frac{\varphi^3}{3c} . \text{fin.} 3c\zeta \text{ \&c.}$$

COROLLARIA.

I. Si negligatur quadratum excentricitatis, & motus progreffivus apfidum, differentia anomaliæ veræ, & mediæ erit $2\varphi . \text{fin.} \zeta = CF . \text{fin.} ACQ$: & fi ex F in CQ ducatur perpendiculum Fo, cum fit $\frac{Fo}{CF} = \frac{QZ}{CQ} = \text{fin.} ACQ$, erit differentia eadem $= Fo$: & quia anguli exigui proxime proportionales funt finubus, atque in ellipfi accedente proxime ad circulum cenferi poteft $QF = QC = 1$; differentia veræ, & mediæ anomaliæ erit quam proxime æqualis angulo CQF.

II. Quare cum angulus AFQ fit fumma duorum internorum ACQ, FQC, in ellipfibus proxime ad circulos accedentibus, ob $Z = \zeta + 2\varphi . \text{fin.} \zeta$, angulus ipfe AFQ proportionalis erit anomaliæ mediæ, feu tempori, quo arcus AQ defcribitur: hoc eft in ellipfi proxime

xime circulari ita feretur corpus, ut circa priorem focum C areas, & circa alterum focum F angulos describat proportionales temporibus: maxima vero duorum angulorum ACQ, FQC differentia æquabitur duplæ excentricitati per mediocrem distantiam divisæ: quod elegans Sethi Wardi theorema ad supputandam centri æquationem in orbita parum excentrica sufficeret.

III. Universim vero si motus apsidum nequeat negligi, & motus angularis absolutus ad angularem motum supputatum a summa apside se habeat ut $1 : c$, sive si absolutus motus sit ζ, anomalia vera $c\zeta$, motus medius Z, anomalia media cZ, quod locum haberet in ellipsi circa focum uniformiter mobili, in qua motus absolutus esset ad angularem progressum apsidum ut $1 : 1 - c$; erit differentia medii, & veri motus $\frac{2\varphi}{c} \cdot \sin. c\zeta + \frac{3\varphi^2}{4c} \cdot \sin. 2c\zeta + \frac{\varphi^3}{3c} \cdot \sin. 3c\zeta$ &c.

PROBLEMA V.

Data anomalia media invenire veram.

Juxta præcedentes formulas neglectis excentricitatis potestatibus plusquam cubicis, & transpositis terminis erit

$$c\zeta = cZ - 2\varphi \cdot \sin. c\zeta - \frac{3}{4}\varphi^2 \cdot \sin. 2c\zeta - \frac{1}{3}\varphi^3 \sin. 3c\zeta:$$

& si in expressione sinuum $c\zeta$, $2c\zeta$, $3c\zeta$ successive substituatur valor, qui ex hujusmodi serie colligitur, negliganturque inferiorum ordinum termini fiet

$$c\zeta = cZ - 2\varphi \cdot \sin. \left(cZ - 2\varphi \cdot \sin. c\zeta - \frac{3}{4}\varphi^2 \cdot \sin. 2c\zeta\right)$$
$$- \frac{3}{4}\varphi^2 \sin. (2cZ - 4\varphi \cdot \sin. c\zeta) - \frac{1}{3}\varphi^3 \cdot \sin. 3cZ$$
$$= cZ - 2\varphi \cdot \sin. \left(cZ - 2\varphi \cdot \sin. \overline{cZ - 2\varphi \cdot \sin. cZ} - \frac{3}{4}\varphi^2 \cdot \sin. 2cZ\right)$$
$$- \frac{3}{4}\varphi^2 \cdot \sin. (2cZ - 4\varphi \cdot \sin. cZ) - \frac{1}{3}\varphi^3 \cdot \sin. 3cZ.$$

Jam vero cum exigua sit quantitas $\varphi \cdot \sin. cZ$, juxta Coroll. I. Probl. LII. Algebræ erit

$$- 2\varphi \cdot \sin. (cZ - 2\varphi \cdot \sin. cZ) = - 2\varphi \cdot \sin. cZ + 4\varphi^2 \cdot \sin. cZ \cdot \cos. cZ,$$

ac

ac per Coroll. II. erit ſin. cZ . coſ. $cZ = \frac{1}{2}$ ſin. $2cZ$.

Quare productis aliis ſinuum, ac coſinuum reſolutis fiet

$$- 2\varphi \cdot \text{ſin.} \left(cZ - 2\varphi \cdot \text{ſin.} \overline{cZ - 2\varphi\ \text{ſin.}\ cZ - \tfrac{3}{4}\varphi^2 \text{ſin.}\ 2cZ}\right)$$

$$= - 2\varphi \cdot \text{ſin.} \left(cZ - 2\varphi \cdot \text{ſin.}\ cZ + \tfrac{5}{4}\varphi^2 \cdot \text{ſin.}\ 2cZ\right)$$

$$= - 2\varphi.\text{ſin.}cZ + 4\varphi^2.\text{ſin.}cZ.\text{coſ.}cZ + 4\varphi^3.\text{ſin.}cZ^2 - \tfrac{5}{2}\varphi^3.\text{ſin.}2cZ.\text{coſ.}cZ.$$

$$= - 2\varphi.\text{ſin.}\ cZ + 2\varphi^2.\text{ſin.}\ 2cZ + \tfrac{7}{4}\varphi^3.\text{ſin.}\ cZ - \tfrac{9}{4}\varphi^3.\text{ſin.}\ 3cZ.$$

Erit pariter $- \frac{3}{4}\varphi^2 \cdot$ ſin. $(2cZ - 4\varphi \cdot$ ſin. $cZ)$

$$= - \tfrac{3}{4}\varphi^2\ \text{ſin.}\ 2cZ + 3\varphi^3 \cdot \text{ſin.}\ cZ \cdot \text{coſ.}\ 2cZ$$

$$= - \tfrac{3}{4}\varphi^2 \cdot \text{ſin.}\ 2cZ - \tfrac{3}{2}\varphi^3.\ \text{ſin.}\ cZ + \tfrac{3}{2}\varphi^3\ \cdot \text{ſin.}\ 3cZ.$$

Atque ita terminis omnibus ſimul collectis erit

$$c\zeta = cZ - \left(2\varphi - \tfrac{1}{4}\varphi^3\right) \text{ſin.}cZ + \tfrac{5}{4}\varphi^2.\text{ſin.}2cZ - \tfrac{13}{12}\varphi^3.\ \text{ſin.}\ 3cZ + ,\&c.$$

COROLLARIA.

I. Si hujuſmodi expreſſio anomaliæ veræ $c\zeta$ ſubſtituatur in expreſſione vectoris radii CQ, quæ ex formula Probl. III. fuit eruta, & juxta alias formulas trigonometricas reſolutione terminorum facta ſit

$$\text{coſ.}\ c\zeta = \text{coſ.}\ \overline{cZ - 2\varphi\ .\ \text{ſin.}\ cZ} = \text{coſ.}\ cZ + 2\varphi\ .\ \text{ſin.}\ cZ^2$$
$$= \varphi + \text{coſ.}\ cZ - \varphi\ .\ \text{coſ.}\ 2cZ,$$

neglectis pluſquam quadraticis excentricitatis poteſtatibus erit

$$CQ = 1 + \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \varphi.\text{coſ.}\ cZ - \tfrac{1}{2}\varphi^2.\ \text{coſ.}\ 2cZ\ \&c.,$$

eademque methodo longius perduci ſeries, atque alii termini ſupputari poterunt, qui coſinus anguli cZ ter, quater &c. ſumpti involvant.

II. Si motus abſolutus a loco immobili ſummæ apſid's ut antea ſupputatus vocetur ζ, motus medius Z, vera angularis diſtantia a

ſum-

summa apside cz, distantia media cZ, motus summæ apsidis $z - cz$; divisione terminorum omnium per c facta erit medii, ac veri angularis motus differentia

$$z - Z = -\left(\frac{2\varphi}{c} - \frac{\varphi^3}{4c}\right).\text{sin.}\,cZ + \frac{5\varphi^2}{4c}.\text{sin.}\,2cZ - \frac{13\varphi^3}{12c}.\text{sin.}\,3cZ \,\&c.$$

atque ita priores tres habebuntur motus elliptici æquationes, quarum una ad distantiam 90° a summa apside fiet maxima, altera ad distantiam 45°, altera ad 30° cum sin. $3cZ$ fiet æqualis radio: ac prior quidem, ac tertia a motu medio subducenda erit ut motus verus habeatur dum addetur secunda, & contraria ratione singulæ addendæ erunt, vel subducendæ cum sinus angularis distantiæ a summa apside semel, bis, ac ter sumptæ contratio signo afficietur,

III. Cum peripheria ad radium se habeat ut 314159 : 50000, cumque hæc eadem sit ratio 360° : 57 . 29578°; radius, quem in formulis præcedentibus assumpsimus loco unitatis, æqualis erit arcui 57 . 29578°, sive 57° 17′ 44 . 808″, sive etiam arcui 206264 . 808″. Quare si excentricitas φ ad radium mediocrem orbitæ pro unitate assumptum referatur, atque ex observationibus assumatur quantitas c, qua motus medius apsidum determinatur, coefficientibus in 206264.808″ ductis habebitur æquationis cujusvis quantitas. Ita si ex Mayeri observationibus excentiicitas Lunaris orbitæ assumatur partium 0 . 0547 radii mediocris, & motus apsidum assumatur circiter 3° singulis Lunæ revolutionibus, ac sit $\frac{1}{c} = \frac{360}{357}$, numetis rite subductis erit prior lunarium motuum æquatio

$$z = Z - 6^\circ\, 19'\, 7''.\,\text{sin.}\,cZ + 12'\, 58''.\,\text{sin.}\,2cZ - 37''.\,\text{sin.}\,3cZ.$$

Videbimus autem suo loco quæ aliæ ejusdem nominis correctiones, reductionesque æquationi hujusmodi adjungi debeant.

IV. In orbitis Planetarum ob lentissimum motum apsidum statui poterit $c = 1$, atque erit motus totius elliptici æquatio

$$z = Z - \left(2\varphi - \frac{1}{4}\varphi^3\right).\text{sin.}\,Z + \frac{5}{4}\varphi^2.\text{sin.}\,2Z - \frac{13}{12}\varphi^3.\text{sin.}\,3Z:$$

atque ita si in orbita terrestri ut supra assumatur $\varphi = 0.0168$, erit

$$z = Z - 1^\circ\, 55'\, 30.5''.\,\text{sin.}\,Z + 1'\, 12.7''\,\text{sin.}\,2Z - 1''.\,\text{sin.}\,3Z.$$

Æquationem maximam centri terrestris orbitæ Caillius in suis tabulis

conſtituit 1° 55′ 31 . 6″, quæ reſponderet excentricitati paulo majori quam 0.0168. In orbita autem Veneris cum adeo exigua ſit excentricitas 0 . 0072 ſatis erit priorem ſeriei terminum ſupputare, eritque veri, ac medii motus differentia — 49′ 30″ . ſin. Z . Caſſinus in Elementis Aſtronomiæ ex inferioribus conjunctionibus Veneris cum Sole æquationem hujuſmodi maximam eſſe ſtatuit — 49′ 6″.

V. Si excentricitates orbitarum Mercurii, Martis, Jovis, & Saturni aſſumantur illæ, quæ ſupra ex Lectionibus Aſtronomicis Caillii depromtæ fuerant, ſubſtituanturque ſingulæ in formula antecedente, elementa motuum ellipticorum in ſingulis Planetarum Primariorum orbitis, & quæ ex calculo colliguntur, & quæ Caſſinus ad annum 1740 ex obſervationibus collegerat erunt ut in tabula ſequente: & ſi novi ſideris excentricitas cum Clariſs. Hennert ſtatuatur ut partium 0 . 042664 diſtantiæ mediocris a Sole, analogæ æquationes ſimili modo ſupputari poterunt.

Excentricitates		Æquationes centri	juxta Caſſinum,
Mercurii	0.2117.	—24° 7′23.26″.ſin.Z + 3°12′ 35″.ſin.2Z—35″20″.ſin.3Z	24° 2′58″.
Veneris	0.0072.	— 49′ 30″.ſin.Z + 13″.ſin.2Z	49′ 6″.
Terræ	0.0168.	— 1°55′30. 5″.ſin.Z + 1′12. 7″.ſin.2Z— 1″.ſin.3Z	1°55′51″.
Martis	0.0931.	—10°39′25. 2″.ſin.Z + 37′14. 7″.ſin.2Z— 2″58″.ſin.3Z	10°39′19″.
Jovis	0.0482.	— 5°31′ 18″.ſin.Z + 9′ 56″.ſin.2Z— 25″.ſin.3Z	5°31′17″.
Saturni	0.0569.	— 6°31′ 3. 4″.ſin.Z + 13′54. 7″.ſin.2Z— 41″.ſin.3Z	6°31′40″.
Novi Sid.ris	0.042664.	— 4°53′ 16″.ſin.Z + 9′ 53″.ſin.2Z— 17″.ſin.3Z	

SCHOLION.

Poſtquam Keplerus in Commentariis de motibus Stellæ Martis ſuſpicatus eſt orbitas Planetarum eſſe ellipticas, & areas circa Solem in foco poſitum deſcriptas invenit eſſe temporibus proportionales, problema determinandi loci Planetæ cujuſvis ad tempus datum ad problema aliud deduxit areæ ellipticæ radiis vectoribus e centro ductis ſecandæ in ratione data. Pro orbitis excentricitatis exiguæ approximationem quamdam propoſuit Sethus Wardus, quam in Coroll.II. Probl.IV. indicavimus. Generales Kepleriani problematis ſolutiones pro orbitis utcumque excentricis protulerunt Bouillaud, la Hire, Caſſinus, Hermannus, Gregorius, Keillius, Simpſonius, aliique. Sed duæ in primis ſolutiones memorari debent, quarum una a Newtono tradita in ſcholio

fcholio Propof. XXX. Lib. I. elegantia, & fimplicitate Geometrica maxime fe fe commendat: altera in infinitam feriem refolvitur, qua D. Clairaut in Lem. V. Theoriæ Lunaris, aliique authores ufi funt, qui de problemate trium corporum fe fe attrahentium copiofius edifferuerunt. Seriei hujufmodi evolutionem, atque ordinem D. Boffut in differtatione de ætheris refiftentia demonftravit ea methodo, quæ dicitur coefficientium indeterminatorum: & alia nuper ratione ex aliis formulis differentialibus eruit D. la Place §. XI. Par. I. de theoria motus elliptici. In problematis præcedentibus coefficientes feriei ea methodo fupputavimus, quæ reverfionis fcrierum dicitur, & qua in priore Algebræ volumine fæpius ufi fumus, & calculum ad eos ufque terminos perduximus, qui adhuc fenfibilem correctionem aliquam, reductionemque æquationis centri in fingulis Planetarum orbitis exhibere poffunt. Æquationes alias neglleximus ob parvitatem: eadem tamen ratione, ac methodo longius perducta ferie minores alii termini poffent fupputari. Poft hafce omnes motus elliptici inæqualitates præcipuum aliud apparentis motus phænomenon, quod ex præmiffis jam angularis motus, & abfolutæ velocitatis legibus confequitur, fedulo expendendum, atque explicandum eft, apparentis fcilicet retrogradationis, ftationifque Planetarum fuperiorum, atque inferiorum. Licet enim D. la Lande §. 1189. Aftronomiæ monuerit in Aftronomicis fupputationibus nunquam occurrere ut ftationis alicujus tempus determinari debeat, atque idcirco problematum hujus generis folutiones in Aftronomica, ut vocant, praxi omitti poffe; phænomenon tamen, fi theorice tantum confideretur, in univerfa cœlefti phyfica fingulare, ac præcipuum eft, in eoque evolvendo fe fe magna cum laude exercuerunt Hallejus in Tranfactionibus Philofophicis, Keillius Lect. XXVII. fuæ ad Aftronomiam Introductionis, Hermannus in Mifcellaneis Berolinenfibus, D. du Sejour in opufculo quodam Parifiis edito, & D. Melanderhielm Cap. XVII. Aftronomiæ. Cum tamen neminem hactenus invenerim, qui retrogradationis tempus in circularibus, atque ellipticis orbitis fupputatum cum obfervationibus Ptolemæi, quæ folæ hacce in re fuppetunt, comparaverit, cumque fingulares invenerim problematum omnium hujufmodi folutiones, eas fingulari capitulo hic exponam.

CAPUT QUINTUM.

DE MOTIBUS APPARENTIBUS, AC DE STATIONIBUS, ET RETROGRADATIONIBUS PLANETARUM.

PROBLEMA VI.

SI velocitates corporum in orbitis circularibus ſe ſe volventium circa idem centrum ſint in ratione ſubduplicata reciproca diſtantiarum, determinare apparentes motus Planetarum ſuperiorum, atque inferiorum e Terra viſos.

Sit in fig. 14. TD ſpatium, quod juxta tangentem circularis orbitæ BT Terra T, & PG quod Planeta P juxta orbitæ ſuæ tangentem eodem tempore poſſent abſolvere. Quia communi motu juxta directiones parallelas impreſſo variari nequit apparens motus corporis alicujus ex alio viſi, eædem adhuc apparentiæ motuum habebuntur ſi Terram quieſcere intelligamus in loco T, & Planetæ P imprimi velocitatem PC, æqualem, contrariam, & parallelam velocitati Terræ TD. Tum autem completo parallelogrammo $PGHC$ Planeta motu compoſito per diagonalem PH ferri videbitur ex Terra quieſcente T, atque ex H in TP demiſſo perpendiculo HE, erit angularis Planetæ motus e Terra viſus $\frac{HE}{TE}$, ſeu proxime $\frac{HE}{TP}$. Jam vero ex S, & G ductis perpendiculis aliis SM, GO, & ſi opus ſit producta GH in h, ob ſimilitudinem triangulorum SPM, PGO erit $GO = PG \,.\, \text{coſ.}\, SPM$, atque ob ſimilia pariter triangula STM, hGO, debebit eſſe

$$Gh = PG \,.\, \frac{\text{ſin.}\, GPO}{\text{ſin.}\, GhO} = PG \,.\, \frac{\text{coſ.}\, SPT}{\text{coſ.}\, STP},$$

$$HE = Hh \,.\, \text{ſin.}\, HhE = Hh \,.\, \text{coſ.}\, STP.$$

Cum igitur ſit $Hh = Gh \mp GH$, accepto ſuperiore ſigno cum Planeta ſuperior, vel inferior eſt citra Solem, inferiore autem cum ultra

tra Solem conspicitur e Terra, erit angularis Planetæ motus e Terra visus

$$\frac{HE}{TP} = \frac{Gh \mp GH}{TP} \cdot \text{cos. } STP = \frac{\mp PG \cdot \text{cos. } SPT \mp TD \text{cos. } STP}{TP}:$$

ac denique si Terræ velocitas TD accipiatur loco unitatis, atque ob datam velocitatis legem sit $PG = \sqrt{\left(\frac{ST}{SP}\right)}$, fiet idem angularis

motus $\frac{1}{TP}\left(\sqrt{\left(\frac{ST}{SP}\right)} \cdot \text{cos. } SPT \mp \text{cos. } STP\right)$.

COROLLARIA.

I. Si Planeta quispiam inferior, scilicet Mercurius, aut Venus Terram inter, ac Solem jaceat, quæ prima, & inferior inferiorum Planetarum conjunctio dicitur, contrariæ erunt directiones motuum PG, PC, & cum PG major sit quam PC, vel TD, punctum H ultra rectam TP jacebit ad partes illas, in quas vere fertur Planeta, punctisque H, P, S e Terra ad fixarum sphæram relatis, Planeta inferior ex P in H ferri videbitur in partem adversam illi, versus quam ferri videbitur S, & motu ad Solem relato Planeta idem inferior videbitur retrogradus. Cum ultra Solem erit Planeta, atque ad superiorem aliam conjunctionem tendet, ac pleno disco fulgens conspicietur e Terra, conspirabunt directiones motus PG, PC, & Planeta inferior in eamdem cum Sole plagam e Terra directe ferri videbitur.

II. Si Planeta superior sit, & circa oppositionem Solis versetur, ob contrarias pariter directiones motuum PG, PC, atque ob PG minorem quam PC, & Gh minorem pariter quam GH, punctum H jacebit ad partes adversas illis, in quas tendit Planeta, & in quas eadem angularis motus directione ex alia orbitæ parte progredi videtur Sol, ac propterea Planeta idem retrogradus videbitur. Cum Planeta superior ultra Solem e Terra conspicietur, & ad conjunctionem tendet, conspirabunt directiones motuum PG, PC, & Planeta in eamdem feretur plagam cum Sole, scilicet videbitur directus. Motum autem directum inter, & motum retrogradum in utroque inferioris, & superioris Planetæ casu habebitur stationis locus, & duo hinc inde habebuntur puncta ex adversa parte orbitæ, in quibus Pla-

Planeta ad eumdem ſphæræ cœleſtis locum e Terra per aliquod tempus referetur.

III. Cum Sole, Terra, ac Planetis ad eamdem lineam rectam delatis ſit coſ. SPT = coſ. $STP = 1$, erit in caſu utroque Planetæ ſuperioris, & inferioris velocitas maxima directionis ad velocitatem maximam retrogradationis directe ut ſumma ad differentiam velocitatum abſolutarum Planetæ, ac Terræ, & reciproce ut ſumma ad differentiam diſtantiarum Planetæ, ac Terræ a Sole: aut ſi radius terreſtris orbitæ vocetur R, & r radius orbitæ Planetæ alterius, fiet ratio eadem velocitatum

$$\frac{PG+TD}{TS+PS} : \frac{PG-TD}{TS-PS} = \frac{\sqrt{\left(\frac{r}{R}\right)}+1}{r+R} : \frac{\sqrt{\left(\frac{r}{R}\right)}-1}{r-R} = \frac{\sqrt{r}+\sqrt{R}}{R+r} : \frac{\sqrt{r}-\sqrt{R}}{r-R},$$

quæ eſt ratio compoſita ex ratione directa ſummæ ad differentiam radicum radii utriuſque orbitæ, & ex reciproca ratione ſummæ ad differentiam radiorum.

PROBLEMA VII.

Iiſdem poſitis ſtationis locum determinare.

Cum nullus erit Planetæ motus e Terra viſus, ac fiet $HE = 0$, erit etiam $\sqrt{\left(\frac{ST}{SP}\right)}$ coſ. SPT = coſ. STP: & ſi angulus STM apparentis diſtantiæ, ſive elongationis Planetæ a Sole vocetur X, ac fiat $ST = R$, $SP = r$, $SM = R$. ſin. X, & coſ. SPT = coſ. $SPM = \frac{1}{r} . \sqrt{(r^2 . - R^2 \text{ ſin. } X^2)} = \sqrt{\left(\frac{r}{R}\right)}$. coſ. X, quadrando utrimque, & radicem quadraticam extrahendo prodibit ſin. $X = \pm r\sqrt{\left(\frac{R-r}{R^3-r^3}\right)}$. Eſt autem $R^3 - r^3 = \overline{R-r}.\overline{R^2+rR+r^2}$.

Itaque in loco ſtationis debebit eſſe ſin. $X = \frac{\pm r}{\sqrt{(R^2+rR+r^2)}}$

$$\text{coſ.} X^2 = 1 - \frac{r^2}{R^2+rR+r^2} = \frac{R^2+rR}{R^2+rR+r^2}$$

$$\text{tang. } X = \frac{\text{ſin. } X}{\text{coſ. } X} = \frac{\pm r}{\sqrt{(R^2+rR)}}.$$

Quod

Quod si insuper periodicum tempus Terræ vocetur T, Planetæ autem superioris, vel inferioris t, ob $R^3 : r^3 = T^2 : t^2$, & $R : r = T^{\frac{2}{3}} : t^{\frac{2}{3}}$, fiet sin. $X = \pm \sqrt{\left(\frac{t\sqrt[3]{T^2 t} - t^2}{T^2 - t^2}\right)}$,

& tang. $X = \dfrac{\pm t^{\frac{2}{3}}}{T^{\frac{1}{3}}\sqrt{(T^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{2}{3}})}}$

COROLLARIA.

I. Ex priore formula manifestum est quod cum tempore stationis sit $SP^{\frac{1}{2}} : ST^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}} : R^{\frac{1}{2}} =$ cos. SPT : cos. STP, ac sit etiam $r^{\frac{1}{2}} : R^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{3}} : T^{\frac{1}{3}} = \frac{t}{t^{\frac{2}{3}}} : \frac{T}{T^{\frac{2}{3}}} = \frac{t}{r} : \frac{T}{R}$, cosinus parallaxeos SPT erit ad cosinum elongationis Planetæ a Sole STP in ratione composita ex directa ratione temporum periodicorum Planetæ, & Terræ, atque ex ratione reciproca distantiarum a Sole: quod theorema a Keillio traditum est in Lect. XXVII. Introductionis ad Astronomiam. Formulam etiam aliam, quæ tangentem anguli elongationis Planetæ a Sole ex data ratione radiorum, distantiarumque a Sole exprimit, tradiderant Keillius citato in loco, & qui de stationis problemate egerunt authores alii.

II. Si fiat $R = 1$, & radios orbitæ a Terra circa Solem descriptæ accipiatur loco unitatis, stationis tempore erit tangens angularis distantiæ Planetæ a Sole e Terra visæ, seu tang. $X = \frac{\pm r}{\sqrt{(1+r)}}$, iisdemque numeris substitutis, quos supra ex Caillio exscripsimus, stationis apparentis locus determinabitur. Ita si pro orbita Veneris assumatur $r = 0.7233$, prodibit $\frac{\pm r}{\sqrt{(1+r)}} = \frac{\pm 0.7233}{\sqrt{(1.7233)}} = \frac{\pm 0.7233}{1.31274} = \pm 0.551$, quæ tangens respondet angulo 28° 51′. In orbita Mercurii posito mediocri radio $r = 0.3827$, & factis reductionibus similibus prodibit angulus quæsitæ elongationis 18° 2′.

In

III. In orbitis Planetarum superiorum stationis tempore obtusus fiet angulus STP, & qui ex præcedente formula eruetur angulus X erit complementum anguli STP ad duos rectos. Quod ex ipsa etiam patet constructione problematis. In Planetis enim superioribus angulus HhE, sive CPh erit complementum anguli CPT ad duos rectos, atque ob parallelas PC, TD erit æqualis angulo STM, ac fiet propterea $HE = Hh$. sin. $HhE = Hh$. cos. $STM = Hh$. cos. X. Substitutis igitur numeris, atque in orbita Martis posito $r = 1.5203$; angulus STM, sive X erit $43° 46'$, eritque elongatio Martis a Sole cum videbitur stationarius $136° 14'$: In Jove erit angulus $STM = 64° 24'$, & $STP = 115° 36'$: in Saturno autem erit $STM = 71° 12'$, & $STP = 108° 48'$.

PROBLEMA VIII.

Positis omnibus quæ antea retrogradationis totius tempus determinare.

Cum ex problemate antecedente detur jam angulus STM, qui in Planetis inferioribus stationis tempore est angulus elongationis Planetæ a Sole, in superioribus autem Planetis est complementum anguli elongationis ad duos rectos, cumque in utroque casu sinus anguli SPM, qui annuæ parallaxis dicitur, æqualis sit sinui anguli STM ducto in ST, & per SP diviso; dabitur etiam in utroque casu angulus PST, qui dicitur commutationis, & quo inferior Planeta stationis temporis a recta ST conjunctionis Terræ distabit, Terra autem distabit a recta ST conjunctionis Planetæ superioris. In priore etiam casu si intelligamus Terram cum Planeta inferiore conjunctam fuisse in recta SB, atque angulos BSP, BST eodem tempore descriptos fuisse, quia anguli eodem tempore descripti sunt reciproce ut tempora, quibus describuntur æquales anguli, & in orbitis circularibus sunt reciproce ut tempora integrarum revolutionum; erit motus angularis Planetæ inferioris ad motum angularem Terræ a conjunctionis loco supputatum, sive erit ang. BSP : ang. $BST = T : t$, & ang. TSP : ang. $BST = T - t : t$, eritque angulus BST, quem Terra a conjunctione usque ad stationis tempus describet $\frac{t \,.\, \text{ang. } TSP}{T - t}$, & angulus, quem duas inter stationes describet Terra, erit $\frac{2t \,.\, \text{ang. } TSP}{T - t}$, & re-

tro-

trogradationis totius tempus $\frac{2tT \cdot \text{ang. } TSP}{360^\circ \cdot \overline{T-t}}$. In superioribus autem Planetis erit ang. TSP : ang. $BST = t - T : t$, & fiet $\frac{2t \cdot \text{ang. } TSP}{t - T}$ angulus a Terra descriptus retrogradationis tempore, eritque idem tempus $\frac{2tT \cdot \text{ang. } TSP}{360^\circ \cdot t - T}$.

COROLLARIA.

I. Cum sinus anguli 28° 51′, quo Venerem a Terra distare vidimus stationis tempore, sit 0.4825182, numero hoc ducto in 10000, & per 7233 diviso prodibit 0.6671, qui est sinus anguli 41° 51′. Itaque in orbita Veneris stationis tempore erit angulus $SPM = 41^\circ\ 51'$, angulus $SPT = 138^\circ\ 9'$, & angulus TSP, qui est complementum duorum SPT, STP ad duos rectos, erit $= 13^\circ$. Assumptis igitur temporibus periodicis Veneris quidem 224.6176^d, Terræ autem 365.2565^d, & posita differentia eorumdem temporum 140.6389^d, erit angulus a Terra descriptus circa Solem tempore retrogradationis Veneris $\frac{26^\circ \times 224.6176}{140.6389} = 41.525^\circ$, & retrogradationis tempus erit $\frac{365.2565^d \times 41.525^\circ}{360^\circ} = 42^d\ 3^h$, qui numerus fere medius est duos illos inter, quos Ptolemæus pro apogæi, & perigæi loco deprehenderat.

II. Pariter ut exemplum aliquod proferamus in superioribus Planetis, cum in Saturni orbita stationis tempore tangens anguli STM prodeat 2.937, & angulus ipse sit 71° 12′, & sit sinus rectus 0.9460493; erit sinus anguli $SPT = 0.09933$, qui sinus respondet angulo 5° 42′, eoque subducto ex angulo STM fiet angulus $TSP = 65^\circ\ 30'$. Posito igitur tempore periodico Saturni 10759.275^d, & differentia periodicorum temporum Saturni, & Terræ 10394.0185^d, erit arcus a Terra descriptus tempore retrogradationis Saturni 135° 36′, & tempus retrogradationis erit 137^d 14^h, qui rursus numerus cum Ptolemæi observationibus satis convenit. D. du Sejour cum in opusculo jam memorato retrogradationis problema ad quemdam maximæ quantitatis casum deduxisset, deducta ad numeros formula arcum a Terra de-

descriptum tempore retrogradationis Saturni invenit esse $135^\circ\ 35'$.

III. Si qua ratione in orbita Saturni ea etiam in Jovis, & Martis orbitis, & qua in Veneris orbita in Mercurio etiam calculus instituatur, assumpta hypothesi circularium orbitarum, quæ ad angulum, arcum, ac tempus retrogradationis cujusque pertinent unica tabula exprimi poterunt, eruntque

In orbita	ang. *STM*.	ang. *SPT*.	ang. *PST*.	ang. Terræ.	Tempus Retrogr.
Mercurii	$18^\circ\ 2'$.	$126^\circ\ 1'$.	$35^\circ\ 57'$.	$22^\circ\ 45'$.	$23^d\ 2^h$.
Veneris	$28^\circ\ 51'$.	$138^\circ\ 9'$.	13°	$41^\circ\ 31'$.	$42^d\ 3^h$.
Martis	$43^\circ\ 46'$.	$27^\circ\ 4'$.	$16^\circ\ 40'$.	$71^\circ\ 10'$.	$72^d\ 5^h$.
Jovis	$64^\circ\ 24'$.	10°	$54^\circ\ 24'$.	$118^\circ\ 49'$.	$120^d\ 13^h$.
Saturni	$71^\circ\ 12'$.	$5^\circ\ 42'$.	$65^\circ\ 30'$.	$135^\circ\ 36'$.	$137^d\ 14^h$.

PROBLEMA IX.

Invenire variationes retrogradationis, quæ pendent ex maxima, aut minima Terræ distantia a Sole.

Si mediocris Terræ distantia a Sole vocetur R, & P distantia aphelia, aut perihelia, & Terræ velocitas TD in mediocri distantia accipiatur pro unitate, erit Terræ velocitas in aphelio $= \frac{R}{P}$, atque erit Planetæ velocitas $PG = \sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)}$. His autem valoribus substitutis in posteriore formula sexti problematis habebimus

$$\frac{R}{P} . \text{cos.} STP = \frac{R}{P} . \text{cos.} X = \sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)} . \text{cos.} SPT = \sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)} . \frac{1}{r} \sqrt{(r^2 - P^2 . \text{sin.} X^2)}.$$

Inde autem facile eruetur $\text{sin.}\ X = r . \sqrt{\left(\frac{P^2 - Rr}{P^4 - Rr^3}\right)}$,

$\text{cos.}\ X = P . \sqrt{\left(\frac{P^2 - r^2}{P^4 - Rr^3}\right)}$, & $\text{tang.}\ X = \frac{r}{P} . \sqrt{\left(\frac{P^2 - Rr}{P^2 - r^2}\right)}$.

Ita igitur dabitur angulus *STP*, & cum sit $\text{sin.}\ SPM = \frac{P}{r} . \text{sin.}\ STP$, dabitur etiam angulus *TSP*, qui duorum *STP*, *SPT* complementum est ad duos rectos: & quia ob æquales areas æqualibus temporibus descriptas angularis motus est reciproce ut quadratum distantiæ, si motus angularis Terræ in distantia mediocri a Sole sit $\frac{1}{T}$, erit in a-

aphelio $\frac{1}{T} \cdot \frac{R^2}{P^2}$, ac fiet propterea ang. BSP : ang. $BST = T \cdot P^2 : t \cdot R^2$,

atque inde eruetur ang. $BST = \frac{t \cdot R^2 \cdot \text{ang. } TSP}{T \cdot P^2 - t \cdot R^2}$. Quia denique in diſtantia maxima, aut minima Terræ a Sole angulus a Terra deſcriptus æquatur arcui per eamdem diſtantiam diviſo, angulus autem ductus in dimidium quadratum diſtantiæ æquatur areæ, quæ eſt tempori proportionalis; retrogradationis tempus poſtremo analogiæ hujus termino exprimetur

$$360^\circ \cdot \frac{1}{2} R^2 : \frac{1}{2} t \cdot \frac{R^2 \cdot P^2 \cdot \text{ang. } TSP}{T \cdot P^2 - t \cdot R^2} = T : \frac{t \cdot T \cdot P^2 \cdot \text{ang. } TSP}{360^\circ \cdot T \cdot P^2 - t \cdot R^2}.$$

COROLLARIUM.

Si exempli loco proponatur orbita Veneris, in qua ob parvitatem excentricitatis variationes illæ potiſſimum ſpectari debent, quæ ex varia Terræ a Sole diſtantia proficiſcuntur, accipiaturque diſtantia maxima $P = 1.0168$, $R = 1$, $r = 0.72333$ inprimis eruetur tang. $X = 0.555$, quæ tangens reſpondet angulo $29^\circ\ 2'$: cujus anguli ſinus rectus cum ſit 0.4853184, eo in $\frac{10168}{7233}$ ducto habebitur 0.68225, qui eſt ſinus anguli $43^\circ\ 2'$. Erit igitur angulorum SPM, STP differentia $TSP = 14^\circ$: ac poſito ut antea $T = 365.2565^d$, $t = 224.6176^d$, erit retrogradationis tempus $42^d\ 22\ \frac{1^h}{2}$: quod Ptolemæus in apogæo 43^d circiter eſſe cenſuit. Id ſatis eſt ut pateat quod quæ habentur hactenus obſervationes cum inſtitutis calculis optime conveniunt. At neque omnino accuratæ obſervationes illæ apparentium retrogradationum cenſeri debent, neque ſtationis tempus non niſi proxime æſtimaſſe videtur Ptolemæus ex illo intervallo temporis, in quo progreſſus Planetarum non eſt ſenſibilis. Adjiciemus hic generalem methodum, qua in orbitis ellipticis accuratiorum etiam obſervationum calculus inſtitui poſſet.

PROBLEMA X.

Stationum apparentium loca in orbitis ellipticis corrigere.

Velocitates corporum in orbitis ellipticis motorum, juxta Theor. X., ſunt

ſunt in ratione ſubduplicata laterum principalium directe, ac reciproce in ratione ſimplici perpendiculorum ex foco in tangentes demiſſorum: & juxta Theor. VII. perpendiculum quodvis æquari debet producto vectoris radii, & ſemilateris recti principalis per normalem diviſo. Jam vero ſi radius vector orbitæ alicujus ellipticæ vocetur P, major ſemiaxis R, excentricitas, φ, & x abſciſſa a centro in majore ſemiaxe ſupputata; erit ſemilatus rectum principale $\frac{R^2 - \varphi^2}{R}$, & juxta formulam Probl. XXX. Algebræ erit normalis perimetro ellipſeos $\frac{1}{R} \surd (R^2 - \varphi^2) \surd \left(R^2 - \frac{\varphi^2 x^2}{R^2}\right)$. Quare ſi ellipſeos excentricitas adeo ſit parva ut poſſit negligi ipſius quadratum, erit velocitas ut $\frac{R^{\frac{1}{2}}}{P}$: & ſi in alia orbita elliptica radius mediocris ſit r, radius vector p, excentricitas ω, & angulus STM ut antea vocetur X, & ſit $SM = P.$ ſin. X, & coſ. $SPT = \frac{1}{p} \surd (p^2 - P^2.\text{ſin.} X^2)$ juxta formulas ſexti, & ſeptimi problematis in loco ſtationis debebit eſſe $\frac{R^{\frac{1}{2}}}{P}$. coſ. $X = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{p^2}. \surd (p^2 - P^2 \text{ſin.} X^2)$.

Inde autem eruetur ſin. $X = \pm p . \surd \left(\frac{r.P^2 - R.p^2}{r.P^4 - R.p^4}\right)$: & ſi in priore orbita angulus anomaliæ veræ vocetur m, in altera autem n, ac ſit propterea $P = \frac{R^2 - \varphi^2}{R - \varphi.\text{coſ.} m}$, & $p = \frac{r^2 - \omega^2}{r - \omega.\text{coſ.} n}$ factis ſubſtitutionibus, ac neglectis quadraticis excentricitaris poteſtatibus evadet

$$\text{ſin.}\, X = \pm (r + \omega\,\text{coſ.} n) . \surd \left(\frac{R - r + 2\varphi.\text{coſ.} m - 2\omega.\text{coſ.} n}{R^2 - r^2 + 4R^2\varphi.\text{coſ.} m - 4r^2\omega.\text{coſ.} n}\right)$$

$$= \pm r . \surd \left(\frac{R - r}{R^2 - r^2}\right)\left(1 + \frac{\omega.\text{coſ.} n}{r} + \frac{\varphi.\text{coſ.} m - \omega\,\text{coſ.} n}{R - r} - \frac{2R^2\varphi.\text{coſ.} m + 2r\omega.\text{coſ.} n}{R^2 - r^2}\right)$$

COROLLARIUM.

Si in priore orbitarum circularium hypotheſi quæratur primum ad

ad quam a Sole diſtantiam Planeta aliquis ſtationarius videri poſſit, ac deinde pro invento ſtationis loco aſſumptis angulis anomaliæ veræ propoſiti Planetæ, & Terræ, ope formulæ præcedentis inveniatur correctio, quæ pendet ex ellipticitate orbitarum, atque ita pariter corrigantur aſſumpti anomaliæ veræ anguli, ad verum quæſitæ diſtantiæ Planetæ ſtationarii valorem licebit propius accedere. Ex dato autem elongationis angulo, & area ellipſeos corrigi etiam retrogradationis tempus, ac proxime ſupputari poterit. Supputationes autem hujuſmodi longius perducere ſupervacaneum videri poſſet, cum adhuc deſint Aſtronomicæ obſervationes, quibuſcum ſingulæ comparentur.

APPENDIX.

DE ELONGATIONE, ET PHASIBUS PLANETARUM INFERIORUM.

EX ipſa figuræ 14 inſpectione manifeſtum eſt quod ſi *AP* referat inferioris Planetæ orbitam, angulus *STP* elongationis Planetæ a Sole fiet maximus cum recta *TP* orbitam eamdem tanget, & angulus *SPT* fiet rectus, eritque ſinus anguli quæſiti $\frac{SP}{ST}$: unde erit 0.3827 ſinus elongationis maximæ Mercurii a Sole in mediocri a Sole ipſo diſtantia, qui ſinus reſpondet angulo 22° 30′, fiet autem elongationis angulus fere 27° 38′ in aphelio orbitæ Mercurii. Ob exiguam excentricitatem orbitæ Veneris erit ſinus elongationis maximæ circiter 0.7233, angulus vero 46° 20′. Analogum eſſet Problema maximæ illuminationis Veneris e Terra viſæ, quod problema ut ab Hallejo ſolutum, conſtructumque eſt Inſtitutionum Aſtronomicarum ſcriptores ſolent commemorare. Et quidem ſi in fig. 15. ſit *AP* radius orbitæ Veneris, ductiſque diametris *EF*, *DC* ad *SP*, *PT* perpendicularibus, & ex *F* in *DC* ducta perpendiculari *FG* cum Hallejo ſtatuatur magnitudinem diſci illuminati proportionalem eſſe ſinui verſo *CG*, & quantitatem illuminationis eſſe ut $\frac{CG}{TP^2}$, ſolutio problematis illico ha-

habebitur. Posita enim $SP = r$, $ST = R$, $TP = z$, atque in TP productam demissa perpendiculari alia SM, juxta formulas jam antea traditas in Probl. XVIII. Algebræ erit $MP = \frac{R^2 - r^2 - z^2}{2z}$, atque ob angulos SPM, FPC æquales erit cos. $FPC = \frac{R^2 - r^2 - z^2}{2rz}$, sinus versus $= \frac{\overline{r+z}^2 - R^2}{2rz}$, & illuminationis quantitas erit $\frac{\overline{r+z}^2 - R^2}{2rz^2}$.

Acceptis igitur differentialibus, iisque simul se destruentibus pro casu illuminationis maximæ eruetur $z = \sqrt{(3R^2 + r^2)} - 2r$, datisque in triangulo STP omnibus lateribus, ac substitutis numeris angulus STP eruetur proxime 40.° At vero GC non est nisi apparens latitudo disci a Sole illuminati, atque e Terra visi, & superficies omnis, quæ radios a Sole excipit, atque ad Terram reflectit, sphærica vere est, atque est proportionalis arcui FC: gignitur enim semicirculo circa diametrum perpendicularem, & circa centrum P per totum angulum FPC revoluto. In casu igitur illuminationis maximæ debebit esse maxima quantitas $\frac{FC}{\overline{TP}^2}$, & quantitas $\frac{AF}{\overline{TP}^2}$ minima, nec nisi pro casu anguli FPA valde exigui neglectis cubicis, atque altioribus potestatibus sinus recti arcus AF statui poterit rectæ GP, & arcus FC rectæ CG proportionalis. Cum igitur juxta Hallæj constructionem posito angulo STP quadraginta circiter graduum, & ejus sinu per 0.7233 diviso sinus anguli SPM, sive FPC prodeat graduum circiter $62\frac{2}{3}$; non nisi approximationis cujusdam loco in problemate, quod neque accuratum calculum expostulat, constructio eadem proponi poterit.

CA-

CAPUT SEXTUM.

DE VARIATIONIBUS ORTIS EX LUCIS ABERRATIONE.

THEOREMA XI.

Si celeritas lucis ad celeritatem, qua ſpectatoris oculus movetur, datam rationem habeat, & per ſidus quodvis propoſitum, ac ſpectatoris ſemitam traducatur aliquod planum; ſidus in eodem plano declinare videbitur ad eam partem, ad quam ſpectatoris motus dirigitur, atque erit lucis celeritas ad ſpectatoris celeritatem ut ſinus anguli, quem ipſius ſemita cum recta ad ſidus ducta complectitur, ad ſinum anguli aberrationis.

Feratur oculus ſpectatoris ex A in B, fig. 16., & radius lucis EBC ex ſidere aliquo E ad ſpectatoris oculum perveniat in loco B, & ſit celeritas oculi ad lucis celeritatem ut $AB:BC$. Quia communis motus non turbat motus corporum inter ſe, ſtatuamus & luci, & oculo imprimi motum contrarium, & æqualem illi, quo fertur oculus. Lux in quieſcentem oculum illabetur viribus BA, BC, completoque parallelogrammo $ABCD$, & ducta EF parallela directioni AB, ſidus in loco F, atque in directione DBF videbitur, eritque $BE:EF$ ut celeritas lucis ad celeritatem oculi. Ex F in BA, & BE, atque ex E in BF ducantur perpendicula FK, FP, EQ. Erit angulus EFQ æqualis angulo FBK, & ſimilia erunt triangula BKF, FQE, eritque $EQ = \frac{FE.FK}{BF}$: ac pariter ob ſimilitudinem triangulorum BFP, BEQ erit $EQ = \frac{BE.FP}{BF}$. Exæquatis igitur terminis erit $BE:FE = FK:FP$, ſive erit celeritas lucis ad oculi celeritatem ut ſinus anguli FBK, vel EBK, quem ſpectatoris ſemita cum recta ad ſidus ducta complectitur, ad ſinum anguli aberrationis FBP.

CO-

COROLLARIA.

I. Sidus igitur in loco E, in quo eſt, apparere nequit niſi aut velocitas oculi AB ſit nulla, & velocitas lucis CB, ut ex Carteſii hypotheſi conſequeretur, ſit infinita, aut angulus EBK ſit nullus, & rectæ BA, BE ſimul congruant. Roemerus autem cum in intimo Jovis Satellite aliquam eſſe deprehendiſſet differentiam temporum eclipſeos cujuſque ſupputatæ, atque obſervatæ, & differentiam omnem proportionalem eſſe diſtantiæ Terræ a Jove; agnovit non niſi ſucceſſivæ lucis propagationi phænomenon tribui oportere: quod poſtmodum obſervationibus aliorum Satellitum alii Aſtronomi, atque in primis Wargentinus in Actis Uſpalienſibus anni 1742. exiguarum omnium circularis motus inæqualiratum ratione habita, confirmarunt. Quæ igitur ſidera non jaceant in ea recta, juxta quam ſpectatoris motus dirigitur, in eo, in quo vere ſunt, loco apparere nequaquam poterunt.

II. Ubi ſtatuamus ſpatium Soli, & Terræ interjectum a luce abſolvi tempore 8′ 12″, quod ex Jovis diſtantia a Terra, atque ex differentia temporum eclipſeos cujuſque & ex tabulis erutæ, & obſervatæ certiſſime colligitur, quia tota terreſtris orbita a Terra abſolvitur tempore 525969′, adeoque tempore 8′ 12″ motu annuo a Terra abſolvitur arcus tertiæ circiter partis unius minuti, & quia inſuper radius circuli æquatur arcui 3438′; erit celeritas lucis ad celeritatem Terræ ut $3438 : \frac{1}{3} = 10314 : 1$, quæ cum ſit ratio ſinus totius ad ſinum anguli 20″, locus Solis viſus a loco vero, ad quam partem Terræ motus dirigitur, declinate videbitur angulo 20″: atque ubi ſtatuamus lucem eadem ſemper celeritate a Sole, & Stellis fixis advenire, atque a Planetis, Cometiſque ad nos reflecti, erit pariter 20″ aberratio maxima, quæ ob finitam rationem velocitatis lucis, & annui motus Terræ haberi poterit.

III. Aberratio ob motum annuum Terræ genita ſe habebit ad aberrationem genitam ob motum diurnum ſub æquatore in ratione compoſita radii terreſtris orbitæ ad radium æquatoris, & temporis diurnæ revolutionis ad tempus revolutionis annuæ, ſeu proxime ut $62\frac{2}{3} : 1$, unde aberratio diurna erit omnino inſenſibilis. Si ſpectatoris oculus in ſuperficie aliorum

rum Planetarum constitueretur, diurnæ, & annuæ aberrationes siderum inter se essent in ratione eadem velocitatis diurnæ, & annuæ: atque ita in æquatore Jovis diurna aberratio major esset aberratione annua. Aberrationes annuæ, & periodicæ in superficie Terræ, & Planetarum Primariorum inter se essent in ratione subduplicata distantiæ Solis reciproce. In Satellitum superficie aberrationum species tres esse poterunt, quæ motui Satellitis cujusque circa se ipsum, & circa Primarium, & circa Solem respondebunt.

THEOREMA XII.

Si spectatoris oculus in sectione aliqua conica moveatur, semita apparens fixæ cujusvis erit circulus, & centrum apparentis motus aut intra, aut extra, aut in ipsa erit peripheria circuli prout sectio conica erit ellipsis, aut hyperbola, aut parabola.

In primis si Terra in circulo concentrico moveatur circa Solem, atque accipiatur semper $BE:EF$ ut celeritas lucis ad Terræ celeritatem, atque, in fig. 17 recta EF statuatur parallela directioni motus, quem Terra juxta tangentem concipit, stella apparebit semper in puncto F, & unius anni tempore circulum $Fmhgn$ describet parallelum plano terrestris orbitæ $MHGN$, ea quidem lege ut si in puncto M recta, quæ ad stellam ducitur perpendicularis sit directioni Terræ, & stella videatur in loco m, acceptis angulis rectis MSH, mEh ex H stella videri debeat in loco h, atque ita ex adversis punctis G, N stella videri debeat in g, & n. Quod si Terra in ellipsi circa Solem S moveri intelligatur, velocitas in puncto quolibet erit reciproce ut perpendiculum ductum ex foco in tangentem orbitæ: & quia in fig. 9 punctum P, in quod cadit perpendiculum CP, semper est in peripheria circuli centro O, & radio HO descripti, ob æqualia segmentorum rectangula in circulo circumscripto, erit in ellipsi perpendiculum PC reciproce, & velocitas Terræ directe ut recta, quæ perpendiculo eodem PC usque in adversam peripheriæ partem producto peripheria, & foco C intercipitur. Quare cum recta EF sit velocitati Terræ proportionalis, manifestum est ipsam ad alium circulum terminari oportere, qui subverse sit positus, & similiter excentricus quam qui terrestri orbitæ circumscribitur. Patet insuper quod si axis major ellipseos circa Solem descriptæ eousque augeri intelli-

gatur ut ellipsis abeat in parabolam, dum spectatoris oculus erit in ipso orbitæ aphelio, evanescet recta *EF*, quæ est semper velocitati Terræ proportionalis, & circulus apparentis motus *Fhg*, fig. 17., transibit per punctum *E*. Patet denique quod si sectio conica esset hyperbola, & focus hyperbolæ *C*, fig. 10., sit extra peripheriam circuli majori axi *HA* circumscripti, in quam cadunt perpendicula ex foco ipso in tangentes ducta; centrum etiam apparentis motus in fig. 17. cadet extra peripheriam circuli subverse positi *Fhg*.

COROLLARIA.

I. Quod si igitur spectatoris oculus in superficie alicujus Cometæ constitueretur, adhuc apparens semita puncti *F* esset circulus, & centrum *E* apparentis motus in ipsa esset circuli peripheria. Simpsonius in Propos. III. Opusculi de aberratione lucis conscripti jam adnotaverat circuli diametrum a puncto *E* dividi in ratione eadem, qua in foco axis major terrestris orbitæ dividitur. Generale autem theorema, quod demonstravimus, a nemine, quod sciam, antea indicatum fuerat. Fundamentale aberrationis lucis theorema primus omnium Bradlejus protulit in litteris ad Hallejum datis, illudque exemplo lapidis in navim motam projecti Eustachius Manfredius To. I. Academiæ Bononiensis, aliisque exemplis pluviæ decidentis, & tubi mobilis explicavit Clairaut in Actis Parisiensibus anni. 1737. Cum primum de aberratione lucis cœpissem agere in Dissertationibus anno 1761. Lucæ editis simplicissimam demonstrationem theorematis ex primis relativi motus principiis colligi animadverti, quam hic rursus in Theor. XI. exposui.

II. Quia excentricitas terrestris orbitæ tam parva est, centrum *E* apparentis motus, & centrum circuli *mhgn* proxime idem censeri poterit: & quia fixarum distantia tam magna est præ radio orbitæ ejusdem, recta *BF*, quæ a Terra ducitur ad puncta singula circuli *mhgn*, censeri poterit ducta ex foco ipso orbitæ ellipticæ, atque ex Sole *S*. Hoc autem posito recta *BF* superficiem coni scaleni designabit, cujus vertex erit ipse oculus spectatoris, basis coni erit circulus parallelus plano terrestris orbitæ, ac radius baseos exæquabit 20″ circuli unius maximi, peripheria vero apparenti aberrationis motu sic describetur ut puncta *m*, *h*, *g*, *n*, punctis *M*, *H*, *G*, *N* ordine respon-

ſpondeant. Si ſtella E reperiatur in polo Eclipticæ, & recta BE perpendicularis ſit plano terreſtris orbitæ, conus erit rectus: quod ſi autem ſtella jaceat in plano Eclipticæ, circulus *mhgn* abibit in lineam rectam, & apparentes ſtellæ excurſiones citra, & ultra locum verum non niſi in plano eclipticæ habebuntur, nec niſi longitudinem ſtellæ afficient.

III. Puncta autem cœleſtis ſphæræ, ad quæ referetur ſtella, & aberrationes ſingulæ e Terræ viſæ determinari poterunt ſi conus ipſe ſcalenus ſecetur plano, quod ſit rectæ BE perpendiculare in puncto E. Sectio erit ellipſis, & major axis mg parallelus erit Eclipticæ, ac complectetur 40″ circuli unius maximi, atque ad minorem axem ellipſeos ſe habebit ut ſinus totus ad ſinum inclinationis rectæ BE cum circulari baſi, quæ eſt plano Eclipticæ parallela, ſive ut ſinus totus ad ſinum anguli, quem recta a Stella ad Terram ducta efficit cum plano Eclipticæ, ſeu qui diſtantiam ſtellæ ab Ecliptica, & latitudinem metitur. Hæc eſt lex omnis aberrationis, quam Bradlejus detexerat, quæque cum obſervationibus optime reſpondeat motum telluris annuum circa Solem mirifice confirmat. Majorem axem ellipſeos cum primo Aſtronomus celeberrimus 40″, aut 41″ eſſe cenſuiſſet, poſtmodum nonniſi 40″ ſtatuendum eſſe in Tranſact. Philoſ. num. 485. pluribus fixarum duodecim obſervationibus demonſtravit. Euſtachius Manfredius To. I. Academiæ Bononienſis cum Sirium, Capellam, humerum Orionis, & Aldebaran Lyræ, ac deinde Aldebaran, & Capellam Arcturo comparaſſet, eamdem aberrarionis legem obſervationibus ſatis conſonam eſſe deprehendit.

PROBLEMA XI.

Fixarum aberrationem in longirudinem, latitudinem, declinationem, & aſcenſionem rectam dato quocumque tempore ſupputare.

Sit ut antea E Stellæ locus, & ſit $Em = 20''$, eoque radio deſcribatur circulus plano Eclipticæ parallellus, & ſi M, G ſint loca, in quibus recta a Terra ad Stellam ducta perpendicularis eſt directioni annui motus, ducaturque HN ad MG perpendicularis, & ſit mg rectæ HN, & hn rectæ MG parallela; erunt n, m, h, g, puncta, ad quæ refertur Stella ex N, M, H, G, ac ſi inſuper accipiantur æquales anguli NSB, FEn, erit F locus, in quo Stella videbitur ex

B. Quod si igitur a puncto G incipiendo, in quo Stella conjungi videtur Soli, angulus GSB, sive gEF vocetur Z, atque ex F in hn, mg ducantur perpendicula Fe, Ff, cum recta hn parallela sit rectæ GM erit $Fe = mE$. cos. $Z = 20''$. cos. Z aberrationis quantitas, quæ perpendiculariter ad planum per GME ductum habebitur, & si latitudo Stellæ sit P, quantitatem eamdem dividendo per radium circuli ex E perpendiculariter ad Eclipticæ axem ducti, erit angulus, quem Fe ad axem ipsum, atque ad circuli centrum subtendet, sive aberratio omnis in longitudinem $\frac{20''.\,\text{cos.}\ Z}{\text{cos.}\ P}$.

Pariter cum sit $Ff = 20''$. sin. Z, & recta Ff jaceat in plano ad Eclipticam parallelo, & sit P angulus, quem recta a Terra ad Stellam ducta efficit cum plano Eclipticæ; erit $20''$. sin. Z. sin. P latitudinis aberratio. Nam si in fig. 18. sit $gKmk$ ellipsis, quæ juxta Coroll. III. Theor. XII. in cono illo scaleno perpendiculariter ad rectam, quæ a Terra ad stellam ducitur, secari potest, & major axis gm perpendicularis sit plano per Stellam, & Solem ducto perpendiculariter ad Eclipticam, $gnmh$ referat jam circulum in eodem ellipseos plano circumscriptum, accipiaturque semper angulus $gEF = Z$, $fE = 20''$ cos. Z, $EK = 20''$. sin P, ducto ex F in mg perpendiculo Ff, quod ellipseos perimetrum secet in puncto D, erit $Df = 20''$. sin. Z. sin. P, sive erit D punctum ad quod emenso a Terra post conjunctionem Stellæ, & Solis angulo Z Stella E referetur.

At insuper cum En jaceat in plano ad Eclipticam perpendiculari, sive in plano circuli, qui quod latitudini Stellæ metiendæ inserviat dicitur latitudinis, si dE sit planum circuli perpendicularis Æquatori, qui dicitur declinationis, & ad dE ducatur perpendicularis alia Ll, erit nEd, sive LEg angulus, qui dicitur positionis, & qui si vocetur Q, atque ex D in Ll ducatur perpendiculum DO, erit in loco eodem D aberratio declinationis $DO = Df$. cos. $Q \pm Ef$. sin. $Q = 20''$ (sin. Z. sin. P. cos. $Q \pm$ cos. Z. sin. Q), atque erit denique $EO = Ef$.cos.$Q \mp Df$.sin.$Q = 20''$.(cos.Zcos.Q.$\mp$sin.Z.sin.P.sin.Q) & si angulus declinationis Stellæ ab Æquatore vocetur R, erit angulus, quem recta EO ad Æquatoris axem subtendet, sive erit ascensio-

sionis rectæ aberratio $20'' \left(\frac{\text{cos}.\ Z.\ \text{cos}.\ Q \mp \text{sin}.\ Z.\ \text{sin}.\ P.\ \text{sin}.\ Q}{\text{cos}.\ R.}\right)$.

COROLLARIA .

I. Incipiendo igitur ex loco *G*, in quo Sol e Terra conjungi videtur Stellæ, & Stella cum Sole apparet in eodem plano ad Eclipticam perpendiculari, efficietur aberratione lucis ut vera Stellæ longitudo minor sit longitudine observata, & aberrationis correctio negative accipienda erit ut apparens ex vera longitudine possit colligi, & contra in loco *M*, ubi e Terra ad partes oppositas cum Sole *S* Stella *E* refertur, longitudo apparens Stellæ aberratione efficietur major quam vere sit: ducto autem initio ex puncto *N*, quod primam Terræ quadraturam designat post conjunctionem, & in quo aberrationis correctio nulla est, ad quadraturam alteram post oppositionem longitudini mediæ addenda erit correctio, & in reditu ad priorem quadraturam subtrahenda ut longitudo apparens habeatur. Producta autem *BS* usque *b*, ubi e Terra videtur Sol, æquales erunt anguli *GSB*, *MSb*, & angulus *MSb* apparentis distantiæ Solis a loco conjunctionis Stellæ æqualis erit differentiæ longitudinis Solis, & Stellæ; atque ita fiet longitudinis aberratio $-\frac{20''.\text{cos}.(\text{long.Solis}-\text{long.Stellæ})}{\text{cos}.\ \text{lat}.\ \text{Stellæ}}$.

II. Si sit planum Eclipticæ *Bb*, fig. 19, & Terra ex *A* in *B* tendens ad Stellam *E* accedat propius, Stella juxta eamdem directionem apparebit in puncto *n*, quod semper propius erit Eclipticæ, sive inde Stella Austrum, sive ad Boream declinet. Itaque a conjunctione Stellæ, & Solis ad oppositionem transeundo minuetur semper Stellæ latitudo, & gradibus contrariis augebitur ad conjunctionem redeundo, incipiendoque a prima quadratura post conjunctionem quando aberratio latitudinis negativa est, & maxima, ex media Stellæ latitudine aberrationis correctio in primo, & ultimo quadrante subducenda erit, & in secundo, ac tertio addenda ut latitudo vera habeatur, eritque latitudinis correctio
$-20''.\ \text{sin}.(\text{long. Solis}-\text{long. Stellæ})\ \text{sin. lat. Stellæ}$: quas binas longitudinis, & latitudinis correctiones Clairaut, & Simpson primum tradiderant, aliique omnes, qui de aberratione lucis egerunt, authores commemorarunt.

In

III. In formula alia $\frac{\text{cof. } Z . \text{cof. } Q \mp \text{fin. } Z . \text{fin. } P . \text{fin. } Q}{\text{cof. } R}$, quantitatibus P, Q, R habitis pro conftantibus, & differentialibus omnibus nihilo exæquatis, aberratio maxima in afcenfionem rectam habebitur cum fiet fin. Z. cof. $Q =$. cof. Z. fin. P. fin. Q, five tang. $Z. =$ tang. Q. fin. P. Acceptis pariter differentialibus formulæ alterius, quæ aberrationem declinationis exprimit, aberratio maxima habebitur cum fiet tang. $Z =$ fin. P. cof. Q. Inde aliæ aberrationum formulæ deduci poffent, quas Lambertus exibuit in parte altera Ephemeridum Berolinenfium anni 1776. Confiderando etiam quod aberratio declinationis nulla effe debet cum Stella ad puncta L, l refertur, fig. 18., ac maxima debet effe cum tangens puncti D, ad quod refertur Stella, parallela eft rectæ Ll, ac pariter afcenfionis rectæ aberratio debet effe maxima cum Stella videtur in ea recta, quæ ellipfim tangit, atque eft rectæ dE parallela; colligi poffent formulæ aliæ, quas tradidit Simpfonius in opufculo jam memorato. At cum datis aberrationibus longitudinis, & latitudinis, & dato angulo pofitionis, declinationis, & afcenfionis rectæ aberrationes innotefcant, angulus autem pofitionis refolutione trianguli fphærici ex data afcenfione recta, ac latitudine, & Eclipticæ ad Æquatorem inclinatione facile fupputari poffit, hæ ad fupputandas aberrationes omnes pro cafu quovis propofito fufficere formulæ vifæ funt.

PROBLEMA XII.

Dato angulo elongationis Planetæ alicujus a Sole, & pofita orbitarum circularium hypothefi, variationem loci apparentis, quæ ex lucis aberratione oritur, determinare.

Pofitis omnibus ut in Probl. VI., & in fig. 14., fi velocitas Terræ T fecundum rectam TD exprimatur unitate, erit velocitas Planetæ P fecundum $PG = \sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)}$, & velocitas fecundum GO rectæ TP perpendicularem erit $= \sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)}$. cof. SPM, ac denique velocitas Planetæ fecundum rectam Gh parallelam directioni Terræ TD erit $= \sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)} . \frac{\text{cof. } SPM}{\text{fin. } GhO}$. Intelligamus jam Terræ, & Planetæ imprimi

primi contrario sensu hujusmodi velocitatem, & Planeta in loco P, atque in recta TP posito, sit omnis Terræ velocitas secundum rectam $DT = \sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)} \cdot \frac{\text{cos. } SPM}{\text{sin. } GhO} \mp 1$, & valeat inferius signum quando Planeta ultra Solem reperitur, & duarum velocitatum summa accipienda est, superius vero signum accipiatur cum citra Solem Planeta jacet ad easdem partes cum Terra. Cum juxta Theor. XI. velocitas lucis sit semper ad spectatoris velocitatem ut sinus anguli DTP, seu GhO, quem directionis Terræ, & lucis ex P advenientis intercipiunt, ad sinum anguli aberrationis, quæ ex luce oritur; erit sinus anguli ejusdem $= \sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)} \cdot \text{cos. } SPM \cdot 20'' \mp \text{sin. } DTP \cdot 20''$: & si ut antea angulus STM vocetur X, & sit cos. $SPM = \frac{1}{r} \sqrt{(r^2 - R^2 . \text{sin. } X^2)}$, erit sinus anguli aberrationis

$$= \frac{\sqrt{R} . \sqrt{(r^2 - R^2 . \text{sin. } X^2)}}{r . \sqrt{r}} . \, 20'' . \mp \text{cof. } X . 20''.$$

COROLLARIA.

I. Planetæ igitur inferiores ante primam, & inferiorem conjunctionem cum Sole angularem distantiam a Sole visam e Terra habebunt auctam aberratione lucis, & imminutam post conjunctionem. Ante conjunctionem aliam superiorem rursus augebitur ipse angulus, & post conjunctionem minuetur: scilicet circa primam conjunctionem apparens Planetarum longitudo aberratione lucis augebitur, minueturque circa alteram conjunctionem. Circa oppositionem Planetarum superiorum augebitur longitudo apparens, & minuetur circa conjunctionem. Quia vero est sin. DTP . 20'' aberratio lucis in Stella aliqua, quæ in recta TP videatur, & velocitas lucis ad Planetæ velocitatem se habet ut $1 : \sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)} . 20''$; erit in priore formula velocitas lucis ad Planetæ velocitatem ut cosinus angularis distantiæ ipsius Planetæ a Terra, & Sole ad differentiam, vel summam sinuum aberrationis lucis Planetæ, & Stellæ illius fixæ, ad quam e Terra refertur idem Planeta.

II. In

II. In altera vero problematis hujus formula si fiat sin. $X = 0$, in oppositione Planetarum superiorum cum Sole, & in prima, atque inferiore conjunctione Planetarum inferiorum, erit sinus anguli aberrationis $\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right) - 1} \cdot 20''$: & in conjunctione, Planetis inferioribus, aut superioribus ultra Solem positis, erit sinus anguli aberrationis $\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right) + 1} \cdot 20''$: scilicet aberrationis quantitas in primo casu erit ad quantitatem aberrationis in casu altero ut differentia ad summam velocitatum Planetæ, & Terræ. Assumptis igitur ut antea radiis orbitæ uniuscujusque, & substitutis numeris erit aberrationis quantitas

	Saturni	Jovis	Martis	Veneris	Mercurii
in conjunctione	$26\frac{1''}{2}$.	$29\frac{2''}{5}$.	$36\frac{1''}{5}$.	$43\frac{1''}{2}$.	$54''$.
in oppositione	$13\frac{1}{2}$.	$10\frac{3}{5}$.	$3\frac{2}{3}$.		
in conjunctione inferiore				$3\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{3}$.

III. Pro alio autem quolibet Planetarum loco aberrationum tabulæ construi poterunt si valores singuli cosinus, & sinus X substituantur in formula $\frac{\sqrt{\cdot R \sqrt{(r^2 - R^2 \cdot \text{sin.} X^2)}}}{r\sqrt{r}} \cdot 20'' \mp \text{cos.} X \cdot 20''$.

Hac etiam formula spectata singulare theorema habebitur, quod in prima conjunctione inferiorum Planetarum, & in superiorum oppositione aberratio lucis est differentia duarum aberrationum, quarum una cos. $X \cdot 20''$ oritur ex motu annuo Terræ, atque eadem est aberratio Stellæ illius fixæ, ad quam Planeta e Terra referri potest: altera vero $\frac{\sqrt{R \cdot \sqrt{(r^2 - R^2 \cdot \text{sin.} X^2)}}}{r\sqrt{r}} \cdot 20''$ ex motu Planetæ oritur, æquaturque aberrationi Terræ immobilis visæ e Planeta, sive aberrationi alterius Stellæ fixæ, ad quam Terra e Planeta posset referri. In Planetarum conjunctione ultra Solem duarum aberrationum summa accipienda erit.

SCO-

SCHOLION.

D. Clairaut cum in Actis Parisiensis Academiæ anni 1737. ex Bradlejano aberrationis lucis principio formulas aberrationis Stellarum fixarum derivasset, anno postmodum 1746. principium idem a Stellis fixis ad Planetas omnes traduxit, & æquationes omnes inde ortas longiore calculo supputavit. Eulerus etiam in Actis Berolinensibus anni 1748 generales formulas aberrationis Stellarum, Planetarumque, ac Cometarum tradidit, quæ ex terrestris orbitæ excentricitate oriri possunt. Quæ mihi viginti quatuor jam ab hinc annis simplicior hujus theoriæ tradendæ methodus visa est in hoc capite & iis omnibus exhibetur qui in cœlesti Physica erudiri volunt, & iis etiam qui ex institutis observationibus Stellarum, & Planetarum loca ad tempus quodcumque datum supputare vellent; & quia tabularum constructio molestior esset, satis hic fuit faciliorem methodum tradere, qua pro fixa quavis proposita, & proposito quovis Planetæ inferioris, aut superioris loco tabulæ possent construi. Correctiones vero, quæ ex ellipticitate terrestris orbitæ, & orbitarum inclinatione ad Eclipticam possent adjici, negligendæ videntur ob parvitatem. Idem autem aberrationis lucis principium corrigendis Cometarum locis ad normam Theorematis duodecimi applicari facile poterit.

CAPUT SEPTIMUM.

DE VARIATIONIBUS ORTIS EX ÆTHERIS RESISTENTIA.

PROBLEMA XIII.

SI Planeta moveatur in fluido aliquo uniformiter resistente invenire variationem temporis periodici.

Si globus in fluido aliquo progrediatur, & fluidum sic rarum sit ut particulæ omnes tanquam sejunctæ spectari possint, & elasticitas minimarum particularum possit omnino negligi, juxta Coroll. III. Probl. XVI. Lib. III. Mechanicæ resistentia globi erit ad vim qua to-

tus ejus motus auferri posset, vel generari quo tempore globus quatuor tertias partes diametri suæ describit, ut densitas medii ad densitatem globi. Quare si globi radius sit R, & densitatum ratio in medio, & globo sit $1 : D$, post radii longitudinem percursam erit velocitas omnis ad portionem illam quæ amittitur ob resistentiam ut $1 : \frac{3}{8D}$, & si angularis Planetæ motus circa centrum vocetur Z, & radius orbitæ sit A, post spatium AZ percursum erit velocitas amissa $-\frac{3AZ}{8DR}$. Cum igitur ob areas temporibus proportionales data velocitate projectionis angularis motus sit ut quadratum vectoris radii reciproce, & cum ratione hac ipsa variatæ velocitatis ratio universim componi debeat, cumque ob datam vim centripetam radius vector sit ut quadratum velocitatis; angularis motus variabitur in ratione reciproca triplicata velocitatis, sive in ratione $1 : 1 + \frac{9AZ}{8DR}$ quam proxime, & si elementum angularis motus in spatio libero sit dZ, erit in medio resistente $dZ + \frac{9AZ \,.\, dZ}{8DR}$, summisque acceptis erit ipse angularis motus $Z + \frac{9AZ^2}{16DR}$: & quia tempus, quo datus angulus absolvitur circa centrum est reciproce ut motus angularis, minuetur tempus in ratione $Z - \frac{9AZ^2}{16DR} : Z$, & tempus, quo circa centrum angulus Z absolvetur, erit ad variationem ortam ex medii resistentia ut $1 : \frac{9AZ}{16DR}$.

COROLLARIA.

I. Ex priore formula $Z + \frac{9AZ^2}{16DR}$ manifestum est variationem medii motus, & periodici temporis, quæ pendet ex medii resistentia, esse in duplicata ratione motus totius medii a dato loco supputati, sive etiam in duplicata ratione numeri revolutionum absolutarum. Ex altera autem formula $\frac{9AZ}{16DR}$ manifestum est quod si radius A orbitæ terrestris ut antea assumantur 22918 semi-

dia-

diametrorum Terræ R, ne annua medii motus Terræ variatio ſit unius ſecundi, denſitas Terræ D pluſquam vicibus $\frac{9}{16} \times 22918 \times 360^{\circ}$ major eſſe deberet denſitate ætherei medii. Jiſdem formulis, quas Cap. II. Lib. III. Mechanicæ tradidimus, a terreſtri Atmoſphæra ad Solarem traslatis patebit illico circa orbitas Terræ, & Veneris etiam, ac Mercurii lo ıge magis rareſcere atmoſphæram Solis quam ut aliqua inde oriatur variatio mediorum motuum, quæ poſſit quandoque percipi.

II. Generatim vero ſi Planetæ alterius radius ſit r, orbitæ radius a, ratio denſiratum Planetæ ejuſdem, & medii circumfuſi $E : 1$, variationes mediorum motuum pro unaquaque revolutione in priore, atque in hoc altero Planeta habitæ inter ſe erunt ut $\frac{9A}{16DR} : \frac{9a}{16Er}$, & variationem periodicam alterius hujus Planetæ juxta corollatium primum augendo in duplicata ratione temporis, ſive in triplicata ratione mediocris diſtantiæ a Sole, variationes mediorum motuum in binis Planetis habitæ eodem tempore inter ſe erunt ut $\frac{a^3}{DR} : \frac{A^3}{Er}$

Denique ſi maſſæ duorum Planetarum ſint M, & m, ac ſit propterea $D : E = \frac{M}{R^3} : \frac{m}{r^3}$, poſita eadem utrobique medii denſitate, variationes habitæ eodem tempore inter ſe erunt ut $\frac{a^3 R^3}{M} : \frac{A^3 r^3}{m}$.

PROBLEMA XIV.

Iiſdem poſitis invenire variationes medii motus Satellitis.

Circa primarium Planetam A, fig. 20., volvatur Satelles B in circulari orbita $BRQP$, & ſit BM ſpatium, quod juxta tangentem orbitæ deſcribere poſſet Satelles quo tempore fertur primarius ex A in C, & fiat $AC = a$, $BM = b$, ductoque ex B in AC perpendiculo BF fiat inſuper $AB = B$, $AF = x$, $BF = y$. Si ſit BC parallela, & æqualis rectæ AC, compleaturque parallelogrammum $BGDM$, erit abſoluta velocitas Satellitis BD: & ſi ex B in BG, atque in AB ducantur perpendicula DN, DH, erit velocitas radio

perpendicularis $= DH = DG \pm \frac{BF.BC}{AB} = b \pm \frac{ay}{B}$. Erit etiam $DN = \frac{bx}{B}$, $GN = \frac{by}{B}$, & $BD^2 = a^2 + b^2 \pm \frac{2aby}{B}$, & cum b^2 valde exigua sit quantitas respectu a^2, erit quam proxime $BD = a \pm \frac{by}{B}$. His autem positis si resistentia globi in spatio immobili velocitate BM moti accipiatur pro unitate, erit resistentia Satellitis velocitate BD moti $\frac{BD^2}{BM^2}$, & vis quæ inde exsurget perpendiculariter ad radium orbitæ AB, & qua angularis motus Satellitis circa primarium turbabitur, erit $\frac{BD.DH}{b^2} = \frac{1}{b^2}.\overline{a \pm \frac{by}{B}}.\overline{b \pm \frac{ay}{B}}$, atque omissis terminis, qui in tota Satellitis revolutione se mutuo destruunt signorum oppositione, & loco y^2 scribendo valorem medium $\frac{1}{2}B^2$, erit mediocris vis, qua turbabitur motus Satellitis $\frac{3a}{2b}$.

Quod si igitur sit $1:E$ ratio densitatum medii, & Satellitis, ac radius orbitæ Satellitis vocetur r, motus angularis z, arcus vero qui eodem tempore angulari motu describitur Bz, post arcum ipsum percursum minuetur velocitas in ratione $1 - \frac{3Bz}{8Er}.\frac{3a}{2b} : 1$, & si ratio periodicorum temporum Planetæ primarii circa Solem, & Satellitis circa primarium sit $1:n$, ac sit propterea $a:b = A:\frac{B}{n}$, erit velocitas prior ad velocitatem residuam ut $1:1 - \frac{9nAz}{16Er}$, & ratio angularium motuum $1:1 + \frac{27nAz}{16Er}$, summisque acceptis erit omnis angularis motus Satellitis $z + \frac{27nAz^2}{32Er}$.

CO-

COROLLARIA.

I. Variatio igitur motus Satellitis $\frac{27nA\zeta^2}{32Er}$ adhuc erit in duplicata medii totius motus, five etiam temporis, & numeri revolutionum abfolutarum, & fi loco ζ fcribamus $\frac{Z}{n}$, variationes mediorum motuum Planetæ primarii, & Satellitis habitæ eodem tempore inter fe erunt ut $\frac{9AZ^2}{16DR} : \frac{27AZ^2}{32Ern} = \frac{2n}{DR} : \frac{3}{Er}$, & fi quantitas materiæ primarii fit M, Satellitis autem m, ac fit propterea $D:E = \frac{M}{R^3} : \frac{m}{r^3}$, fiet eadem variationum ratio $\frac{2nR^2}{M} : \frac{3r^2}{m}$. Ita igitur breviffime collegimus theorema elegans, quod D. Boffut invenerat in differtatione, quæ anno 1762 a Parifienfi Academia præmium obtinuit.

II. Quia Terræ, & Lunæ diametri funt inter fe ut 365:100 maffæ autem ut $71\frac{1}{3}:1$, quemadmodum ex phænomenis præceffionis æquinoctiorum, & nutationis terreftris axis colligetur fuo loco, pofito $n = \frac{27}{365}$, variationes periodi Terræ, & Lunæ eodem tempore habitæ inter fe erunt ut $1 : \frac{3}{2} \times \frac{365}{27} \times 71\frac{1}{3}\left(\frac{100}{365}\right)^2$. Quare fi æquatio fæcularis medii motus Lunæ ex refiftentia fluidi ætherei oriatur, eaque integro fæculo ad 7″ pertingat circuli unius maximi, quod nonnulli Aftronomi phænomenon ex Arabum obfervationibus ad recentiores alias obfervationes relatis colligere fibi vifi funt; fæcularis æquatio medii motus Terræ ob eamdem cauffam non nifi 0.08″ circiter effe poterit: nimirum fluidi ætherei refiftentia fenfibilem æquationem medii motus Lunæ exhibere poterit quin medium Telluris motum fenfibiliter afficiat.

III. Cum in antlia pneumatica mercurius in barometro fufpenfus non nifi ad trientem unius lineæ poffit deprimi, quæ millefima fere alti-

altitudinis barometricæ pars eſt, nec repetitis emboli agitationibus major haberi poſſit depreſſio, cenſendum erit aerem millies rarefactum per antliæ, & corporum aliorum poros libere tranſire: cumque adhuc rarior in ſuperiore atmoſphæræ parte aer noſter, atque in ſpatiis cœleſtibus æthereum fluidum eſſe debeat; reſiſtentia fluidi Planetarum omnium poros libere permeantis non jam amplius aſſumenda erit extimæ ſuperficiei, ſed integræ ſoliditati proportionalis. Quare ſi in ratione illa $\frac{2n}{DR} : \frac{3}{Er}$, ſive $\frac{2nR^2}{DR^3} : \frac{3r^2}{Er^3}$, loco $\frac{R^2}{D} : \frac{r^2}{E}$ ſcribamus $\frac{R^3}{D} : \frac{r^3}{E}$, variationes mediorum motuum in Terra, & Luna habitæ eodem tempore ſe habebunt ut $\frac{2n}{D} : \frac{3}{E} = \frac{2nR^3}{M} : \frac{3r^3}{m}$, iiſdemque numeris qui antea ſubſtitutis in hac altera hypotheſi ſæculari æquationi Lunæ $7''$ ſæcularis æquatio Terræ $\frac{1}{1}''$ reſpondebit, & adhuc nimis exigua erit quam ut obſervationibus poſſit detegi.

PROBLEMA XV.

Invenire variationes diurni motus, quæ oriri poſſunt ex ætheris reſiſtentia.

Si Planetæ radius ſit r, & radius ad peripheriam ſe habeat ut $1:p$, & velocitas rotationis in æquatore vocetur v, erit momentum Planetæ diurno motu circa axem revoluti $\frac{4}{15}pr^4v$, ut in Probl.IX. Lib.II. Mechanicæ jam dictum eſt, & ſi Planetæ radius pro unitate accipiatur erit momentum idem $\frac{4}{15}pv$. Pariter cum in hypotheſi fluidi Planetæ poros libere permeantis æquale fluidi volumen circumvolutione Planetæ debeat in motum agi, ſi denſitas Planetæ ad denſitatem fluidi permeantis ſe habeat ut $D : 1$, & reſidua velocitas ſub æquatore vocetur u, erit Planetæ ſimul, & fluidi momentum $\frac{4}{15}p \cdot \overline{1+\frac{1}{D}} \cdot u$. Cum igitur juxta Theor. IV. idem Planetæ ſimul, & fluidi momentum eſſe debeat, quod ſublata medii reſiſtentia ſolius Planetæ momentum eſſet, momentis iiſdem exæquatis eruetur $\frac{v-u}{u} = \frac{1}{D}$: & ſi tempus revolutionis circa axem vocetur t,

pe-

periodicæ autem T, pro unaquaque revolutione periodica erit variatio velocitatis circa axem conceptæ $\frac{1}{D} \cdot \frac{T}{t}$: ac denique si velocitas motus periodici sit V, atque ob medii resistentiam fiat U, & orbitæ descriptæ radius vocetur R, post unam diametrum emensam fiet $\frac{V-U}{V} = \frac{1}{D}$, & post integram periodum erit velocitatis variatio $\frac{pR}{2rD}$, & variationes motus periodici, & diurni habitæ eodem tempore inter se erunt ut $pRt : 2rT$.

COROLLARIUM.

Utriusque formulæ applicatione ad Tellurem facta erit in hypothesi fluidi Tellurem omnem libere permeantis velocitas diurni motus ad diurni motus retardationem singulis annis habitam ut $1 : \frac{365\frac{1}{4}}{D}$, & velocitas motus annui ad retardationem annuam ut $1 : \frac{p}{2D} \times 22918$, ac binæ retardationes inter se erunt ut $365\frac{1}{4} : 22918 \times 3.1416$, atque hæc illa vicibus fere 197 erit major. Itaque cum sæcularis æquatio medii motus Terræ, quæ ex medii ætherei resistentia oriri potest, tanto sit minor sæculari æquatione medii motus Lunæ, retardatio diurni motus eamdem ob caussam genita adhuc multo erit minor annui motus retardatione. Generalem æquationem curvæ, quæ in medio resistente describi potest, & generalia resistentiæ phænomena explicabimus cum de problemate trium corporum se se attrahentium sermo erit.

AP.

APPENDIX.

DE SÆCULARI ÆQUATIONE MEDII MOTUS LUNÆ.

HAllejus in notis ad Albategnii obſervationes jam ſuſpicatus fuerat medium tempus periodicum tum Lunæ circa Terram, cum Terræ circa Solem fieri continue brevius. Majerus autem collatis obſervationibus Eclipſium Solis quas Ibn Jonis Memphi inſtituerat annis 977, & 978, medii motus Lunæ æquationem ab iis temporibus ad nos uſque 9′ fuiſſe contendit, & ſæculo hoc noſtro 7″ eſſe oportere, augerique ſemper in duplicata ratione temporis, nullam autem invenit eſſe ſenſibilem medii motus Terræ æquationem. Newtonus pag. 481. prioris editionis Princip. Mathem. ſuſpicatus fuerat ſæcularem Lunæ æquationem inde exoriri quod vapores e Sole, ac ſtellis fixis, Cometarumque caudis aſſurgentes incidant in Terram noſtram, & Terræ maſſam, ac vim attractricem augeant, unde imminuta Lunæ diſtantia periodicum tempus fiat brevius. Is autem locus cum in editione tertia principiorum omiſſus fuerit, fortaſſe conjecturam omnem Newtonus poſtmodum improbavit, ſive quod vapores ex Sole, ac Stellis fixis aſſurgentes ad Terram uſque pervenire nequeant, ſive quod Cometarum caudæ leviores ſint, nec niſi quandoque Cometa aliquis propius Terræ acceſſerit. At ſi ea accelerationis ſit lex, quæ æquationem creſcentem ſemper exhibeat in duplicata ratione temporum, nullo amplius modo hujuſmodi phænomenon ex incremento aliquo terreſtris maſſæ derivari poſſet, unde accelerationes nulla conſtante lege, & ſubſultim dumtaxat haberi poſſent. D. Boſſut in diſſertatione jam memorata oſtendit ex medii ætherei reſiſtentia oriri poſſe æquationem creſcentem ſemper in duplicata illa ratione, & quæ licet in Luna ad 7″ uſque pertingat, in Terra evadere nequeat ſenſibilis. At vero D. la Grange §. XLIII. Diſſertationis de ſæculari Lunæ æquatione, quæ anno 1774 a Pari-

ſienſi

fienfi Academia præmium obtinuit, diligentiffimas Aftronomi alterius fupputationes protulit duarum Eclipfium a Mayero propofitarum, aliarumque etiam Eclipfium, quæ anno æræ noftræ 364, & anno ante æram ipfam 200 Alexandriæ, atque annis 482, & 720 pariter ante æram ipfam Babylone obfervatæ fuerant, & numeris omnibus inter fe collatis tam varias inde conclufiones deduci oftendit, tam varium effe ordinem differentiæ numerorum femel, ac bis acceptæ, tam varios tabularum errores exfurgere habita, aut non habita æquationis fæcularis ratione, ut nihil omnino certi concludi poffit, ac denique nec binas illas Memphiticas obfervationes fatis certas effe animadvertit, ut etiam rejectis aliis vetuftioribus obfervationibus accelerati motus Lunæ indicium aliquod habeatur. Hæc modo de æquationibus mediorum motuum dicta fufficiant. Fufius fuo loco de hoc argumento ipfo, quod olim Havnienfi præmio occafionem præbuit, edifferemus.

CAPUT OCTAVUM.

DE MOTIBUS COMETARUM.

PROBLEMA XVI.

Data diftantia perihelia, & dato tempore poft perihelium, determinare angulum anomaliæ veræ corporis, quod in orbita parabolica moveatur.

Sit $1 : g$ ratio mediocris radii terreftris orbitæ ad diftantiam periheliam *CH* orbitæ parabolicæ *HFQ*, fig. 11., atque ut in Coroll. V. Theor. IX. fit $\frac{4T.\sqrt{2}}{3p}$ tempus, quo corpus in orbita parabolica, quæ diftantia periheliam æqualem habeat radio mediocri terreftris orbitæ, angulum rectum circa focum a perihelio incipiendo defcriberet. Quia per Coroll. V. Theor. X. tempora, quibus æquales anguli in diverfis parabolis defcribuntur, funt in ratione fefquiplicata parametri cujuf-

vis, parameter autem diſtantiæ periheliæ eſt quadrupla; erit $\frac{4T.\sqrt{2}.g^{\frac{3}{2}}}{3p}$ tempus, quo corpus tranſeundo ex H in F in orbita HFQ angulum rectum HCF deſcriberet circa circa focum, & tempus totius tranſitus ex H in Q erit $\frac{4T.\sqrt{2}.g^{\frac{3}{2}}}{3p}.\frac{HCQ}{HCF}$. Fiat $g^{\frac{3}{2}}.\frac{HCQ}{HCF} = h$, ſive ſit $1 : h$ ratio temporis $\frac{4T.\sqrt{2}}{3p}$ ad tempus, quo corpus in orbita parabolica HFQ pervenit ex H in Q. Sit etiam QK tangens, & TQ normalis parabolæ in puncto Q, & ex foco in tangentem ipſam ducatur perpendiculum CP. Poſita diſtantia perihelia $CH = g$, & ſemiordinata $CF = 2g$, erit area $HCF = \frac{4}{3}g^2$, & area $HCQ = \frac{4}{3}hg^{\frac{1}{2}}$. Erit etiam $CQH = \frac{2}{3}HZ.QZ - \frac{1}{2}ZC.QZ$, & cum ſit parabolæ parameter $= 4g$, & $HZ = \frac{QZ^2}{4g}$, fiet eadem area $= \frac{2QZ^3}{12g} - \frac{1}{2}QZ.\overline{\frac{QZ^2}{4g} - g} = \frac{QZ^3}{24g} + \frac{1}{2}g.QZ$. Eſt autem ſubnormalis ZT æqualis ſemiparametro $2g$, atque ob parallelas rectas QT, PC, & æquales angulos QTZ, KCP, QCP eſt $\frac{QZ}{TZ} = \frac{QZ}{2g} = \frac{PK}{PC} =$ tang. $\frac{1}{2}HCQ$. Quod ſi igitur tangens dimidii anomaliæ anguli PCK vocetur t, erit area $HCQ = \frac{1}{3}g^2t^3 + g^2t = \frac{4}{3}hg^{\frac{1}{2}}$, & poſito $\frac{h}{g^{\frac{3}{2}}} = k$, fiet $t^3 + 3t - 4k = 0$, & extracta radice eruetur

$$t = \sqrt[3]{(2k + \sqrt{(4k^2 + 1)})} + \sqrt[3]{(2k - \sqrt{(4k^2 + 1)})}.$$

COROLLARIA.

I. Ita igitur data orbita parabolica Cometæ locus ad tempus quodcumque datum inveniri poterit, & dato tempore inveniri poterit

terit Cometæ locus. Problema hujufmodi Geometrice refolutum, conftructumque dedit Newtonus in Propof. XXX. Lib. I. Princip. Mathem., ac deinde in Propof. XLI. Lib. I. Problema aliud fummo ingenio refolvit ipfe orbitæ parabolicæ ex datis tribus obfervationibus determinandæ. Quam hic ex Hallejo breviter excerpfimus prioris problematis folutio ad calculum magis accomodata eft, atque ad faciliorem fecundi problematis folutionem, de qua inferius agemus, approximationibus quibufdam poteft conducere. Cum enim fit $h =$ $g^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{4}t^3+\frac{3}{4}t\right)$, atque univerfim tempus, quo angulus HCQ defcribitur circa focum, proportionale fit quantitati $t^3 + 3t$; ubi dimidii anguli ejufdem tangens fit adeo magna ut t præ t^3 poffit negligi, dimidii anguli tangens t erit quam proxime in fubtriplicata ratione temporis.

II. Si accipiatur $g = 1$, & parabola illa proponatur, quæ diftantiam periheliam æqualem habeat radio mediocri terreftris orbitæ, in qua juxta Coroll. V. Theor. IX. angulus rectus circa focum a perihelio incipiendo defcribitur tempore $109^d 14^h 46' 13''$; quia tangens dimidii anguli recti eft radio æqualis, tempore eodem aucto ratione $\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}t : 1$, prodibit tempus, quo circa focum defcribetur angulus quicumque alius, cujus dimidii tangens fit t, & conftrui poterit tabula dierum, minutorumque dato cuilibet anomaliæ angulo refpondentium. Tabula hujufmodi habetur etiam To. III. Aftronomiæ Dom. la Lande, eaque per fingulas horas fenas ufque ad dies 100, ac deinde ufque ad 150 per fingulas horas duodecim, & poftmodum per dies fingulos, denos, vicenos, centenos &c. ufque ad dies 100000 fupputata eft.

III. Cum juxta Coroll. V. Theor. X. tempora, quibus æquales anguli circa focum in diverfis parabolis defcribuntur, fint in ratione fubtriplicata rectorum laterum principalium, & latus quodvis principale diftantiæ periheliæ fit quadruplum, fi pro diftantia perihelia parabolæ alterius affumatur quantitas quæcumque a, & tempus, quod in priore illa parabola dato anomaliæ angulo refpondet, multiplicetur per $a^{\frac{3}{2}}$ habebitur tempus, quod in parabola alia propofita æ-

quali angulo anomaliæ veræ respondebit. Ita prior illa parabola; quæ distantiam periheliam æqualem habeat radio mediocri terrestris orbitæ, cujusdam normæ loco esse poterit, in qua æqualibus angulis acceptis Cometæ cujusvis motus comparetur, videaturque num intervallo observationum, & assumptæ distantiæ periheliæ, ac positioni axis respondeat, an vero alia elementa orbitæ sint assumenda.

IV. Determinatis autem semitis plurium Cometarum, iisque comparatis inter se invicem dignosci poterit quæ aut omnino congruunt semitæ, aut tam parum dissentiunt inter se, ut in errores exiguos astronomicarum observationum, ex quibus pendet cujusque semitæ determinatio, aut in exiguas aberrationes actione aliorum Planetarum, Jovis potissimum, ac Saturni, qui superiores sunt, genit s refundi omnis differentia, & Cometa unus, atque idem censeri possit. Ita in celebri tabula illa, qua Hallejus 24 Cometarum orbitas exhibuit, manifestum est Cometam eumdem fuisse, qui annis 1465, 1531, 1607, 1682 apparuit, eumdem scilicet qui exeunte anno 1758 iterum ad nos rediit. Differentia enim motuum in singulis revolutionibus ad se invicem relatorum vix aliquando fuerat duorum graduum, plerumque aliquot minutorum: atque adeo exigua motuum differentia aut in errores exiguos observationum, aut in actiones aliorum Planetarum omnino refundi debet. Quare cum anno 1531 transitus per perihelium fuerit die 24. Augusti, & die 4 Septembris anno 1682, patet Cometæ illius periodum fuisse annorum circiter $75\frac{1}{2}$, nec nisi Jovis, & Saturni attractionibus tribuendum esse, quod in postrema revolutione transitus per perihelium ad diem usque 14 Martii anni 1759 protractus fuerit.

V. Quia in ellipsibus quibuscumque quadrata temporum periodicorum debent esse inter se ut cubi majorum axium, patet axem majorem orbitæ annis $75\frac{1}{2}$ a Cometa illo percursæ ad axem majorem terrestris orbitæ se habere circiter ut 18 : 1. Pariter qui exeunte die 19 Octobris anni 1532 Cometa transiit per perihelium idem videtur esse qui exeunte die 16 Januarii anni 1661 ad perihelii locum redivit. Est igitur Cometæ hujus periodus annorum 128,

&

& trium circiter menſium, eademque ratione major ſemiaxis orbitæ Cometæ ad mediocrem Solis diſtantiam a Terra invenietur eſſe circiter ut $25\frac{1}{2} : 1$. Cometa etiam anni 1680 idem videtur eſſe qui tempore mortis Julii Cæſaris, anniſque 531, & 1106 jam apparuerat: ac propterea Cometæ periodus debet eſſe annorum circiter 575, & major ſemiaxis orbitæ debet eſſe ad mediocrem Solis diſtantiam ut 1382957 : 10000.

PROBLEMA XVII.

Datis binis radiis vectoribus orbitæ parabolicæ, & dato angulo intercepto, angulum diſtantiæ a vertice, & diſtantiam periheliam determinare.

Sint in fig. 21., & 22 bini vectores radii CQ, Cq, & fiat $Cq = a$, $CQ = b$, & angulus QCq ad focum C interceptus vocetur φ. Cum in parabola eſſe debeat $CQ = \frac{CH}{\left(\text{coſ.}\ \frac{1}{2}\, QCH\right)^2}$, & $Cq = \frac{CH}{\left(\text{coſ.}\ \frac{1}{2}\, qCH\right)^2}$, ſi ſcilicet diſtantia perihelia foco C ſit CH; erit etiam $\sqrt{b} : \sqrt{a} = \text{coſ.}\ \frac{1}{2} qCH : \text{coſ.}\ \frac{1}{2}\, QCH$. Eſt autem $\text{coſ.}\ \frac{1}{2}\, qCH = \text{coſ.}\left(\frac{1}{2}\varphi \mp \frac{1}{2}\, QCH\right) = \text{coſ.}\ \frac{1}{2}\varphi \,.\, \text{coſ.}\ \frac{1}{2} QCH \pm \text{ſin.}\ \frac{1}{2}\varphi.$ $\text{ſin.}\ \frac{1}{2} QCH$, ſuperiore ſigno accepto ſi puncta Q, q jaceant in adverſas partes a vertice, inferiore ſi jaceant ad eamdem partem. Erit igitur

$$\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)}.\ \text{coſ.}\ \frac{1}{2} QCH = \text{coſ.}\ \frac{1}{2}\varphi \,.\, \text{coſ.}\ \frac{1}{2} QCH \pm \text{ſin.}\ \frac{1}{2}\varphi \,.\, \text{ſin.}\ \frac{1}{2} QCH,$$

$$\frac{\text{ſin.}\ \frac{1}{2}\, QCH}{\text{coſ.}\ \frac{1}{2}\, QCH} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \frac{1}{\text{ſin.}\ \frac{1}{2}\varphi} \mp \frac{\text{coſ.}\ \frac{1}{2}\varphi}{\text{ſin.}\ \frac{1}{2}\varphi}$$

$$\text{tang.}\ \frac{1}{2} QCH = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)}\ .\ \text{coſec.}\ \frac{1}{2}\varphi \,.\, \mp \text{cotang.}\ \frac{1}{2}\varphi.$$

Hoc autem poſito ſi ducta tangente QK fiat angulus $CQK =$

CKQ

$CKQ = \frac{1}{2} QCZ = \frac{1}{2} \omega$, tangens dimidii anguli QCH æqualis erit cotangenti dimidii anguli QCZ, ac fiet

$$\sqrt{a} \cdot \frac{\text{cof.} \frac{1}{2} \omega}{\text{fin.} \frac{1}{2} \omega} = \pm \frac{\sqrt{b}.}{\text{fin.} \frac{1}{2} \varphi} \mp \frac{\sqrt{a}. \text{cof.} \frac{1}{2} \varphi}{\text{fin.} \frac{1}{2} \varphi}$$

$$b - 2\sqrt{ab}.\text{cof.} \tfrac{1}{2} \varphi + a.\text{cof.} \tfrac{1}{2} \varphi^2 = \frac{a\left(1 - \text{fin.} \frac{1}{2} \omega^2\right). \text{fin.} \frac{1}{2} \varphi^2}{\text{fin.} \frac{1}{2} \omega^2}$$

$$\left(a + b - 2\sqrt{ab}. \text{cof.} \tfrac{1}{2} \varphi\right). \text{fin.} \tfrac{1}{2} \omega^2 = a. \text{fin.} \tfrac{1}{2} \varphi^2:$$

eritque diſtantia perihelia $CH = b. \text{fin.} \frac{1}{2} \omega^2 = \dfrac{ab. \text{fin.} \frac{1}{2} \varphi^2.}{a + b - 2\sqrt{ab}. \text{cof.} \frac{1}{2} \varphi}$

COROLLARIA.

I. Fiat exempli loco $a = 4.6893$, $b = 4.5634$, $\frac{b}{a} = 0.97315164312$, $\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)} = 0.98648443$, & angulus φ accipiatur graduum 87, atque anguli dimidii ſinus ſit 68835 . 45, cotangens 105378 . 01 in circulo cujus radius ſit 100000. Quadratum radii ducendo in $\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)}$, & per ſin. $\frac{1}{2} \varphi$ dividendo habebimus 143310.52, ſubductaque cotang. $\frac{1}{2} \varphi$ fiet tang. $\frac{1}{2} QCH = 37932.41$, quæ tangens reſpondet angulo 20° 46′ 22″, adeoque punctis Q, q jacentibus in adverſas partes a vertice H angulus QCH erit 41° 32′ 44″, & angulus qCH erit 45° 27′ 16″: atque ita ope prioris formulæ datis binis radiis vectoribus, & dato angulo intercepto angulus diſtantiæ a vertice parabolæ facillime ſupputari poterit.

III. Dato autem angulo QCH, diſtantia perihelia CH illico eruetur ex æquatione $CH = b. \text{cof.} \frac{1}{2} HCQ^2$. Ita cum in allato exemplo coſinus anguli 20° 46′ 22″ ſatis proxime aſſumi poſſit 0.935 par-

partium radii fiet diſtantia perihelia 3.9894, ſcilicet fere quadrupla mediocris diſtantiæ Terræ a Sole. Formula autem alia $CH = \frac{ab . \text{ſin.} \frac{1}{2} \varphi^2}{a + b - 2\sqrt{ab} . \text{coſ.} \frac{1}{2}\varphi}$, quam adeo facile ex priore illa collegimus ad ſimpliciorem areæ parabolicæ expreſſionem conducit maxime. Hujuſmodi formulam præmiſſis novis aliquot lemmatis Geometricis demonſtravit celebris Lambert §. 18. Sect. I. de inſignioribus orbitæ Cometarum proprietatibus. Demonſtrationem aliam protulit D. Tempelhoff initio Diſſertationis, quæ anno 1778. a Berolinenſi Academia præmium obtinuit.

PROBLEMA XVIII.

Iiſdem poſitis aream parabolæ, quæ binis radiis vectoribus intercipitur, determinare.

Si in fig. 33. ſint bini vectores radii CQ, Cq, & binæ ſemiordinatæ QZ, qz, ac ſit QV axi HZ parallela, ducaturque ſubtenſa parabolæ Qq, ac fiat $Cq = a$, $CQ = b$, $QZ = y$, $HZ = x$, atque angulus QCq ut antea vocetur φ; erit

$$b = HZ + CH,\ a = Hz + CH,\ Zz = QV = a - b,$$

$$Qq^2 = a^2 + b^2 - 2ab . \text{coſ.}\ \varphi = QV^2 + Vq^2 = \overline{a - b}^2 + Vq^2,$$

$$Vq^2 = 2ab . \overline{1 - \text{coſ.}\varphi} = 4ab\ \text{ſin.} \tfrac{1}{2}\varphi^2,\ Vq = 2\sqrt{ab} . \text{ſin.} \tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$HZ = x = b - CH = \frac{ab + b^2 - 2b.\sqrt{ab}.\text{coſ.}\frac{1}{2}\varphi - ab.\overline{1 - \text{coſ.}\frac{1}{2}\varphi^2}}{a + b - 2\sqrt{ab}.\text{coſ.}\frac{1}{2}\varphi},$$

$$HZ = \frac{\left(\sqrt{ab}.\text{coſ.}\frac{1}{2}\varphi - b\right)^2}{a + b - 2\sqrt{ab}.\text{coſ.}\frac{1}{2}\varphi},\ QZ = y = \sqrt{(4CH . HZ)} = \frac{2\left(\sqrt{ab}.\text{coſ.}\frac{1}{2}\varphi - b\right).\sqrt{ab}.\text{ſin.}\frac{1}{2}\varphi.}{a + b - 2\sqrt{ab}.\text{coſ.}\frac{1}{2}\varphi}$$

Eſt

Eſt autem ſector parabolicus $QCqR =$

$$\frac{2}{3} Hz . zq - \frac{2}{3} HZ . ZQ + \frac{1}{2} CZ . QZ - \frac{1}{2} Cz . qz$$

$$= \frac{2}{3}(x + a - b)(y + 2\sqrt{ab}.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi) - \frac{2}{3} xy$$

$$+ \frac{1}{2}(x - CH) y - \frac{1}{2}(x - CH + a - b)(y + 2\sqrt{ab}.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi)$$

$$= \frac{1}{3}(a - b)\sqrt{ab}.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi + \frac{1}{6}(a - b).y + \frac{1}{3}x.\sqrt{ab}.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi + CH.\sqrt{ab}.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$= \frac{1}{3} a.\sqrt{ab}.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi + \frac{1}{6}(a - b) y + \frac{2}{3} CH.ab.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi$$

Jam vero ſi loco y, & CH ſubſtituantur valores iidem qui ſupra, fient bini poſteriores termini

$$\frac{\frac{1}{3}(a - b)(\sqrt{ab}.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\varphi - b)\sqrt{ab}.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi + \frac{2}{3} ab.\sqrt{ab}.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi^2}{a + b - 2\sqrt{ab}.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\varphi}$$

& poſito $-\frac{1}{3} ab^2 \text{coſ.}\tfrac{1}{2}\varphi.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi = -\frac{2}{3} ab^2.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\varphi.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi + \frac{1}{3} ab^2.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\varphi.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi$, & $\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi^2 = 1 - \text{coſ.}\tfrac{1}{2}\varphi^2$, fractionis hujus poſterioris numerator reducetur ad formam

$\frac{1}{3}(a + b - 2\sqrt{ab}.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\varphi)(b.\sqrt{ab}.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi + ab.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\varphi)$. Erit igitur area parabolica $QCqR = \frac{1}{3}\sqrt{ab}.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi(a + b + \sqrt{ab}.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\varphi)$.

COROLLARIA.

Si ex Q in Cq ducatur perpendiculum Qv, cum ſit $Qv = b.\text{ſin.}\varphi$, & triangulum $QCq = \frac{1}{2} ab.\text{ſin.}\varphi = ab.\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\varphi$, hujuſmodi triangulum ex area omni parabolica $QCqR$ ſubducendo ſupererit ſegmentum parabolicum $QqR = \frac{1}{3}\sqrt{ab}\,\text{ſin.}\tfrac{1}{2}\varphi(a + b - 2\sqrt{ab}.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\varphi)$. Hujuſmodi formulam alia methodo eruerat D. Lambert § 28, & 29. Sectionis primæ Opuſculi jam memorati. Ea vero & ſimpliciſſima eſt, & ad ſupputandum tempus, quo Cometæ ad diſtantiam datam datum angulum deſcribunt circa Solem, maxime expedita.

II. Si punctum q in perihelii locum C incidat, & ſit $a = CH = b.\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\varphi^2$, factis ſubſtitutionibus pro area parabolica QCH habebimus

mus $\frac{1}{3}\,b^{2}.\text{cof.}\,\frac{1}{2}\,\varphi.\text{fin.}\,\frac{1}{2}\,\varphi + \frac{2}{3}\,b^{2}.\text{fin.}\,\frac{1}{2}\,\varphi.\text{cof.}\,\frac{1}{2}\,\varphi^{2}$: & cum fit fin. $\frac{1}{2}\,QCH =$ cof. $\frac{1}{2}\,QCZ$, cof. $\frac{1}{2}\,QCH =$ fin. $\frac{1}{2}\,QCZ =$ fin. $CQK =$ fin. CKQ, fi angulus quem radius vector cum tangente, & arcu parabolæ, aut tangens cum axe efficit, vocetur ω, erit area parabolica, quæ eodem vectore radio, & diftantia perihelia intercipietur $\frac{1}{3}\,b^{2}\,\text{fin.}\,\omega.\text{cof.}\,\omega. + \frac{2}{3}\,b^{2}\,\text{cof.}\,\omega.\text{fin.}\,\omega^{2}$: quod directe etiam, ac facile ex prioribus parabolæ proprietatibus poteft colligi.

PROBLEMA XIX.

Iifdem pofitis determinare tempus, quo Cometa aliquis datum angulum defcribendo circa focum ab uno ad alium vectorem radium tranfire poteft.

Quoniam pofitis omnibus ut in Coroll. V. Theor. IX. eft $\frac{4T.\sqrt{2}}{3p}$ tempus, quo angulus rectus circa focum a perihelio incipiendo in ea parabola defcribi poteft, quæ diftantiam periheliam æqualem habeat radio mediocri terreftris orbitæ, tempora autem, quibus æquales anguli circa focos in diverfis parabolis defcribuntur, funt ut radices quadratæ cubi diftantiæ periheliæ, erit $\frac{4T.\sqrt{2}.CH^{\frac{3}{2}}}{3p}$ tempus, quo in parabola HQq rectus angulus circa focum a perihelio pariter incipiendo defcribetur. Eft autem $\frac{4}{3}\,CH^{2}$ area parabolæ, quæ rectum eumdem angulum comprehendit, & areæ circa focum defcriptæ funt proportionales temporibus, quibus defcribuntur. Reaffumpta igitur formula problematis antecedentis tempus, quo defcribetur angulus QCq, debebit effe

$$\frac{T.\sqrt{2}.}{p.CH^{\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{3}\sqrt{ab}.\text{fin.}\,\frac{1}{2}\varphi + \left(a + b + \sqrt{ab}\,\text{cof.}\,\frac{1}{2}\,\varphi\right),$$

& loco $CH^{\frac{1}{2}}$ fcribendo $\sqrt{ab}\,.\,\text{fin.}\,\frac{1}{2}\,\varphi.\left(a + b - 2\sqrt{ab}.\text{cof.}\,\frac{1}{2}\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}$ pro expreffione temporis quæfiti habebimus

$$\frac{T.\sqrt{2}}{3p}\left(a+b+\sqrt{ab}.\text{cof.}\tfrac{1}{2}\varphi\right)\sqrt{\left(a+b-2\sqrt{ab}\,\text{cof.}\tfrac{1}{2}\varphi\right)}.$$

COROLLARIA.

I. Cum in denominationibus Coroll. V. Theor. IX. radius mediocris terreſtris orbitæ pro unitate acceptus fuerit, & pro ratione $1:p$ accepta fuerit ratio ſemidiametri ad peripheriam; erit $\frac{1}{2}p$ area, quæ terreſtri orbita comprehendetur, & anni ſiderei tempus ſe habebit ad tempus, quo Cometa aliquis ab uno ad alium vectorem radium dato angulo inclinatum tranſire poſſet, in ratione directa ſimplici areæ terreſtris orbitæ ad aream parabolicam binis iis radiis vectoribus definitam, & in ratione reciproca ſubduplicata ſemidiametri mediocris orbitæ terreſtris ad ſemiparametrum $2CH$ orbitæ parabolicæ: nec niſi & area terreſtris orbitæ accepta pro unitate, & anni ſiderei tempore pro unitate alia aſſumpto quæſitum tempus exæquari poterit areæ parabolicæ per radicem ſemiparametri diviſæ, quod generatim ſtatuerunt D. D. Euler, & Lexell §. LVII. Diſſertationis de Elliptica Cometæ orbita Petropoli editæ anno 1770.

II. Si alteruter ex radiis vectoribus ſit ipſa diſtantia perihelia; atque ut in Coroll. II. problematis antecedentis ſit $a = b.\text{cof.}\frac{1}{2}\varphi^2 = b.\text{ſin.}\,\omega^2$, & area parabolica $\frac{1}{3}b^2.\text{ſin.}\,\omega.\ \text{cof.}\,\omega + \frac{2}{3}b^2.\text{cof.}\,\omega.\text{ſin.}\,\omega^3$; erit tempus quo Cometa a perihelio ad radium uſque vectorem b angulo ω ad tangentem, & curvam inclinatum perveniet

$$\frac{T.b^{\frac{3}{2}}.\sqrt{2}}{p}\left(\frac{1}{3}\,\text{cof.}\,\omega+\frac{2}{3}\,\text{cof.}\,\omega.\text{ſin.}\,\omega^2\right)$$

$$=\frac{T.b.\sqrt{2b}}{p}\left(\text{cof.}\,\omega-\frac{2}{3}\,\text{cof.}\,\omega^3\right)$$

$$=\frac{T.b.}{p}\sqrt{\tfrac{1}{2}b}\left(\text{cof.}\,\omega-\frac{1}{3}\,\text{cof.}\,3\,\omega\right).$$

Problema in actis Lipſienſibus propoſitum alia ratione ad has formulas deductum eſt in citata Diſſertatione §. XLV.

PRO-

PROBLEMA XX.

Datis binis radiis vectoribus, & data parabolæ subtensa, determinare tempus, quo ab uno ad alium vectorem radium Cometa aliquis posset transire.

Fiat subtensa $Qq = c$, & positis aliis omnibus ut in Probl. XVIII. fiat $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \text{cos.}\,\varphi$. Reductionibus aliis factis debebit esse

$$\text{cos.}\,\varphi = 1 - 2\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2 = 2\,.\,\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2 - 1 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2 = \frac{2ab + c^2 - a^2 - b^2}{4ab} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{4ab}$$

$$\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2 = \frac{ab + a^2 + b^2 - c^2}{4ab} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4ab},$$

atque his factis substitutionibus in posteriore formula problematis antecedentis fiet quæsitum tempus

$$\frac{T.\sqrt{2}}{3p}\left(a+b+\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\overline{a+b}^2 - c^2\right)}\right)\sqrt{\left(a+b-\sqrt{\left(\overline{a+b}^2 - c^2\right)}\right)}.$$

Est autem $\sqrt{(\overline{a+b}^2 - c^2)} = \sqrt{(a+b+c)}\sqrt{(a+b-c)}$,

$$\sqrt{\left(a+b-\sqrt{(\overline{a+b}^2 - c^2)}\right)} = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}:$$

Itaque erit tempus quo Cometa ab uno ad alium radium transibit

$$\frac{T.\sqrt{2}\,(a+b)}{3p}\left(\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}\right)$$

$$+\frac{T.\sqrt{2}}{3p}\left(\tfrac{1}{2}\,(a+b+c)\sqrt{\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}\right)$$

$$-\frac{T.\sqrt{2}}{3p}\left(\tfrac{1}{2}\,(a+b-c)\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}\right)$$

$$= \frac{T\sqrt{2}}{3p}\left(\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

COROLLARIA.

I. Si ratio peripheriæ ad integram diametrum assumatur 314159:100000, & anni siderei tempus statuatur dierum 365.25659, fiet

fiet $\frac{2T}{p} = 116.2648$, atque erit quæſitum tempus dierum

$$\frac{116.2648}{3.\sqrt{2}}\left(\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right):$$ quam adeo ſimplicem, atque elegantem formulam alia methodo erutam tradidit Dom. Lambert in Sect. II. Probl. XV. §. LXXXII. Formulam etiam problematis antecedentis alia ratione exhibuit Lambertus §. LXXIX. Analyticas alias formularum earumdem demonſtrationes tradiderunt D. la Grange in actis Berolinenſibus anni 1775, & D. la Place in illuſtri opere nuper edito de motu, & figura elliptica Planetarum. Demonſtrationem aliam hic volui adjicere quod nihil mihi videretur iis formulis ad ſupputandum Cometarum motum exhiberi poſſe ſimplicius.

II. Cum ſit $\sqrt{2} = 1.41421$, fiet $\frac{116.2648}{3\sqrt{2}} = 27.40394$, ſeu proxime $27\frac{2}{5}$, & ſi bini vectores radii ſint a, & b, atque angulum φ intercipiant, & rectam c ad parabolæ perimetrum ſubtendant; tempus, quo ab uno ad alterum radium fiet tranſitus, erit dierum 27.40394 ductorum in

$$\left(a+b+\sqrt{ab}.\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\varphi\right)\sqrt{\left(a+b-2\sqrt{ab}.\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\varphi\right)}$$

vel etiam in $\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{a+b-c}{1}\right)^{\frac{3}{2}}$:

recta autem c ex angulo φ, atque ex radiis a, & b definietur ope æquationis $c = \sqrt{(b^2+b^2-2ab.\,\text{coſ.}\varphi)}$.

III. Si ut in Coroll. I. Probl. XVII. fiat $a = 4.6893$, $b = 4.5634$, $\varphi = 87^\circ$, eruetur $c = 6.3646$, atque erit $\frac{a+b+c}{2} = 7.81108$, $\frac{a+b-c}{2} = 1.44162$,

$$\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = 20.09973,$$

&

& posteriore hoc numero ducto in 27 . 40394, prodibunt dies 550.8118, atque erit dierum 550, horarum 19, minutorumque proxime 35 tempus, quo ab uno ad alium ex iis radiis vectoribus fiet transitus. Exempla alia simili modo addi possent. Hic indicabimus quanam ratione quæ arithmetici calculi series, & falsarum positionum correctio ad parabolicam Cometarum orbitam ex tribus longitudinis, & latitudinis observationibus determinandam satis accurata, & simplex Astronomis visa est, ope formularum antecedentium adhuc simplicior, & facilior reddi possit,

PROBLEMA XXI.

Datis tribus observationibus longitudinis, & latitudinis Cometæ orbitam parabolicam determinare.

Sit in fig. 24 Cometæ semita HQq, Terræ Tt, & sint Q, q bina Cometæ loca dum Terra reperitur in T, t. Ex Q, & q in planum Eclipticæ CTt ducantur perpendicula QP, qp, ac sint propterea TP, tp distantiæ, quæ curtatæ appellantur, Cometæ a Terra, & PC, pC distantiæ curtatæ a Sole. Sint etiam CTP, Ctp anguli elongationis Cometæ a Sole ad Eclipticæ planum reducti: anguli commutationis PCT, pCt anguli ad centrum, sive anguli parallaxis annuæ CPT, Cpt: latitudines Geocentricæ PTQ, ptq, Heliocentricæ PCQ, pCq. Si binis observationibus innotescant duo loca Q, q, ad quæ e centro Terræ referri potest Cometa aliquis, dabitur etiam utriusque loci latitudo Geocentrica, & bini elongationis anguli pariter innotescent, dataque observationis utriusque tempore Solis longitudine innotescent binæ longitudines Cometæ, & dabitur differentia utriusque longitudinis, sive angulus PCp, qui ad Solem C, ac focum orbitæ parabolicæ a binis Cometæ locis ad Eclipticæ planum reductis subtenditur.

Distantia curtata Cometæ a Terra, vel a Sole observationis utriusque tempore assumatur illa, quæ veræ videatur propius accedere. Dato enim angulo elongationis, & radio vectore terrestris orbitæ; dataque una distantia curtata observationis tempore illico altera determinabitur. Nam si angulus CTP vocetur ϖ erit $CP^2 = PT^2 + CT^2 \mp 2CT.PT.\text{cos}.\varpi$, & inde eruetur $PT = CT.\text{cos}.\varpi \pm \surd(CP^2 - CT^2.\text{sin}.\varpi^2)$. Simili modo si angulus PCp, qui differen-

tentiam duarum longitudinum metitur, vocetur π, erit $Pp = \surd\ (CP^2 + Cp^2 \mp 2CP.Cp.\text{cof.}\,\pi)$, ac datis binis diſtantiis curtatis PC, Cp, datoque angulo intercepto, dabitur etiam recta Pp. Erit inſuper $QP = PT.\text{tang.}\ QTP$, $qp = pt.\text{tang.}\ qtp$, $CQ = \surd\ (CP^2 + PQ^2) = b$, $Cq = \surd\ (Cp^2 + pq^2) = a$, $Qq = \surd\ (Pp^2 + \overline{pq - PQ}^2) = c$. Datis igitur binis latitudinibus Geocentricis, & angulis elongationis, dataque obſervationis utriuſque tempore longitudinum differentia, & diſtantiis curtatis a Sole, aut Terra aſſumptis iis, quæ videantur veris propiores, ſupputari poterunt quantitates aliæ, quas in problemate antecedente litteris a, b, c deſignavimus. Poſitis autem hiſce omnibus ſi tempus, quod utramque inter obſervationem intercedit, vocetur T, & ſi recte aſſumptæ ſint diſtantiæ illæ curtatæ, juxta ſecundum corollarium ſuperius debebit eſſe

$$\frac{T}{27 \cdot 40394^d} = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^{\frac{3}{2}}:$$

Pariter erit cof. $\frac{1}{2}\,QCq = \text{cof.}\ \frac{1}{2}\,\varphi = \frac{1}{2}\surd\left(\frac{\overline{a+b}^2 - c^2}{ab}\right)$,

ac ſi recte diſtantiæ illæ aſſumptæ ſint ſimili modo debebit eſſe

$$\frac{T}{27 \cdot 40394^d} = \left(a + b + \surd ab\ \text{cof.}\,\tfrac{1}{2}\,\varphi\right)\surd\left(a + b - 2\surd ab.\text{cof.}\ \tfrac{1}{2}\,\varphi\right).$$

Niſi vero utraque, vel alterutra ex binis hiſce æquationibus omnino accurate exſurgat, alterutra ex binis quantitatibus a, b, & quæ inde pendet diſtantia curtata Cp, vel CP corrigenda erit, & augenda aut minuenda, quouſque ii vectores radii a, b, & is angulus φ prodeat, qui binis ſimul obſervationibus reſpondeat. Hoc autem dato angulus anomaliæ veræ QCH, & diſtantia perihelia CH ex aliis antecedentibus æquationibus ſupputari poterit. Erit ſcilicet

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}\,QCH = \surd\left(\frac{b}{a}\right).\text{coſec.}\ \tfrac{1}{2}\,\varphi - \text{cotang.}\,\tfrac{1}{2}\,\varphi$$

$$CH = \frac{ab.\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}\,\varphi^2.}{a + b - \surd ab\ \text{cof.}\,\tfrac{1}{2}\,\varphi^2}$$

Quod

Quod insuper sit δ angulus latitudinis Heliocentricæ qCp, ψ angulus latitudinis alterius QCP, & sit Dd linea nodorum, atque in ipsam ex q, & Q demittantur perpendicula qx, QX, erit

$$\text{sin.}\,\delta : \text{sin.}\,\psi = \frac{QP}{QC} : \frac{qp}{qC} = \frac{QX}{QC} : \frac{qx}{qC} = \text{sin.}\,QCD : \text{sin.}\,qCD,$$

& loco sin. qCD, sive sin. $\overline{QCD - \varphi}$ scribendo sin. QCD . cos φ — cos. QCD. sin. φ, eruetur cotang. QCD = cotang. $\varphi - \frac{\text{sin.}\,\psi}{\text{sin.}\,\delta .\ \text{sin.}\,\varphi}$:

ac denique dato angulo QCD distantiæ a nodorum linea dabitur angulus QXP inclinationis orbitæ ad Eclipticam, eritque

$$\text{sin.}\,QXP = \frac{QP}{QX} = \frac{QP}{QC.\text{sin.}\,QCD} = \frac{\text{sin.}\,\psi.}{\text{sin.}\,QCD}$$

Ita igitur una assumpta distantia curtata, & distantiam aliam augendo, vel minuendo determinari poterit parabola aliqua, quæ binis simul observationibus respondeat, & singula elementa parabolæ innotescent, distantia perihelia, & latus rectum principale, nodorum, & axis locus, atque orbitæ inclinatio ad Eclipticam. Ut vero innotescat etiam num prior illa distantia curtata recte assumpta fuerit, observationes binæ ad tertiam referendæ erunt. Scilicet si tangens dimidii anguli QCH vocetur t, & T jam denotet anni siderei tempus, juxta formulas Probl. XVI. erit $1 : CH^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}t\right)$ ratio temporis $\frac{4T.\sqrt{2}}{3p}$ ad tempus, quo in parabola proposita arcus QH, & angulus QCH absolvetur, atque adjuncto tempore, quod primam inter, ac tertiam observationem intercedit si summa, duorum temporum, seu tempus transitus ex q' in Q per $\frac{4T.\sqrt{2}CH^{\frac{3}{2}}}{3p}$ divisum vocetur k, erit

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,HCq = \sqrt[3]{(2k+\sqrt{(4k^2+1)})} + \sqrt[3]{(2k - \sqrt{(4k^2+1)})},$$

eritque radius vector $Cq' = \frac{CH}{(\text{cos.}\frac{1}{2}\,HCq)^2}$,

& sinum anguli inclinationis orbitæ ad Eclipticam per hunc ipsum vecto-

vectorem radium Cq' dividendo prodibit finus latitudinis Heliocentricæ $p'Cq'$.

At denique datis latitudinibus Heliocentricis PCQ, pCq, & dato angulo QCq, quem Cometa defcribit in propria orbita, unica trianguli fphærici refolutione eruetur angulus PCp, quem Cometa defcribit in plano Eclipticæ. Nam fi in fig. 25 planum Eclipticæ fit LPN, polus autem fit O, atque ex O in LPN ducantur bini circuli maximi OP, ON, qui arcum PN motus ad Eclipticam reducti intercipiant, & fint binæ latitudines Heliocentricæ QP, MN, & fit QM angularis motus, qui a Cometa ad Solem fubtenditur, dato latere QM, & binis aliis lateribus OQ, OM, quæ funt latitudinum complementa, angulus interceptus QOM, vel PON eruetur ex fimplici illa Trigonometricæ fphæricæ analogia fin. OQ fin. OM: $1 =$

$$\text{fin.}\left(\frac{OQ+QM-OM}{2}\right)\text{fin.}\left(\frac{QM+OM-OQ}{2}\right):\text{fin.}\overline{\tfrac{1}{2}PON}^2.$$

Is autem angulus nifi fit ipfa duarum longitudinum differentia, quæ primæ, ac tertiæ obfervationis tempore deprehenditur corrigenda erit prior hypothefis diftantiæ curtatæ PC, & vectoris radii QC, fig. 24, quoufque eodem proceffu calculi parabola illa determinetur, quæ tribus fimul obfervationibus fatisfaciat.

COROLLARIA.

I. Si loco diftantiarum CP, Cp binæ quantitates variabiles x, y affumantur, ac valor diftantiæ PT, qui ex æquatione $PT = CT.\text{cof.}\,\varpi \pm \sqrt{(x^2 - CT^2.\text{fin.}\,\varpi^2)}$ eruitur, & quantitatis Pp valor, qui eruitur ex æquatione $Pp = \sqrt{(x^2 + y^2 \mp 2xy.\text{cof.}\,\pi)}$, fubftituantur in æquationibus aliis, quæ valorem quantitatum QP, qp, Qq determinant; una habebitur æquatio, quæ binas fimul variabiles x, y involvet: & fi loco Cp affumatur variabilis alia z, primam obfervationem cum tertia, & deinde fecundam comparando binæ aliæ æquationes habebuntur, & omnes fimul ad trium variabilium determinationem, atque ad directam folutionem problematis fufficient. Cum enim ad orbitam parabolicam determinandam quatuor occurrant quantitates, latus rectum principale, nodorum, & axis locus, atque orbitæ inclinatio ad Eclipticam, quarta erit æqua-

tio

tio, quæ tribus prioribus obvolvitur, quæque eruitur ex proportionalitate temporum obſervationibus interjacentium, & arearum circa focum deſcriptarum. Si orbita Cometæ ſpectaretur veluti elliptica, quinta inſuper æquationi quantitas advolveretur, nimirum orbitæ excentricitas, & calculo ſimiliter inſtituto quatuor obſervationibus ad orbitam ellipticam determinandam eſſet opus.

II. Qui vero æquationes hujuſmodi conſideret, eas implexas adeo, & radicalibus quantitatibus obvolutas eſſe inveniet, ut alia calculi compendia ad orbitæ parabolicæ determinationem inquiri debeant. Quam Aſtronomi plerumque ſecuti ſunt falſæ poſitionis methodus, & diſtantiarum correctio, ut in hoc problemate expoſita a nobis eſt, atque ad illas Lamberti formulas deducta, moleſtiam quidem calculi quandoque, nullam autem difficultatem exhibere poteſt, & in caſu quovis propoſito alia etiam compendia ſuggeret. Cum enim dato radio vectore terreſtris orbitæ, & dato angulo elongationis, diſtantiæ curtatæ a Terra, & Sole obſervationis cujuſque tempore una ex altera poſſint colligi, cumque poſt primam apparitionem Soli propius accedere ſoleant Cometæ; ex luce capitum dignoſcetur num etiam Terræ accedant propius, aut inde recedant, & diſtantiæ curtatæ poſt apparitionem ipſam minores ſemper, aut minor una, & major altera aſſumenda ſit, ac norma aliqua habeatur ne longius calculi evagentur, & ne obſervationes ſæpius debeant repeti.

III. Inſuper in triangulo *CTP* diſtantia curtata Cometæ a Sole erit ad radium vectorem terreſtris orbitæ ut ſinus anguli elongationis *CTP* ad ſinum anguli parallaxis annuæ *CPT*, datiſque binis hiſce angulis dabitur reſiduus commutationis angulus *TCP*. Tangens etiam latitudinis Geocentricæ ad tangentem latitudinis Heliocentricæ ſe habebit ut $\frac{QP}{TP} : \frac{QP}{CP} = CP : TP = \text{ſin.}\, CTP : \text{ſin.}\, PCT$, nimirum ut ſinus anguli elongationis ad ſinum anguli commutationis; atque ita ex notis Trigonometriæ planæ elementis facilior habebitur latitudinis Heliocentricæ ſupputatio, atque in delectu obſervationum Aſtronomicarum dumtaxat curandum erit ne exiguo temporis intervallo obſervationes ipſæ accedant propius, & ne in triangulo quovis *CTP* angulus aliquis propior ſit recto: quo in caſu exiguus etiam error obſervationum, ob variationem exiguam ſinuum, errorem calculi non ita exiguum poſ-

ſet gignere. Idem autem erit ſemper proceſſus calculi ſive poſt primam obſervationem ad Eclipticæ planum Cometa accedat, ſive inde recedat longius, & ad eamdem plagam ſimul cum Terra, aut ex adverſo reperiatur, aut ſi dum tendit Cometa ex q in Q, feratur Terra ex t in T, aut contrariam habeat motus directionem, & Cometa non directus ſit, ſed retrogradus.

IV. Qua etiam ratione in poſtrema problematis hujus parte angularis motus Cometæ in propria orbita ad Eclipticæ planum una trianguli ſphærici reſolutione reductus fuerat, ſic data longitudinum differentia in priore parte problematis motus angularis Cometæ in propria orbita ſupputari poterit. Nam ſi in fig. 25 ex M perpendiculariter ad OP ducatur arcus circuli maximi MR, in triangulo ſphærico MOR erit ſinus totus ad ſinum anguli O motus PN ad Eclipticam reducti ut tangens OM, ſeu cotangens majoris latitudinis MN, ad tangentem prioris ſegmenti OR, eoque detracto ex arcu OQ, qui eſt complementum minoris latitudinis QP, ſi angulus O ſit acutus, addito autem ſi hujuſmodi angulus ſit obtuſus, ſupererit ſegmentum RQ, eritque coſinus prioris ſegmenti OR ad coſinum ſegmenti alterius RQ ut coſinus arcus OM, qui eſt ſinus majoris latitudinis, ad coſinum anguli, & arcus QM. Ita autem dato angulo φ, aſſumptiſque radiis vectoribus a, & b, devenietur ad æquationem

$$\frac{T}{27.40394^4} = \left(a+b+\sqrt{ab}\,.\,\text{coſ.}\tfrac{1}{2}\varphi\right)\sqrt{\left(a+b-2\sqrt{ab}\ \text{coſ.}\tfrac{1}{2}\varphi\right)}:$$

& qui poſteriore æquatione alia uti velit, valorem ſubtenſæ c ex angulo eodem φ, atque ex radiis a, & b facile ut antea colliget.

V. Denique cum orbitæ parabolicæ elementa innotuerint, Cometæ locus ad tempus datum ſupputari poterit ope æquationis

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}HCQ = \sqrt[3]{\left(2k+\sqrt{(4k^2+1)}\right)} + \sqrt[3]{\left(2k-\sqrt{(4k^2+1)}\right)}.$$

In ellipticis etiam Planetarum orbitis cum tempus ſit motui medio, & areæ circa focum deſcriptæ proportionale, dato tempore Planetæ cujuſque locus facile ex iis ſeriebus erui poterit, quas in Probl. V. expoſuimus. Newtonus cum problemata hujuſmodi primum reſolvere aggreſſus eſſet, quæſivit curvam generis parabolici, quæ tranſiret per pun-

puncta quæcumque data. Newtoni metodum nitidissime exposuit, aliisque exemplis illustravit Cl. Walmesley in Actis Berolinensis Academiæ anni 1757. At quæ ab authoribus aliis formulæ post Newtonum inventæ sunt brevitate, ac simplicitate præstant: & licet nulla hactenus mihi se obtulerit occasio generalis methodi, quæ in hoc problemate tradita est, applicandæ ad parabolicæ alicujus orbitæ supputationem, hanc instituendi calculi rationem iis commendarem, qui novi alicujus Cometæ orbitæ determinandæ occasionem, atque otium habuerint.

SCHOLION.

Qui ex veteribus Astronomis ante Dominicum Cassinum Cometas esse corpora solida, & perennia censuerunt, quæ statis temporibus ad nos redirent, nullo id argumento, ac ratione confirmatunt. Cassinus cum Cometarum motus ad Solem relatos non minus regulares esse comperisset quam sint motus Planetarum, cumque annis 1664, & 1665 post primam duorum Cometarum apparitionem motus omnes subsequentes non minus accurate prænuntiasset quam Planetarum motus soleant determinari, certo argumento ostendit nullum aliud Planetarum, Cometarumque discrimen esse quam quod isti in oblongis orbitis moveantur, & Soli propius accedentes exhalationes in adversam partem ad modum caudæ projiciant, Newtonus omnibus sublimioris Geometriæ subsidiis parabolicum Cometarum motum revocare cœpit ad calculum, & orbitam Cometæ illius, qui anno 1680 apparuit, tam accurate supputavit, ut error omnis in calculo tam longitudinis, quam latitudinis, bis tantum duo minuta prima secundis aliquot superaverit, Et cum ad solutionem problematis, datis rectis, quæ loca Terræ, & Cometæ jungunt, & datis latitudinibus Geocentricis inveniendæ sint distantiæ illæ, quæ appellantur curtatæ, loci Cometæ ad Eclipticæ planum reducti; primo quidem tentare cœpit Newtonus num distantiæ curtatæ determinari possent ope illius problematis, quo inter quatuor rectas positione datas ducenda quæritur recta, quæ ab iis secentur in ratione data. Eo igitur problemate, quod in Arithmetica Universali, atque in Corollario Lemm. XXVII. Lib. I. Principiorum diversimode resolverat, ad calcem Opusculi de Mundi Systemate Newtonus primo uti cœpit ad Cometæ trajectoriam determinandam, quæ proxime ad lineam rectam accederet. Deinde vero in Propos. XLI.

P 2 Lib.

Lib. III. Princip. Cometæ trajectoriam accurate determinaturus monuit se ad hunc finem composuisse illa prioris libri problemata, illis autem omissis, & rationes alias secutus hypothesim motus rectilinei Newtonus ad orbitas parabolicas transferre noluit. Gregorius etiam in Propos. XXVI. Lib. V. Astronomiæ cum methodum tradidisset lineæ unius rectæ ducendæ, quæ a quatuor aliis rectis positione datis secetur in ratione data, propositione undecima ejusdem libri adnotavit solutionem problematis pluribus in casibus limitatam, ac mancam esse, limitationes autem rem hanc tractanti per se satis esse obvias, & manifestas. Singulare igitur videri posset quod quæ jam diu a Newtono, & Gregorio rejecta fuerat rectilinei Cometarum motus hypothesis, ea postmodum ab aliis Geometris proposita, & ad Cometarum orbitas determinandas traducta sit. Cometam tamen, qui anno 1739 ad easdem cum Sole partes conspectus fuerat, in hypothesi motus rectilinei ad partes Soli oppositas referri oportere deprehensum est: atque in Actis Parisiensis Academiæ anni 1733 cum datis tribus longitudinum, & latitudinum observationibus Bouguerius determinare docuisset arcum sectionis conicæ finitimum lineæ rectæ, ejusdem methodi applicatione ad illum Cometam facta, qui anno 1730 apparuit, orbitam hyperbolicam invenit pro parabolica. Quæ etiam elementa orbitæ novi Planetæ in hypothesi motus rectilinei supputari possunt ab illis differunt, quæ directe jam ab Astronomis celeberrimis supputata sunt. Hac igitur omissa approximationis specie, qui generales, atque accuratas methodos tradiderunt orbitæ Cometarum ex tribus observationibus determinandæ post Newtonum commemorari, ac commendari in primis debent Leonardus Eulerus, Fontaine, D. du Sejour, & Marchio de Condorcet. Cum autem difficilior videretur generalium formularum ab iisdem authoribus traditarum reductio, cumque etiam calculi series, qua Clariss. Lexell, Tempeloff, Hennert in determinandis Cometarum orbitis studiose, ac sagaciter usi sunt, videretur prolixior, quod mihi Halley, & Lamberti formulas consideranti se se obtulit falsæ positionis, ab Astronomis usitatæ, & calculi totius compendium iis modo exhibere volui, quibus hujus speciminis illustrandi alicujus Cometæ exemplo, atque ad orbitæ determinationem numericam applicandi plus otii fuerit.

LI-

LIBER SECUNDUS.

DE FIGURA

TERRÆ, ET PLANETARUM.

QUI a vetustissimis usque temporibus contemplationi cœlestium corporum intenti homines Lunam in umbram Terræ incidendo eclipsim pati, sectionesque omnes umbræ, & cum primo ad Lunæ discum pertingunt, & cum inde recedere incipiunt, in majoribus æque ac minoribus Lunæ a Terra distantiis circulares esse observarunt, ii agnoverunt plane & umbræ figuram conicam esse, & figuram Terræ quam proxime esse sphæricam. Græci autem, atque Ægyptii potissimum cum in Terræ radio, & circuitu, ac magnitudine omni determinanda diu adlaboraverint, eorum tamen mensuras non parum a se differre, nec satis constare quanam ratione ad eumdem modulum reduci possint, jam supra adnotatum est, nec verisimile videri quod instrumentis nostris, & recta observandi methodo destituti observatores satis accurate mensuram terrestrium graduum determinaverint. Et plane Arabes, qui majoribus subsidiis postmodum dimetiendis meridiani terrestris gradibus in planitie Babylonensi incubuerunt, non nisi adhuc erroneas, & nimium a veris dissitas mensuras protulerunt. Neque ad accuratam determinationem propius accesserunt quæ alia dimetiendorum graduum tentamina a Ricciolo in Italia, in Batavia a Snellio, & a Fernelio in Galliis instituta sunt.

Nervoodus cum anno 1635 Londini, & Æboraci distantiam pedum Londinensium 905751, & differentiam latitudinum utriusque Urbis 2°28′ esse invenisset, sit autem Londini altitudo poli 51°31′, accepto differentiæ illius dimidio, in latitudine 52° 45′, unius meridiani gradus mensuram constituit pedum Londinensium 367196: quos in Propos. XIX. Lib. III. Newtonus hexapedas Parisienses 57300 scripsit conficere: conficerent autem hexapedas 57421 si pes Londinensis esset pollicum Parisiensium 11, & linearum 3.1104, ut ad calcem voluminis præcedentis ex Dom. Tillet tabula assumptum est. Anglici gradus determinationem accuratiorem censuit Maupertuisius quod ad Meridiani

pla-

planum menfuras reduxerit Nervoodus, quodque altitudinem folftitialem Solis fextante plufquam pedum quinque pro latitudinum differentia Londini, & Æboraci determinanda obfervaverit. Et quidem poli altitudo Londini, & Æboraci aliis etiam obfervationibus recognita eadem prodiit, quam Nervoodus ex folftitiali Solis altitudine collegerat. At cum Nervoodi gradus hexapedis 276 ab alio differat, qui poftmodum in Batavia fub eadem fere latitudine diligentiffime dimenfus eft, fufpicari poterit Nervoodum in æftimanda duarum urbium diftantia, & reductionibus ad Meridiani planum faciendis non ad eum adhuc diligentiæ apicem perveniffe, in quo poftmodum obfervatores alii excelluerunt.

Quæ etiam a Picarto, & Dominico Caffino primum terreftrium graduum obfervationes fuerunt habitæ non abfolutam tantum menfuram graduum valde ab ea diffentientem exhibuerunt, quæ pofterioribus obfervationibus prodiit, fed gradus etiam in majoribus ab æquatore diftantiis exhibuerunt breviores, quam in minoribus: quod fi effet, fphæroidis circa polos oblongatæ formam haberet Tellus. Ab iis autem ufque temporibus pendulorum experimento innotuerat Telluris figuram elatiorem circa æquatorem, & circa polos compreffam effe oportere. Anno enim 1672 Richerius cum in Cayennæ infula latitudinis borealis 4°55′ fixarum tranfitum per meridianum obfervaffet, agnovit pendulum, quod fingulis fecundis temporis ofcillationem unam abfolvebat Parifiis, tardius moveri, unaque linea cum quadrante corripiendum fuiffe ut ibi pariter ofcillationes fecundis fingulis abfolveret. Newtonus vero in Propof. XX. Lib. III. cum ex ea longitudinis differentia id deduxiffet, quod vi centrifugæ diurni motus, quodque caloris vi debet tribui, qua prope æquatorem pendulum omne oblongabatur, refiduam differentiæ partem deprehendit imminutæ vi gravitatis tribuendam effe: minor autem circa æquatorem gravitas effe nequit nifi diftantia a centro fit major.

Quæ a Regia Parifienfi Academia ad æquatorem, & polarem circulum pro definienda figura Terræ, decreta eft celeberrima expeditio ftudium omne fummorum Aftronomorum in eo contulit ut meliore ratione, ac methodo, ac melioribus inftrumentis menfuræ terreftrium graduum acciperentur. Et quidem anno 1736 Bouguerius in Pe-

Peruvienſi planitie rectilineam baſim hexapedarum 6227, pedum 4, pollicum 7, atque inde ductis triangulis 32, obſervatiſque trianguli cujuſque angulis, ac ſupputatis poſtmodum lateribus ex baſi, & angulis, atque ad meridiani planum reductis, diſtantiam hexapedarum 176940 in eodem meridiani plano, atque hexapedis 1226, ſupra libellam maris accuratiſſime dimenſus eſt, cumque utrimque obſervatis poli altitudinibus diſtantiam illam cœleſti arcui 3° 7′ 1″ reſpondere deprehendiſſet, unico gradui hexapedas 56767 in altitudine illa aſſignavit: ac denique hexapedas 21 $\frac{2}{5}$ demendo ut menſura omnis ad maris libellam reduceretur, addendoque alias 7 hexapedas caloris cauſſa, quo virgæ ad terreſtrem menſuram adhibitæ efficiebantur longiores, primum meridiani terreſtris gradum, qui ab æquatore incipit, definivit hexapedarum 56753. Qui in Peruvienſi expeditione comites erant Bouguerii menſuram ejuſdem gradus paulo diverſam exhibuerunt. D. la Condamine poſita eadem cœleſtis arcus amplitudine, ex aliis angulorum menſuris, ac reductionibus graduum ipſum conſtituit hexapedarum 56749: D. Goudin ex aliis triangulorum ſeriebus non eruit niſi hexapedas 56746: DD. Ivan, & Ulloa priorem illam menſuram retinuerunt hexapedarum 56767.

Qui eodem anno 1736. expeditionem Lapponicam ſuſceperant D.D. Maupertuis, Clairaut, Camus, Monnier, Outhier, Celſius, cum baſim hexapedarum 7406, pedum 5, pollicum 2 in plana lacus glacie obſtricti ſuperficie dimenſi eſſent, ope octo triangulorum meridiani arcum, qui Torneæ, & Kittis interjacet, reductis ad horizontem angulis ſtatuerunt hexap. 55023.47: cumque arcum ipſum deprehendiſſent 57′ 28.67″, & mediam loci utriuſque latitudinem inveniſſent 65° 20′, meridiani arcum in ea latitudine definierunt hexapedarum 57437.9. Bouguerius § XXI. Sect. VI. de Figura Terræ hexapedas 16 ſubducendas inde eſſe monuit ratione refractionis, qua cœleſtis arcus 1″ amplior videri debuit, atque ita gradum eumdem conſtituit hexapedarum 57422. At inſuper notandum eſt priorem illam gradus Lapponici menſuram non niſi ex quinque triangulorum combinationibus inter ſe proxime congruentibus fuiſſe erutam. Septem aliæ Triangulorum combinationes a Maupertuiſio exhi-

exhibitæ gradum eumdem breviorem exhibent ſingulæ hexapedis $6\frac{1}{2}$, $17\frac{1}{2}$, 27, $30\frac{1}{2}$, $32\frac{1}{2}$, 36, $51\frac{1}{2}$, ut apud authorem ipſum Cap. III. de Terræ Figura videre eſt. Itaque juxta vulgares probabilitatum regulas ſumendo medium arithmeticum ex combinationibus hiſce omnibus, gradus Lapponicus cenſeri poſſet quam proxime hexapedarum 57405. Peruviani, & Lapponici gradus comparatione patuit arcus æqualem angulum ſubtendentes circa æquatorem breviores eſſe quam circa polos: quod eſſe nequit niſi terreſtris ſuperficies majorem curvitatem habeat circa æquatorem, circa polos magis complanetur, & Terra omnis figuram ſphæroidis alicujus circa polos compreſſæ, & circa æquatorem elatæ referat.

Poſt reditum e polari circulo cum Maupertuiſius amplitudinem Pariſienſis arcus ratione refractionis habita, quam Picartus in obſervando gradu neglexerat, & cum deinde Jacobus Caſſinus correxiſſet errorem alium, qui in modulis ad menſuram Geodæticam a Picarto adhibitis deprehenſus fuerat, gradus in latitudine 49° 23′, quæ Pariſienſis obſervatorii latitudo eſt, prodiit hexapedarum 57074, paulo ſcilicet major quam a Picarto, compenſantibus fere ſe invicem menſuræ ejuſdem Geodeticæ, & obſervationum Aſtronomicarum erroribus ſtatutus fuerat. Et quidem baſeos, & modulorum correctio quinquies repetita eſt menſuris intra aliquot pollices convenientibus: & cum in ſuſpicionem iterum adducta eſſet, anno 1756 a Cl. Monnier, aliiſque Academiæ ſociis recognita, & comprobata eſt. In Batavia etiam cum Aſtronomicas Snellii obſervationes Jacobus Caſſinus, & D. de Thury ipſius filius menſuras Geodæticas correxiſſent, meridiani terreſtris gradum in latitudine 52° 4′ ſtatuerunt hexapedarum 57145, ut in Actis Pariſienſibus anni 1747 legitur, minorem ſcilicet hexapedis 276, quam qui in Anglia a Nervoodo ſub eadem fere latitudine deprehenſus fuerat. Singulis denique meridiani Pariſienſis gradibus a Borea ad Auſtrum uſque, & ad Piræneos montes recognitis, & paralleli circuli gradu prope montes ipſos accepto, Academici Pariſienſes, circuli quidem paralleli gradum in latitudine 43° 32′ deprehenderunt hexapedarum 41618, gradus vero meridiani circuli deprehenderunt ordine ut ſequitur.

I.	Latitudo loci 43°	31'.	Gradus hexapedarum 57048.
II.	44	53.	57042.
III.	45	45.	57050.
IV.	46	35.	57049.
V.	46	51.	57055.
VI.	47	41.	57057.
VII.	47	58.	57071.
VIII.	49	3.	57069.
IX.	49	23.	57074.
X.	49	56.	57084.

Peruvienſis, Lapponicus, Batavicus, Gallici omnes gradus cum figuram Terræ circa polos compreſſam eſſe oſtendiſſent, bini ſinguli gradus ad ſe invicem relati, & quæ deinde obſervationes graduum in Italia, Germania, & Septentrionali Americæ parte inſtitutæ ſunt, dubiis, ac diſputationibus aliis locum præbuerunt de quantitate totius compreſſionis, & de meridianorum terreſtrium diſſimilitudine: & quæ demum in Auſtrali Africæ parte inſtitutæ ſunt obſervationes dubium aliud exhibuerunt num bina Terræ hemiſphæria, Auſtrale, & Boreale inter ſe eſſent ſimilia. In Africa prope Promontorium Bonæ Spei, atque in latitudine Auſtrali 33° 18' quatuor triangulorum ope celebris la Caille ad labores pene ſolus admirabili diligentia integrum meridiani gradum invenit eſſe hexapedarum 57037. In America, vero Septentrionali, atque in ampliore Penſilvaniæ planitie prope Alleganos montes D. D. Maſon, & Dixon in latitudine boreali 39° 12' meridiani gradum primo invenerunt hexapedarum 56904 $\frac{1}{2}$: deinde vero adjectis aliis caloris correctionibus ſtatuerunt 56888, ut in Tranſactionibus Philoſophicis anni 1768 legitur. Ita igitur gradus hujuſmodi hexapedis 149 eſſet brevior quam qui in Auſtrali hemiſphærio ſex fere gradibus propior eſt æquatori.

In Italia binas habemus graduum menſuras. Primam debemus Clariſs. Boſcovich, & le Maire, alteram Clariſs. Beccaria: & illi quidem inſtitutarum obſervationum ſeriem late expoſuerunt in opere præclaro de Expeditione litteraria per Ditionem Pontificiam, hic vero in præclaro alio opere de gradu Taurinenſi. Illi cum meridiani ar-

cum duorum circiter graduum Roma usque Ariminum trans Apennînos montes dimenſi eſſent, factis reductionibus omnibus, correctionibuſque inſtrumentorum, unius gradus menſuram in latitudine 43° 1′ ſtatuerunt Pariſienſium hexapedarum 56979. Hic vero cum amplitudinem cœleſtis arcus Auguſtæ Taurinorum, & Monti Regali interjectum ad pedes Alpium deprehendiſſet 40′ 40″, & factis omnibus reductionibus terreſtrem arcum inveniſſet hexapedarum 38733, latitudinem autem Taurini 45° 4′ 14″; integrum meridiani terreſtris gradum in latitudine 44° 44′ conſtituit hexapedarum 57137 . 8. Taurino etiam progreſſus ad pedes Alpium Andratas uſque Clariſ. Beccaria, arcui 27′ 4″ reſpondere invenit hexapedas $26153\frac{4}{5}$: & cum Taurino Montem Regalem verſus arcui 27′ 4″ reſpondeant hexapedæ circiter 25780, in binis arcubus contiguis invenit differentiam hexapedarum 374. Ex poſteriore hoc Andratenſi arcu gradus integer erueretur hexap. $57965\frac{3}{5}$: ex arcu omni, qui Monte Regali Andratam uſque trajicitur $57468\frac{3}{5}$.

Arcum fere trium graduum in Stiria, Auſtria, & Moravia Varaſdino Brinnam uſque celebris Lieſganig diligentiſſime dimenſus eſt, & gradum alterum in inferiore Hungaria prope Tibiſcum, quam proprie Cumaniam vocant. Et quidem gradus Auſtriacus, & Viennenſis in latitudine 48° 43′ prodiit hexap. 57086, ut retulit Author ipſe in præclaro opere de graduum dimenſione. Tantam autem differentiam arcuum integro gradui reſpondentium in plana Auſtriæ regione, & prope altiſſimos Stiriæ montes invenit ipſe, ut cum Viennam inter & Græcium meridiani gradus prodierit hexap. 56907, qui deinde Græcio Varaſdinum uſque interjicitur meridiani arcus prodierit hexap. $57350\frac{1}{2}$, atque in binis arcubus contiguis integri gradus angulum ſubtendentium differentia fuerit hexap. $443\frac{1}{2}$. Gradus Hungaricus, ſeu Cumanus in latitudine 45° 57′ prodiit hexapedarum dumtaxat 56881. Arcum paralleli circuli, qui Vienna Lutetiam uſque traducitur, D. Caſſinus poſtmodum dimenſus eſt: & cum duarum

rum

rum urbium diſtantiam inveniſſet ipſe hexap. 531000., poſita differentia longitudinum duarum urbium 14.03°, paralleli illius gradus hexap. $37847\ \frac{1}{2}$.

Omiſſo autem eo Stiriæ gradu, duodecim alii gradus, qui ad figuram Terræ, ac terreſtrium meridianorum determinandam maxime idonei cenſeri poſſent, ab æquatore pergendo ad polos erunt ordine ut ſequitur

I.	Peruvianus. Latitudo.	0.		Gradus hexap. 56749.
II.	Africanus.	33°	18'.	57037.
III.	Penſilvanus.	39.	12.	56888.
IV.	Romanus.	43.	1.	56979.
V.	Gallicus prior.	43.	31.	57048.
VI.	Taurinenſis.	44.	44.	57137.8.
VII.	Alter Gallicus.	45.	45.	57050.
VIII.	Hungaricus.	45.	57.	56881.
IX.	Viennenſis.	48.	43.	57086.
X.	Pariſienſis.	49.	23.	57074.
XI.	Batavicus.	52.	4.	57145.
XII.	Lapponicus.	66.	20.	57405.

Antequam vero comparatis gradibus ſingulis inter ſe videamus quid curvaturæ terreſtrium meridianorum, quid internarum telluris partium attractioni variæ, & attractioni montium debeat tribui, in primis quærendum eſt intra quos limites graduum terreſtrium obſervationes accuratæ, & certæ cenſeri poſſint. Bouguerius §. VI. Sect. I. de figura Terræ ingenue faſſus eſt obſervationes illas, quibus fixarum diſtantiam a vertice, & altitudinem poli ex utroque arcus extremo determinavit, ſemper 3, aut 4 ſecundis diſcrepaſſe inter ſe, quæ pariter obſervationum a Maupertuiſio, aliiſque authoribus pro aliorum graduum determinatione inſtitutarum diſſenſio deprehenditur. Quod ſi igitur error 3" pro utroque arcus extremo bis accipiatur, diſtribuaturque per tres omnes gradus, quos in Peruvio Bouguerius dimenſus eſt, pro gradu unoquoque error 2" ſuperaret. Et cum integro gradui hexap. 56753, uni minuto 946, ſecundo 16 circiter reſpondeant, cumque inſuper geodæticæ arcus illius menſuræ differentiam 10 cir-

citer hexap. pro gradu unoquoque exhibuerint; errorum limites in priore illo meridiani gradu statuit Bouguerius 42 circiter hexap. Condaminius Par. I. §. XXI. ita Bouguerio assentitus est ut errorem Astronomicarum simul observationum, & mensurarum Geodeticarum hexap. 35, aut 40 pro unoquoque gradu majorem esse non posse dixerit. Id de grado etiam Lapponico, & Africano, & de gradibus aliis omnibus tanto fidentius dicendum est, quod ob minorem arcuum amplitudinem per plures gradus Astronomicarum observationum error minime distribuebatur. Alembertius in præfatione Par. III. de Mundi systemate, aliique authores consideratis elementis omnibus, reductionibusque angulorum, laterum baseos, differentiæ altitudinum poli, ex quibus pendet unius gradus mensura, intra limites 60 hexapedarum mensuram quamlibet incertam, ac dubiam esse censuerunt.

Jam vero post celebrem illam Bouguerii, & Condaminii observationem, qua ad pedes Chimborasi Americanorum montium altissimi deprehenderunt quadrantis filum $7\frac{1}{2}''$ deviasse a perpendiculo, suspicari universim licuit attractione montium deflecti in adversas partes fila pendulorum, atque ita magnitudinem graduum variari, ut neque intra assignatos errorum limites meridianorum terrestrium figuræ determinandæ idonei sint. Et plane cum attractiones sphærarum homogenearum debeant esse proportionales radiis, si mediocris Telluris radius assumatur hexap. 3273008, ad habendam aberrationem 9″ a perpendiculo, cujus anguli sinus se habet ad sinum totum ut 1:22918, satis erit sphæra homogenea, cujus radius sit hexap. 143 circiter, sive etiam monte hemisphærico duplæ altitudinis. Quod ex universalis, ac mutuæ gravitatis legibus consequitur certo evicerunt clarissimorum Beccaria, & Liesganig observationes. Cum enim in hypothesi quavis continuæ curvaturæ meridianorum contigui gradus certo ordine augeri, aut minimi debeant, ille quidem in binis arcubus angulum 27′ 4″ subtendentibus eum, qui ad Alpes propius accedebat, 374 hexapedis longiorem esse deprehendit, quæ differentia aberrationi penduli 24″ circiter responderet: hic vero citra, & ultra altissimos Stiriæ, & Græcii montes differentiam duorum graduum contiguorum invenit hexap. $443\frac{1}{2}$, ita quidem ut qui in ampliore Au-

striæ,

ſtriæ, & Moraviæ planitie, ubi non niſi colles exigui ſunt, prodiit meridiani gradus tantundem fere ſuperet gradum alterum, qui Viennæ, & Græcio interjicitur, quantum a tertio gradu deficit, qui interjicitur Græcio, & Varaſdino. Accuratiſſima etiam Dom. Maskelinii memoranda eſt obſervatio, qui cum duorum locorum citra, & ultra montem in Scotia diſtantiam in ſuperficie terreſtri acceptam, & cœleſtem arcum utrique loco interjectum comparaſſet inter ſe, deprehendit utrimque filum 5.8″ a perpendiculo montem verſus deviaſſe.

Primo igitur loco haberi vellem trium graduum menſuram hexapedis 1226 ſupra libellam maris inſtitutam in ipſis Peruvii montibus, qui cum a Borea in Auſtrum ſe porrigant, compoſita omnium actione quadrantis filum in meridiani plano deflecti a perpendiculo non poterat. Ibi etiam ex boreali parte altitudo poli, ut a D. Condaminio accepi, in vertice exigui montis a reliquis ſatis diſſiti ſumpta eſt, atque ex auſtrali parte in leniſſima montis alterius declivitate. Simili ratione Lapponicæ obſervationes minus ſuſpectæ eſſe poſſent, quod ad metiendam amplitudinem totius arcus, ut retulit Maupertuiſius, poli altitudo in vertice montis Kittis ſumpta ſit, atque ex altero montis ejuſdem extremo Torneæ, quæ Urbs duas inter ſeries montium ſita eſt. Obſervationes etiam, quæ Taurini, & Monte Regali ad definiendam interjecti arcus amplitudinem inſtitutæ ſunt, minime videntur actione eorum montium potuiſſe affici, qui in arcu alio ad boream, & ad pedes uſque alpium traducto tantam menſurarum differentiam exhibuerat: ac pariter menſuræ graduum & meridiani, & paralleli circuli in Auſtrali Galliæ parte non adeo variari poterant actione Pyrenæorum montium, qui fere arcum circuli alterius paralleli referunt, & fere in ipſo meridiani Pariſienſis termino aſſurgere occidentem verſum incipiunt. Idem videtur dicendum eſſe de aliis gradibus, qui in planiore Galliæ Septentrionalis parte, in Batavia, Auſtria, & Moravia obſervati ſunt, ubi non niſi interni telluris textus, non vero externæ ſuperficiei inæqualitates ullæ ſe ſe offerunt, quæ menſuras graduum afficiant. Omiſſis itaque inæqualitatibus omnibus interni textus, Peruvianus, Lapponicus, Batavus, Viennenſis, Gallici gradus, intra eos, quos antea attigimus, errorum limites correcti,

recti, præcipue idonei videntur esse ad figuram meridianorum terrestrium determinandam.

At vero ad definiendam arcus Romani duorum circiter graduum amplitudinem poli altitudines citra, & ultra Apenninos montes Romæ, & Arimini observatæ sunt: unde attractione massæ totius interjacentis, pendulo utrimque in contrarias partes distracto, cœlestem arcum majorem prodiisse necesse est, & arcui eidem respondentes mensuras præ unius gradus longitudine minores exhibuisse: quod idem de Parisiensi gradu dicendum est si quidpiam tribuamus attractioni totius massæ, ex qua maxima Urbs consurgit, quamque ultra, & citra utrumque gradus extremum acceptum est. Oppositam ob caussam conjici facile, ac divinari poterat in Australi Africæ parte, & circa Promontorium Bonæ Spei mensuram unius gradus majorem prodire oportuisse. Nam si differentiam omnem materiæ, quæ in Cafreriæ regione, & circumposito Oceano Australi est, alicujus montis ad Cafreriæ extremum constituti vices agere intelligamus; in utroque extremo arcus per Promontorium ipsum transeuntis a perpendiculo Boream versus retrahi debet quadrantis filum, magis quidem in extremo illo, quod confictо monti esset propius. Quo jam in cœlo observatus arcus minuetur, & spatium uni gradui respondens in Terra augebitur. In ea Pensilvaniæ parte, quæ gradui observando patuit, cum Allegani montes ad partem unam, ad aliam mare Atlanticum jaceat, ex altitudine, atque ex distantia eorum montium, atque ex Oceani Atlantici profunditate D. Cavendish in Transact. Philos. anni 1768 conjecit gradum e contra 60, aut 100 hexapedis minorem prodiisse.

Iisdem principiis ductus D. Liesganig §. CLXIII. operis de dimensione graduum censuit altissimos Græcii montes, maxima ex parte metallo fœtos, gignere tantam illam differentiam graduum contiguorum: ac deinde §. XXII. Appendicis suspicatus est pingues metallorum massas intra telluris sinum a Stiriæ fodinis in Transilvaniam usque porrectas, mensuram etiam gradus Hungarici aliam exhibuisse quam quæ in aliis regionibus circa eamdem latitudinem deprehensa est. Difficultatem insuper observationum prope Tibiscum in Cumaniæ regione institutarum exposuit vir celeberrimus: nam & §. IV. ap-

appendicis iniquitatem soli descripsit, qua ad gradum unum metiendum XXVI. triangulis fuit opus: & §. VIII. tantam fuisse dixit densitatem vaporum ad altitudinem unius, aut alterius hexapedæ solo adjacentium, ut fere stagnantis aquæ speciem exhibuerint: cœli vero inclementiam tantam fuisse retulit, ut ex 27 diebus, quibus gradum metiri oportuit, 18 fuerint pluvii, nec nisi pluvia minus densa quandoque vapores deprimente anguli observari melius potuerint. Cumque insuper gradus Hungaricus, & Pensilvanus etiam ab aliis omnibus mensuris graduum nimis differant, nec nisi peculiarem aliquam materiæ terrestris irregularitatem iis in regionibus indicare possint, Africanus vero non nisi minor, nec nisi major Romanus, & Parisiensis gradus vere esse debeat quam qui ex serie institutarum observationum prodiit, septem aliis, quos memoravimus, præcipue utemur ad Terræ figuram determinandam, inquiremusque quibus quantitatibus additis Romanus, & Parisiensis gradus, & qua dempta Africanus ad eamdem aliorum graduum rationem reduci possint.

Qui vero tot in regionibus, tantoque studio definiendæ mensuræ terrestrium graduum incubuerunt Astronomi celeberrimi, ii etiam longitudines pendulorum secundis singulis oscillantium diligentissime observarunt, quarum longitudinum differentia, ut a Richerio primum detecta est, primum Telluris circa polos compressæ indicium Newtono suppeditavit. Bouguerius in Sect. VI. de Figura Terræ §. VII. caloris, correctionumque inde pendentium ratione habita, & correctionibus aliis adjectis, quæ debentur aeris resistentiæ, longitudinem penduli simplicis in vacuo oscillationem unam singulis secundis temporis absolventis statuit, Parisiis quidem linearum 440.67, sub æquatore vero, & in ipsa maris libella lin. 439.21: ad *Portobello* in America lin. 439. 30, & in insula S. Dominici ad *Petit–Goave* lin. 439. 47. Maupertuisius collatis experimentis deprehendit pendulum Parisiense eumdem oscillationum numerum pro singulis fixarum revolutionibus Londini 7.7″, & Pelli in Lapponia 59″ citius quam Parisiis absolvere: unde cum revolutio fixarum $23^h 56' 4''$ absolvatur, & gravitates acceleratrices sint inter se reciproce ut quadrata temporum, quibus æquales oscillationum numeri habentur in eodem pendulo; erunt gravitates acceleratrices, & longitudines pendulorum eodem

dem tempore oſcillantium Pariſiis, Londini, & Pelli inter ſe reci- ut quadrata numerorum 86164, 86156.3, 86105, ſive directe ut numeri 100000, 100018, 100133: adeoque erit longitudo penduli ſimplicis uno ſecundo temporis oſcillantis, Londini quidem lin. 440.75, Pelli autem 441. 27. Caillius in Africa, ad Promontorium Bonæ Spei, eadem methodo Bouguerii uſus, ut in Actis Berolinenſibus anni 1754 legitur, longitudinem penduli invenit 440.14: in Actis autem anni 1753 contendit Caillius idem experimenta ſub æquatore, Pariſiis, Londini, Pelli ultra Polarem circulum, atque ad Promontorium Bonæ Spei inſtituta non niſi intra octavam lineæ unius partem longitudines pendulorum accurate exhibuiſſe.

Aliis etiam in locis alia longitudinis pendulorum ſecundis ſingulis oſcillantium experimenta inſtituta ſunt. Romæ D. D. le Seur, & Jacquier longitudinem penduli definierunt digitorum Londinenſium 39.0974: unde cum pes Londinenſis ſit pollicum Pariſienſium 11, linearum 3.1104, erit longitudo Romani penduli linearum 440.207. Viennæ D. Lieſganig longitudinem penduli invenit lin. 440. 562. Griſchowius Petropoli invenit pro penduli longitudine lineas 441.23, ut legitur To. VII. Novorum Commentariorum Academiæ. Quod ſi igitur latitudines locorum ſingulorum ex iiſdem Authoribus deſumantur, quos memoravimus, obſervationes præcipuæ hacce in re ſequente tabula exhiberi poterunt.

Obſervationum locus.	Latitudo loci.	Longitudo penduli.	Longitudinis incrementum.
Sub æquatore.	0.	lin. 439.21.	
Ad *Portobello*.	9.° 34′	439.30.	0.09.
Ad *Petit-Goave*.	18. 27.	439.47.	0.26.
Ad Promont. B. S.	33. 18.	440.14.	0.93.
Romæ.	41. 54.	440.207.	0.995.
Viennæ.	48. 12. $\frac{1}{2}$	440.562.	1.352.
Pariſiis.	48. 50.	440.67.	1.46.
Londini.	51. 31.	441.75.	1.54.
Petropoli.	59. 56. $\frac{1}{3}$	441.23.	2.02.
Pelli.	66. 48.	441.27.	2.06.

Longitudinis incrementum, quod in pendulis eodem tempore oſcillantibus ab æquatore pergendo ad polos ſemper fit majus, confirmavit

vit plane quod ex theoria gravitatis collegerat Newtonus, & ſolo Richerii experimento potuerat confirmare, Terram ſub æquatore elatam eſſe, compreſſamque circa polos. At rurſus incrementi totius quantitas aliis pluribus diſputationibus de proportione duorum axium, aliis hypotheſibus de varia ſtratorum terreſtrium denſitate occaſionem dedit. Et quidem Newtonus cum in Propoſ. XIX. Lib. III. Princip. hypotheſim aſſumpſiſſet Telluris primitus fluidæ, & circa axem diurno motu revolutæ, quæſivit qua ſemiaxium proportione partium omnium æquilibrium haberi potuiſſet ſi partes omnes homogeneæ fuiſſent inter ſe, ac ſe invicem attraxiſſent in ratione diſtantiarum reciproca duplicata. Hypotheſes alias gravitatis propoſuerunt Hugenius in additamento Diſſertationi de cauſſa gravitatis, & Hermannus in Lib. II. Phoronomiæ: ille quidem gravitatis conſtanris, hic autem gravitatis non accedendo tantum a ſuperficie directe ad centrum, ſed in locis quibuslibet ad ſe relatis diſtantiæ a centro proportionalis. In hiſce vero hypotheſibus alia ſemiaxium proportio, & alius æquilibrii columnarum fluidi eſt caſus. Authores alii, cum hypotheſim illam primitivæ fluiditatis retinuiſſent, quæſierunt qua lege denſitatis ſtratorum omnium terreſtrium, terra in æquilibrio compoſita, illud haberi potuiſſet incrementum gravitatis, & pendulorum eodem tempore oſcillantium, quod inſtitutis experimentis reſpondeat. At vero prior illa Terræ olim fluidæ hypotheſis penitus conficta eſt, & phænomenis diſſimilitudinis ſtratorum terreſtrium parum conſona. Si enim particulæ omnes terreſtres fuiſſent aliquando fluidæ, impreſſo etiam diurno motu, particulæ denſiores ordine ad centrum propius acceſſiſſent, omnino autem in eodem ſtrato non aliæ ſe compoſuiſſent quam æque denſæ, & homogeneæ. Quo dato quæcumque poſtmodum mutationes, & quibuſcumque de cauſſis in terra ſubortæ eſſent, nullo modo poſſet intelligi adeo confuſa, & permixta fuiſſe omnia ut nullum penitus in ſubterraneis quibuſvis ſtratis veſtigium ſuperfuerit primitivæ fluiditatis. Utique manifeſtum eſt aliud principium, quod Bouguerius §. XXII. Sect. VI., aliique authores ad determinandam Telluris formam aſſumpſerant; maria, & lacus, & ſtagnantes liquores omnes perinde ad æquilibrii leges componi, ac ſi canalibus traductis ad cen-

trum usque inter se communicarent: atque ex hoc altero principio colligi etiam posset quod cum fluida Telluris portio, quæ ad æquilibrii leges componitur, proxime saltem accedat ad libellam, ac formam planæ terrestris superficiei, totius Telluris forma proxime cum ea convenit, quæ in priore fluiditatis hypothesi habetur. At vero assumpta primitivæ fluiditatis hypothesi strata omnia concentrica deberent esse in partibus singulis homogenea, & ad illam densitatis legem componi, cujus præcipuos casus evolvimus in Probl. IV. Lib. III. To. II. In Tellure autem solida, quæ exterius ad eamdem fluidarum partium libellum se se componat, alia quævis interni textus, densitatisque hypothesis assumi poterit, quæ phænomenis pendulorum, ac gravitatis ab æquatore ad polos crescentis respondeat. Expediet igitur non quidem ex pendulorum experimentis, atque ex hypothesibus æquilibrii Terræ totius fluidæ colligere ipsius figuram, eamque cum institutis mensuris graduum comparare, sed ex mensuris, & observationibus graduum figuram meridianorum terrestrium directe investigare, ac deinde traditis æquilibrii legibus inquirere quæ interni textus hypothesis simplicior sit, & cum experimentis pendulorum rectius conveniat.

CAPUT PRIMUM.

DE DIMENSIONE GRADUUM, ET, QUÆ INDE COLLIGITUR, FIGURA TERRÆ.

PROBLEMA I.

SI meridiani omnes ellipseos figuram referant, & accedant proxime ad circulos, dato uno gradu, & data proportione semiaxium gradus alios determinare.

Sit in ellipsi $VAva$, figura 26., semiaxis major TV, minor TA, ductaque MP ad ellipseos perimetrum normali, & MH normali ad majo-

majorem axem fit $MP^2 = TA^2 - (TV^2 - TA^2) . \frac{TA^2 . TH^2}{TV^4}$, & fit radius circuli ellipſim oſculantis in puncto $M = \frac{TV^2 . MP^3}{TA^4}$, ut in Probl. XXXII. Algebræ dictum eſt. Si loco TH^2 ſcribamus $\frac{TV^2}{TA^2} (TA^2 - MH^2)$, fiet $MP^2 = \frac{TA^4}{TV^2} + \left(\frac{TV^2 - TA^2}{TV^2} \right) . MH^2$, & ſi ſinus anguli MPH, quem normalis cum axe efficit, vocetur T, & ſit $MH^2 = MP^2 . T^2$, fiet $MP^2 = \frac{TA^4}{TV^2 - (TV^2 - TA^2) . T^2}$, atque hac ſubſtitutione facta erit radius oſculi in puncto $M =$ $TV^2 . TA^2 . (TV^2 - (TV^2 - TA^2) . T^2)^{-\frac{3}{2}}$: hoc autem poſito ſi fiat $TA = C$, $TV = C + B$, & differentia B ſemiaxium ſit adeo exigua, ut differentiæ quadratum poſſit negligi, erit radius oſculi $(C^4 + 2C^3 B)(C^2 + 2CB - 2CB . T^2)^{-\frac{3}{2}} = C - B + 3B . T^2$. Jam vero ſi ellipſis accedat proxime ad circulum, manifeſtum eſt arcus ſimiles, qui ſcilicet æquales angulos perpendiculis in utroque extremo ductis ſubtendunt, proportionales eſſe ipſis perpendiculis. Cum igitur perpendicula utrimque educta, & ſimul concurrentia ſint radii circulorum eamdem curvitatem habentium cum arcu quovis propoſito, gradus quivis elliptici meridiani proportionalis erit quantitati $C - B + B . T^2$, datoque uno gradu in data aliqua latitudine, & datis quantitatibus C, B, gradus alii omnes in aliis latitudinibus determinari poterunt.

COROLLARIA.

I. Quia poſito $T = 0$, in ipſo majore axe ellipſeos radius oſculi fit $C - B$, manifeſtum eſt radios circulorum eamdem habentium ellipſeos curvitatem, & gradus omnes in meridiano quovis elliptico, qui accedat proxime ad circulum, a majore ad minorem axem tranſeundo augeri in duplicata ratione ſinus anguli VPM. Et ſi Terra ſphæroidis circa polos compreſſæ, & ad æquatorem elatioris figuram habeat, & accedat proxime ad ſphæram, meridiani cujuſvis arcus eumdem gradus unius angulum ſubtendentes ab æquatore pergendo ad polos augebuntur in duplicata ratione ſinus latitudinis lo-

ci cujuslibet propositi, sive etiam in ratione simplici dimidii sinus versi latitudinis bis acceptæ.

II. Et quia sub polis, posito $T = 1$, fit radius osculi $C + 2B$, in hypothesi eadem Terræ sphæroidicæ, & accedentis proxime ad sphæram primus meridiani gradus erit ad ultimum ut $C - B : C + 2B$, & si prior meridiani gradus ex Condaminii reductionibus assumatur hexapedarum 56749, & semiaxis majoris ad minorem proportio assumatur 231:230, quæ in Terra omni fluida, & homogenea, & circa axem diurno motu circumvoluta partium omnium æquilibrium proportio, ut inferius videbimus, tueri posset, meridiani gradus per polos transiens deberet esse hexap. $57492\frac{2}{5}$, & differentia primi, & ultimi gradus esset hexap. $743\frac{2}{5}$, atque hanc ipsam differentiam minuendo in ratione dimidii sinus versi duplæ latitudinis habebitur graduum differentia in latitudine quavis proposita.

III. Si latitudines locorum, in quibus præcipuæ graduum mensuræ institutæ sunt, accipiantur ut in introductione hujus libri notatum est, differentiæ graduum, & gradus omnes, & calculi ab observationibus dissensio erunt ut in tabula sequente

Meridiani gradus.	Dupla latitudo.	Dimidius sinus versus.	Differentiæ.	Gradus.	Dissensio.
I. Peruvianus.	0.	0.		56749. hex.	
II. Africanus.	66.° 36′	0.301426.	224.	56973.	+ 64.
III. Pensilvanus.	78. 24.	0.399461.	297.	57046.	— 158.
IV. Romanus.	86. 2.	0.465412.	346.	57095.	— 116.
V. Gallicus prior.	87. 2.	0.474122.	352.	57101.	— 53.
VI. Taurinensis.	89. 28.	0.495346.	368.	57117.	+ 21.
VII. Alter Gallicus.	91. 30.	0.513088.	381.	57130.	— 80.
VIII. Hungaricus.	91. 54.	0.516577.	384.	57133.	— 252.
IX. Viennensis.	97. 26.	0.564686.	420.	57169.	— 83.
X. Parisiensis.	98. 46.	0.576205.	428.	57177.	— 103.
XI. Batavicus.	104. 8.	0.622089.	462.	57211.	— 66.
XII. Lapponicus.	132. 40.	0.838866.	624.	57373.	+ 32.

IV. Cum a Bouguerio, & Condaminio errorum limites in dimensione unius gradus hexapedarum circiter 40 statuti sint, ubi assuma-

mamus priorem illum meridiani gradum hexapedis 30 minorem esse quam in præcedentibus corollariis assumptum fuerit, hexapedæ fere 30 in calculo etiam aliorum omnium graduum deficient, eruntque gradus singuli, & differentiæ observationum ut sequitur

Meridiani gradus.		Ex hypothesi, & calculo.	Ex observatione.	Differentiæ.
I.	Peruvianus.	hex. 56719.	56749.	+ 30.
II.	Africanus.	56943.	57037.	+ 94.
III.	Pensilvanus.	57016.	56888.	— 128.
IV.	Romanus.	57065.	56979.	— 86.
V.	Gallicus prior.	57071.	57048.	— 23.
VI.	Taurinensis.	57087.	57138.	+ 51.
VII.	Alter Gallicus.	57100.	57050.	— 50.
VIII.	Hungaricus.	57103.	56881.	— 222.
IX.	Viennensis.	57139.	57086.	— 53.
X.	Parisiensis.	57147.	57074.	— 73.
XI.	Batavicus.	57181.	57145.	— 36.
XII.	Lapponicus.	56343.	57405.	+ 62.

V. Ex hoc itaque prospectu patet Peruvianum, Taurinensem, binos priores Gallicos, & Viennensem etiam, Batavicum, ac Lapponicum meridiani terrestris gradum cum hypothesi Terræ sphæroidicæ, & assumpta proportione semiaxium 230:231, intra illos errorum limites, quos memoravimus, convenire, neque Africanum, Romanum, & Parisiensem gradum inde amplius dissentire si spectata materiæ terrestris dispositione consideremus excessu quidem materiæ e latere adjacentis minorem Africanum gradum, & intermediæ materiæ excessu Romanum, & Parisiensem gradum majorem esse oportere quam qui ex observationibus prodierat. Id satis esse posset ut & Terram sphæroidicam, & meridianos omnes inter se similes esse censeamus, minoremque axem ad majorem proxime se habere ut 230:231. Videamus tamen quæ meridiani gradibus assumptis ut ab observatoribus celeberrimis fuerant exhibiti, & binis quibusque gradibus comparatis inter se varia semiaxium proportio eruatur.

PROBLEMA II.

Datis duobus gradibus meridiani alicujus elliptici, qui accedat proxime ad circulum, invenire proportionem semiaxium.

Cum

Cum radius circuli, qui ellipsim osculetur in puncto quocumque M, sit reciproce ut cubus normalis MP, iisdemque positis prioris problematis denominationibus sit $MP^2 = \frac{TA^4}{TV^2 - (TV^2 - TA^2).T^2}$, & cum arcus anguli unius gradum ad centrum circuli osculatoris subtendentes sint radio circuli proportionales, si mensura unius gradus vocetur G, & sinus latitudinis sit T, sumatur vero gradus quicumque alius E æquatori propior, & sinus latitudinis sit S, erit etiam

$$G:E = (TV^2 - (TV^2 - TA^2).S^2)^{\frac{3}{2}} : (TV^2 - (TV^2 - TA^2).T^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Quod si igitur sit $TV = C + B$, $TV - TA = B$, & differentia semiaxium B ut antea sit exigua, erit quam proxime

$$G:E = (TV^2 - 2TV.B.S^2)^{\frac{3}{2}} : (TV^2 - 2TV.B.T^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$G:E = TV - 3B.S^2 : TV - 3B.T^2,$$

aliisque terminis neglectis eruetur inde

$$\frac{B}{TV} = \frac{B}{C+B} = \frac{G - E}{3G.T^2 - 2E.S^2},$$

& si gradus E accipiatur sub æquatore ipso, & sit $S = 0$, debebit esse

$$\frac{B}{C+B} = \frac{G - E}{3G.T^2}.$$

COROLLARIA.

I. Quod si igitur cum priore meridiani gradu, ope hujus formulæ, gradus alii comparentur, in quibus nihil ob inæqualitatem soli se se offert, quod mensuram gradus afficiat, quintus nimirum, sextus, septimus, nonus, undecimus, & duodecimus, semiaxium differentia pro unitate accepta, semiaxis majoris valor in singulis combinationibus eruetur ordine ut sequitur

Ordo combinationum.	Semiaxis major.
I. Ex gradu primo, & quinto.	271.
II. Ex primo, & sexto.	218.
III. Ex primo, & septimo.	291.
IV. Ex primo, & nono.	287.
V. Ex primo, & undecimo.	269.
VI. Ex primo, & duodecimo	220.

Ex his autem combinationibus medius semiaxis valor eruetur 259.

II. Quod si ope formulæ alterius $\frac{B}{C+B} = \frac{G - E}{3G.T^2 - 3E.S^2}$ extremi gradus ad Boream cum aliis comparentur, qui ad Austrum, & loco magis sunt dissiti, sex aliæ inprimis combinationes haberi poterunt

VII. Ex duodecimo, & quinto.	177.
VIII. Ex duodecimo, & sexto.	223.
IX. Ex duodecimo, & septimo.	160.
X. Ex duodecimo, & nono.	150.
XI. Ex duodecimo, & undecimo.	146.
XII. Ex undecimo, & quinto.	263,

atque ex his aliis combinationibus eruetur medius semiaxis valor 185.

III. Qui tantam hanc differentiam semiaxium, quæ duobus quibusvis gradibus relatis ad se invicem exsurgit, valoresque extremos $\frac{1}{291}$, $\frac{1}{146}$ differentiæ ejusdem consideret, is etiam considerare debet, quod ex posterioris formulæ inspectione manifestum est, aliquot dumtaxat hexapedis ad graduum mensuras additis, vel detractis longe alias prodire differentias $G - E$, & $3G.T^2 - 3E.S^2$, longe aliam proportionem semiaxis unius ad alterum, tantamque illam differentiam semiaxium ex iis exiguis graduum differentiis colligi, quas in problemate antecedente indicavimus. Quod si autem ex duodecim omnibus præcedentibus combinationibus accipiatur medium arithmetieum, erit differentia semiaxium $\frac{1}{223}$: si posterioribus omissis combinationibus graduum loco propiorum, accipiatur medium ex prioribus decem combinationibus fiet eadem differentia $\frac{1}{227}$: ex prioribus novem $\frac{1}{235}$: media ex binis differentiis $\frac{1}{231}$. Unde cum tanta sit differentia ellipticitatum, quæ prodeunt observatos meridiani terrestris gradus comparando inter se invicem, medio tamen ex omnibus accepto, qui ob majorem latitudinum differentiam, minoresque superficiei irregularitates determinandæ Telluris formæ aptiores videri debent, fere eadem prodit ellipticitas, quam in corollariis prioris Problematis assumpsimus,

&

& qua posita observati gradus non majore quantitate a veris differunt, quam quæ in exiguos observarionum errores refundi potest.

PROBLEMA III.

Datis in sphæroide oblata, & accedente proxime ad sphæram, duobus gradibus circulorum æquatori parallelorum, invenire proportionem semiaxium.

Cum in ellipsi $AVav$, fig. 26., esse debeat $MR^2 = \frac{TV^2}{TA^2} \cdot \overline{TA^2 - TR^2}$, & posito quod T sit sinus anguli VPM, juxra Probl. I., esse etiam debeat $TR^2 = MH^2 = MP^2 \cdot T^2 = C^2 \cdot T^2 - 2C \cdot B \cdot \overline{1 - T^2} \cdot T^2$, si sphærois gignatur revolutione ellipseos $AVav$ circa minorem axem Aa, erit in puncto M, & in latitudine quavis VPM radius MR circuli ad æquatorem paralleli

$$\frac{TV}{TA} \cdot \left(C^2 \cdot \overline{1 - T^2} + 2CB \cdot \overline{1 - T^2} \cdot T^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$ seu proxime

$$TV \cdot \surd(1 - T^2) + \frac{TV}{TA} \cdot B \cdot \surd(1 - T^2) \cdot T^2.$$ Fiat $\surd(1 - T^2) = t$,

seu sit t cosinus laritudinis puncti M, & gradus paralleli circuli in eadem latitudine vocerur F. Sit etiam H gradus paralleli alterius in latitudine, cujus cosinus sit s. Substiruendo ut antea C loco TA, & $C + B$ loco TV fiet

$$F : H = \overline{C + B} \cdot t + B \cdot t \cdot \overline{1 - t^2} : \overline{C + B} \cdot s + B \cdot s \cdot \overline{1 - s^2}$$

$$= \overline{C + 2B} \cdot t - B \cdot t^3 : \overline{C + 2B} \cdot s - B \cdot s^3$$

$$= t - \frac{B \cdot t^3}{C + 2B} : s - \frac{B \cdot s^3}{C + 2B}.$$

Ex hac autem analogia facile eruetur

$$\frac{B}{C + 2B} = F \cdot s - H \cdot t : \overline{F \cdot s^3 - H \cdot t^3}$$

atque inde etiam colligetur

$$\frac{B}{C + B} = \frac{F \cdot s - H \cdot t}{H \cdot t \cdot \overline{1 - t^2} - F \cdot s \cdot \overline{1 - s^2}}.$$

CO-

COROLLARIA.

I. Cum radius meridianum oblatæ sphæroidis osculans in ipsa æquatoris intersectione V sit TA', & æquatoris radius sit TV, erit

$\overline{TV}$

prior meridiani gradus ad gradum quemlibet æquatoris in duplicata ratione semiaxis minoris ad majorem. Quare si primus meridiani gradus ex Condaminio assumatur hex. 56749, posita ratione semiaxium Terræ sphæroidicæ 231:230, erit æquaroris gradus hex. 57243: erit autem 57247 si meridiani gradus ex Bouguerio assumatur hexap. 56753. Hoc etiam dato erit æquatoris totius ambitus hex. 20608920, æquatoris radius hexap. 3280108, sive milliarium italicorum $4293\frac{1}{3}$ milliari unicuique tribuendo hexapedas 764. Erit etiam semiaxis minor Telluris hexap. 3265909, & differentia altitudinum supra centrum sub polis, & æquatore erit hexap. 14199, sive milliarium $18\frac{3}{5}$. Denique radius Terræ medioeris censeri poterit hexap. $3273008\frac{1}{2}$.

II. At insuper positis hisce omnibus cum æquatoris totius ambitus diurno motu absolvatur tempore $23^h\ 56'\ 4''$, sive $86164''$, erit arcus uno minuto secundo temporis absolutus pedum 1435: cujus spatii quadratum divisum per æquatoris diametrum dabit sinum versum ejusdem arcus pedum 0.05234, sive lin. 7.537. Et quia quadratum diametri est ad quadratum peripheriæ ut dimidia longitudo penduli uno secundo oscillantis ad spatium uno secundo temporis libero lapsu absolutum; si tota penduli uno secundo oscillantis longitudo sub æquatore, & in ipsa maris libella assumatur linearum 439.21, ut ferunt observationes, erit spatium libero lapsu confectum uno secundo temporis linearum 2167.41, & ad spatium, quod eodem tempore ob vim centrifugam posset confici, se habebit ut 216741:7537, sive ut $287\frac{1}{2}$: 1. Itaque pondus corporum sub æquatore se habebit ad vim centrifugam ut $287\frac{1}{2}$: 1, absoluta autem gravitas erit ad vim centrifugam ut $288\frac{1}{2}$: 1.

III. Jam vero juxta problematis hujus formulas æquatoris gra-

Cosmographia. S dus

dus ad gradum paralleli circuli in latitudine, cujus ſinus ſit T eſſe debet ut

$$TV : \overline{TV + B . T^2} . \sqrt{(1 - T^2)} = 1 : \overline{1 + \frac{B . T^2}{C}} \sqrt{(1 - T^2)}.$$

Quare ſi æquatoris terreſtris gradus, ut in Coroll. I., aſſumatur hexapedarum 57247, & minor ſemiaxis Terræ ad majorem ſe habeat ut 230 : 231, inquiraturque qui paralleli gradus eſſe debeat in altitudine 43° 32′, factis ſubſtitutionibus prodibit gradus hujuſmodi hexapedarum 41588, minor ſcilicet hexapedis 30, quam qui ex obſervationibus prodierat, atque intra eos limites erit diſſenſus, intra quos obſervationes ipſæ certiores eſſe non poſſunt.

PROBLEMA IV.

Dato gradu paralleli alicujus circuli, & dato gradu alio meridiani in ſphæroide oblata, & accedente proxime ad ſphæram, invenire proportionem ſemiaxium.

Sit G meridiani gradus, F vero gradus paralleli circuli, & coſinus latitudinis illius quidem ſit t, hujus autem s. Si ſemiaxis minor ut antea vocetur C, & differentia majoris, ac minoris B, radius circuli meridianum oſculantis in latitudine propoſita juxta prioris problematis formulas erit $C - B + 3B . T^2$, ſive $C + 2B - 3B . t^2$: & juxta formulas tertii problematis radius paralleli circuli erit quam proxime $\overline{C + 2B} . s - B . s^3$. Quia igitur in ſphæroide accedente proxime ad ſphæram meridiani, & paralleli cujuſvis gradus eſſe debent in ratione eadem radiorum erit etiam

$$G : F = 1 - \frac{3B . t^2}{C + 2B} : s - \frac{Bs^3}{C + 2B}.$$

Ex hac vero analogia facile eruetur

$$\frac{B}{C + 2B} = \frac{F - G . s}{3F . t^2 - G . s^3}$$

$$\frac{B}{C + B} = \frac{F - G . s}{F . \overline{3t^2 - 1} + G . s . \overline{1 - s^2}}$$

COROLLARIA.

Si fiat $t = 1$, & gradus G accipiatur ſub æquatore, poſterior for-

formula abibit in hanc aliam $\frac{B}{C+B} = \frac{F - G.s}{2F + G.s.\overline{1 - s^2}}$: atque ita si primus meridiani terrestris gradus, ab æquatore incipiendo, assumatur hexapedarum 56753, atque in latitudine 43° 32′ paralleli gradus assumatur hexap. 41618, scilicet si sit $s = 0.72497$, $F = 41618$, $G = 56753$, fiet $\frac{B}{C+B} = \frac{1}{216.8}$. In hoc igitur formularum genere differentia hexapedarum 30 juxta antecedens corollarium sufficiet ut ellipticitas ab $\frac{1}{231}$ ad $\frac{1}{216.8}$ traducatur.

II. Si paralleli, & meridiani gradus sub eadem latitudine accipiantur, comparenturque inter se invicem, & sit $t = s$, fiet

$$\frac{B}{C+B} = \frac{F. - G.s}{F.\overline{3s^2 - 1} + G.s.\overline{1 - s^2}} :$$

unde si manentibus cæteris quæ antea gradus G in latitudine 43° 32′ assumatur hexapedarum 57048, prodibit $\frac{B}{C+B} = \frac{1}{168}$ circiter. Si gradus ipse in eadem latitudine aliquanto major assumeretur, ut ex mensuris Taurinensibus posset colligi, minor e contra prodiret semiaxium differentia.

III. Dato autem paralleli gradu F, & cosinu s latitudinis, quo major fiet gradus meridiani G, ab æquatore scilicet pergendo ad polos, eo propius ad æqualitatem accedent quantitates F, & $G s$: atque ita exiguus etiam error, qui in observandis gradibus subrepserit, longe diversam ellipticitatem, & proportionem semiaxium exhibere poterit. In hisce igitur casibus magis suspectæ erunt formulæ, & minus certi qui ex ipsarum applicatione eruentur numeri: nec quispiam hærere debet quod cum eumdem paralleli gradum gradui Lapponico comparando quantitates F, & $G.s$, ut ex observationibus primum prodierunt, sint proxime inter se æquales, quæ exsurgit ellipticitas negativo signo afficiatur, & sphæroidem ad polos oblongam referat.

SCOLION.

Ex hoc itaque generali profpectu patet quid ex obfervationum omnium comparatione, independenter a quibufvis aliis primitivæ fluiditatis, æquilibrii, & denfitatis interni telluris nuclei hypothefibus directe colligatur. Primo fcilicet iis fepofitis menfuris, quæ inæqualitate attractionis materiei in terreftri fuperficie inæqualiter difpofitæ debent affici, fi Peruvianus, & Taurinenfis gradus, & bini priores Gallici, & Viennenfis etiam, ac Batavicus, & Lapponicus comparentur inter fe invicem, varia quidem ex fingulis combinationibus emergit femiaxium Terræ proportio, media tamen ex omnibus accepta minor femiaxis Terræ, qui per polos tranfit, ad æquatoris radium fe haberet ut 230:231. Deinde fi hæc ipfa affumatur femiaxium terreftrium ratio, inquiraturque qui gradus finguli, & qui in fingulis obfervationum error, diffenfufque effe poffit, feptem ii meridiani gradus cum gradu paralleli circuli in latitudine 43° 32′ intra limites illos congruent, intra quos obfervationes certæ, & accuratæ effe poffunt: neque inde Africanus, Romanus, & Parifienfis gradus amplius diffentient, fi ob terreftris materiæ difpofitionem confideremus priorem quidem gradum ampliorem, binos autem alios breviores prodire oportuiffe quam vere fint. Itaque obfervationibus graduum terreftrium fimul omnibus collectis, confideratis, comparatifque inter fe invicem ftatui poterit mediam fuperficiem Telluris proxime effe fphæroidicam, & femiaxem minorem, qui per polos tranfit, ad æquatoris radium effe quam proxime ut 230:231. Modo videndum fupereft quibus interioris nuclei hypothefibus experimenta pendulorum, & terreftrium ponderum phænomena cum eadem proportione femiaxium poffint conciliari. Hæc figuræ terreftris inveftigandæ methodus videtur rectior, quam fi media femiaxium ratio, quæ experimentis ipfis refpondet, ex hypothefibus æquilibrii fluidarum partium, denfitatifque interioris nuclei colligeretur, & quæreretur poftmodum quæ minima graduum omnium correctio adhibenda fit ut erroribus pofitivis, ac negativis fe compenfantibus gradus omnes ad fupputatam meridianorum terreftrium ellipticitatem reduci poffint: quam aliam methodum celebris Author fecutus eft. Cum enim obfervationes graduum, dimenfionefque curvaturam meridianorum

rum

rum independenter ab aliis hypothesibus exhibeant ut vere est; ad figuram Terræ determinandam videntur opportuniores quam quæ cum hypothesibus ipsis diversimode combinari, atque explicari possunt, pendulorum experimenta. Deinde non omnes quidem observationes graduum indifferenter ad curvaturam meridianorum determinandam adhiberi debent, sed quæ locorum, reductionumque omnium ratione habita videntur accuratiores. Denique in singulis gradibus juxta probabilitatum regulas corrigendis curandum est non tantum ut summa correctionum omnium sit minima, atque ut simul omnes, & quæ positivæ, & quæ negativæ sunt se se invicem compensent, verum etiam ut singulæ intra limites illos consistant, qui diligentiæ observatorum, observationumque certitudini possunt satis probabiliter assignari.

CAPUT SECUNDUM.

DE ÆQUILIBRIO PARTICULARUM OMNIUM SE SE TRHAHENTIUM.

THEOREMA I.

SI ad puncta singula solidorum similium quorumcumque ABC; abc, fig. 27, tendant æquales vires centripetæ crescentes, & decrescentes in duplicata ratione distantiarum reciproce, atque insuper rectæ AD, ad, & particulæ A, a similiter in superficie solidorum sint positæ; eorumdem vires secundum rectas ipsas AD, ad exercitæ proportionales erunt homologis lateribus AB, ab.

Dividi intelligantur duo solida in particulas quotcumque similes, & similiter positas G, g, quarum scilicet massæ sunt integris solidis proportionales: adeoque sint particulæ G, g in triplicata ratione laterum homologorum, distantiæ vero AG, ag sint in ratione simplici eorumdem laterum, ductisque ad rectas AD, ad perpendiculis GF, gf sit semper $AG : AF = ag : af$. Quia vires acceleratrices sunt massis attrahentibus directe, & quadratis distantia-
rum

rum reciproce proportionales, vires etiam particularum G, g, ſecundum AG, ag exercitæ erunt directe ut cubi, & reciproce ut quadrata homologorum laterum, ſive erunt in ratione ſimplici laterum AB, ab, atque ob datam rationem $AG : AF$, $ag : af$ vires etiam exercitæ ſecundum AD, ad erunt ut eadem latera AB, ab. Quod cum pro ſingulis particulis ſimilibus locum habeat, totæ vires, quæ in A, a agent ſecundum AD, ad erunt homologis lateribus AB, ab proportionales.

COROLLARIUM.

Quia vires ſecundum AB, & AD exercitæ univerſim ſunt inter ſe ut $AE : AF$, atque immutato angulo BAD variantur ipſæ in ratione ſimplici coſinus ejuſdem anguli; univerſim etiam attractiones pyramidum, conorum, ſolidorum ſimilium quorumcumque ABC, abc ſecundum quaſcumque rectas AD, ad inter ſe erunt in ratione compoſita ex ſimplici homologorum laterum AB, ab, ac pariter ex ſimplici coſinus angulorum BAD, bad, quos homologa eadem latera cum rectis propoſitis intercipiunt.

THEOREMA II.

Iiſdem poſitis attractrices vires ſphæræ, aut ſpæroidis cujuslibet homogeneæ a ſuperficie pergendo directe ad centrum erunt diſtantiis a centro proportionales.

Sit ſphærois aliqua revolutione ellipſeos $AVav$, fig. 28., circa axem Aa deſcripta, & ſimilis, ac concentrica ſphærois ſit Uu, ac per punctum quodcumque d traducantur rectæ FH, fh, quæ æqualem utrimque angulum Fdf, Hdh circa idem punctum conſtituant. Si angulus ipſe minuatur ut rectæ dF, df, ac pariter dH, dh inter ſe æquales cenſeri poſſint, ſimiles erunt oppoſitæ pyramides Fdf, Hdh, ac per antecedens theorema erunt attractrices vires pyramidum altitudinibus df, dH proportionales. At quia ob ſimilitudinem ellipſium circa idem centrum deſcriptarum æquales ſunt rectæ FM, dH; differentia attractionum oppoſitarum proportionalis erit interceptæ Md, ac ſe invicem deſtruent attractiones pyramidis dHh, & fruſti $FM\ mf$, & perinde ſe habebit punctum d ac ſi a ſola pyramide dM attraheretur. Quod cum pro ſingulis pyramidibus locum habeat, quæ converſa utcumque recta FH,

FH, & fh in sphæroide $AVav$ possunt concipi, quarum communis vertex sit d, sola interior sphærois Mud supererit, quæ punctum idem d ad centrum attrahat. At cum puncta D, d in superficie sphæroidum similium similiter sint posita, si sphærois utraque in totidem similes pyramides, & similiter positas resolvatur, patebit etiam ex antecedente theoremate pyramidum homologarum, totarumque adeo sphæroidum attractiones ad centrum T esse homologis semidiametris DT, dT proportionales. Itaque a superficie sphæræ, aut sphæroidis cujuslibet accedendo directe ad centrum attractrices vires minuentur in ratione simplici distantiarum.

COROLLARIA.

I. Cum tota recta FH, quæ in ellipsi FvH utcumque ducitur, & portio ipsius Md, quæ abscinditur ellipsi simili, & similiter posita Mud, bifariam dividantur in eodem puncto n, æqualesque sint interceptæ FM, dH; manifestum est strati cujuslibet sphæroidici superficiebus similibus $VFvD$, $UMud$ terminati attractrices vires in punctum quodcumque n spatii interioris Mud exercitas se invicem destruere: quo dato si interius spatium omni materia vacuum intelligatur, corpusculum ubilibet interius positum in neutram partem attrahetur, & quiescet.

II. Si ellipsis $AVav$ circa invariabilem axem Aa volvatur, & interim axis alius Vv ita varietur ut puncta extrema V, v non circulum, sed ellipsim aliam describant, atque ita gignatur solidum, quod simul oblatum, & oblongum sit; patebit simili modo attractrices vires accedendo ad centrum imminui in simplici ratione distantiarum. Cum enim sint ellipticæ omnes sectiones plano transeunte per Aa factæ, si sit solidum aliud simile, ac concentricum, cujus superficies transeat per punctum d, ut antea ostendi poterit vires particularum omnium extra solidum ipsum jacentium se invicem destruere, & solum interius solidum, quod punctum d attrahat, superesse. Legem attractionis sphærarum definivit Newtonus in Propos. LXXIII. Lib. I., Sphæroidum in Coroll. III. Propos. XCI.

THEOREMA III.

Si in eodem plano sint bini circuli concentrici RFH, ASM, fig. 29., & 30., ac circulus interior a recta Mr tangatur in puncto

cto R, uterque autem nutando circa Mr binos cuneos efficiat; quorum particulae singulae se se attrahant in ratione duplicata reciproca distantiarum; vires, quibus particulae R, & M trahentur perpendiculariter ad rectam Mr, aequales erunt inter se.

Ex punctis enim M, & R ducantur rectae MS, MN, & RF, RH utrimque aequaliter inclinatae ad rectas illas ML, RG tangenti Mr perpendiculares, atque insuper per rectas illas ducantur totidem plana circuli utriusque plano RFH perpendicularia. Manifestum est iis planis in utroque cuneo secari oportere triangula totidem similia: unde aequalibus semper angulis circa puncta M, R inclinando rectas MS, MN, & RF, RH normalibus iis planis, & triangulis semper similibus dividetur uterque cuneus in binaria numero aequalia pyramidum similium: junctaque FVH, & ductis SP, Np ad ML perpendicularibus, erit $2RV$ attractio pyramidum RF, RH in punctum R, attractio autem pyramidum MS, MN in punctum M erit $MP \pm Mp$, prout scilicet puncta P, p jacebunt in eamdem, aut in adversas partes cum puncto M. Est autem $\frac{MS}{AB}$ sinus semisummae duorum arcuum ML, LS aequalis

sin. $\frac{1}{2}ML$. cos. $\frac{1}{2}LS$ + cos. $\frac{1}{2}ML$. sin. $\frac{1}{2}LS$: & punctis P,p jacentibus ad eamdem partem cum puncto M, fig. 29., sinus $\frac{MN}{AB}$ semidifferentiae arcuum ML, LS est sin. $\frac{1}{2}ML$. cos. $\frac{1}{2}LS$ — cos. $\frac{1}{2}ML$. sin. $\frac{1}{2}LS$: punctis autem iisdem in fig. 30. jacentibus ex parte adversa semidifferentiae sinus est cos. $\frac{1}{2}ML$. sin. $\frac{1}{2}LS$ — sin. $\frac{1}{2}ML$. cos. $\frac{1}{2}LS$. Erit itaque in casu utroque $MS \pm MN = 2AB$. sin. $\frac{1}{2}ML$. cos. $\frac{1}{2}LS$ = $2ML$. cos $\frac{1}{2}LS = 2RG$. cos. $FRG = 2RF$: & cum sit insuper $MS \pm MN : MP \pm Mp = RF : RV$, erit etiam $MP \pm Mp = 2RV$: adeoque atractio pyramidum RF, RH in punctum R semper aequalis erit attractioni pyramidum MS, MN in punctum M, & tota cunei utriusque attractio in punctum M perpendiculariter ad Mr, exercita erit aequalis. CO-

COROLLARIUM.

Si bini circuli concentrici in planum aliud orthogonaliter projiciantur, quod transeat per Mr, & hoc est si ex punctis singulis circulorum in planum aliquod propositum ducantur totidem lineæ perpendiculares; prodibunt binæ ellipses similes, ac concentricæ, eruntque singulæ RV, MP, Mp in circulis ad singulas lineas analogas in ellipsibus in constanti ratione sinus totius ad cosinum inclinationis plani circularis, & plani alterius, in quo projectio orthogonaliter fieri intelligitur: adeoque si duobus circulis substituantur binæ ellipses similes, ac concentricæ, adhuc erit $MP \pm Mp = 2RV$, attractionesque utriusque pyramidum binarii semper æquales erunt inter se, & tota etiam attractio puncti R in cuneum plano RHF circulari, aut elliptico designatum æquabitur attractioni puncti M secundum ML in cuneum designatum plano MLr circulari pariter, aut elliptico. Propositionem hujusmodi lemmatis loco præmiserat Mac-Laurinus, eaque reductionibus antecedentibus videtur brevissime demonstrari.

THEOREMA IV.

Iisdem positis si proponatur sphærois revolutione ellipseos $AVav$, fig. 26., circa axem Aa genita, & ex puncto quocumque M in axes binos Aa, Vv ducantur perpendicula MR, MH; vis omnis, qua punctum M secundum MH trahetur, æqualis erit attractioni puncti R, & vis, qua punctum idem M trahetur secundum MR, æqualis erit attractioni puncti alterius H.

In primis ex conicorum elementis patet quod si sint binæ sphæroides similes, ac concentricæ, & similiter positæ, ac per commune ipsarum centrum traducatur aliquod planum, sectiones sphæroidis utriusque erunt ellipses binæ inter se similes. Patet secundo ex ipsis elementis, quod in eadem sphæroide sectiones planis parallelis factæ sunt ellipses pariter similes inter se. Ex quibus duobus tertium consequitur, quod si recta MRr tangat sphæroidem aliam propositæ similem, ac similiter positam, descriptamque axibus Rt, Uu, traducto per eamdem tangentem quocumque plano, sectiones sphæroidis utrusque similes erunt binis sectionibus, quæ parallelo plano per

centrum traducto possent utrobique effici, adeoque sectiones illæ erunt ellipses binæ similes inter se. Quod si insuper prius illud planum circa rectam *Mr* nutando cuneos binos efficiat superficiebus duarum sphæroidum terminatos, per corollarium superius, tota attractio puncti *R* in cuneum plano *RHF*, fig. 29., & 30., in sphæroide interiore designatum æquabitur attractioni puncti *M* secundum *LM* in cuneum plano *MBr* sectum: atque id quidem cum locum habeat pro cuneis singulis hinc inde æqualiter dissitis a plano ellipseos genitricis, in quos sphærois proposita resolvi potest, tota attractio puncti *M* in superficie sphæroidis positi secundum rectam *MH* æqualis erit vi omni, qua punctum *R* trahetur ad centrum *T*. Simili modo per rectam *MH* traductis quotcumque planis ostendi poterit vim particulæ ejusdem *M* secundum *MR* æquari attractioni puncti alterius *H*.

COROLLARIA.

I. Quia per Theor. II. attractrices vires sphæroidis a superficie pergendo directe ad centrum minuuntur in simplici ratione distantiarum, attractrices vires perpendiculares axi *Aa* in singulis punctis *M* erunt similiter proportionales distantiis *HT*, aut *MR* ab axe ipso, & vires perpendiculares plano æquatoris proportionales erunt distantiis *RT*, *MH* ab eodem plano; binæ autem eædem vires inter se erunt in ratione composita absolutarum virium in polo *A*, & æquatore *V* agentium, quantitatumque $\frac{HT}{VT}$, $\frac{RT}{AT}$.

II. Si oblata simul, & oblonga sit sphærois, ut in Coroll. II. Theor. II. proponebatur, simili modo ostendi poterit vires puncti *M* secundum *MH*, *MR* æquales esse attractionibus punctorum *R*, & *H*. Nam si solidi alterius similis, ac concentrici superficies transeat punctum *R*, sectiones utriusque solidi interioris, exteriorisque, & quæ plano per centrum transeunte, & quæ planis aliis parallelis fient, erunt ellipses similes inter se: unde facile colligetur planum per chordam *Mr* traductum secare in utroque solido ellipses similes, & vires puncti *M* secundum *MH*, *MR* æquales esse attractionibus punctorum *R*, & *H*.

THEO.

THEOREMA V.

Si ſphæroïs $AVav$ conſtet fluido homogeneo, cujus particulæ omnes æquales M gravitent in ſe invicem viribus æqualibus decreſcentibus in duplicata ratione auctarum diſtantiarum, & præterea ſollicitentur viribus aliis quibuſcumque, quarum directio ſit perpendicularis aut axi Aa, aut æquatoris plano Vv, quæque proportionales ſint aut diſtantiæ MR ab axe, aut diſtantiæ MH a plano æquatoris, ac ſi inſuper ſemiaxes AT, VT ellipſeos genitricis ſint reciproce proportionales viribus totis agentibus in A, & V; vis omnis compoſita puncti M dirigetur ſecundum MP ellipſi normalem in puncto M, atque erit normali eidem proportionalis.

Quia per corollarium primum antecedentis theorematis attractrices vires perpendiculares axi ſunt proportionales diſtantiis ab ipſo axe, & vires æquatori perpendiculares ſunt proportionales diſtantiis ab æquatore, atque inſuper juxta hypotheſim vires omnes extraneæ ſecundum MR, aut MH agentes ſunt ipſis MR, aut MH proportionales; tota etiam vis, quæ ſecundum MR aget, variabitur in ratione rectæ MR, ac pariter in ratione rectæ MH variabitur vis tota, quæ ſecundum MH aget. Cum igitur juxta hypotheſim eædem vires omnes, quæ in V, & A agunt, ſint inter ſe ut $\frac{1}{VT} : \frac{1}{AT}$; vis abſoluta, quæ in M aget ſecundum MR, erit $= MR \cdot \frac{1}{VT}$, & abſoluta vis ſecundum MH erit $= MH \cdot \frac{1}{AT}$, ſive erit vis prior ad poſteriorem ut $MR \cdot AT^2 : MH \cdot VT^2$. At ſi MT ſit ellipſi perpendicularis in puncto M, ex nota ellipſeos proprietate, erit $AT^2 : VT^2 = HP : HT = HP : MR$. Itaque vis ſecundum MR ad vim ſecundum MH ſe habebit ut ſubnormalis ellipſeos HP ad ſemiordinatam MH, & vis omnis compoſita ſecundum normalem MP dirigetur, atque erit ipſi normali proportionalis.

COROLLARIA.

I. Si producatur TA quouſque occurrat tangenti in puncto N, atque in tangentem ipſam ex T ducantur perpendiculum TQ, ſimi-

lia erunt triangula PMH, NTQ, & ex elementis conicorum erit $MP.TQ = MH.TN = TA^2$, ac vis omnis composita secundum MP, cum sit directe ut MP, erit etiam reciproce ut TQ: & si ex puncto P in semidiametrum MT ducatur perpendiculum Pp, vis eadem omnis resolvi poterit in duas alias, quarum una dirigatur ad centrum T, & sit proportionalis rectæ Mp, altera proportionalis sit rectæ Pp, & sit perpendicularis semidiametro ellipseos MT.

II. Jam vero ob rectos angulos MHP, MpP circulus diametro MP descriptus transibit per duo puncta H, p, & angulus TMN a tangente, & secante factus erit æqualis angulo segmenti alterni MHp. Quare cum etiam anguli TMH, NTM sint æquales; similia erunt triangula MHp, TMN, eritque $Mp : MH = TN : TM$, sive erit $TM.Mp = TN.MH = MP.TQ = TA^2$, & recta TM erit reciproce ut Mp: & cum attractio omnis sphæroidis, quæ juxta normalem lineam dirigitur, sit ipsi normali MP proportionalis; sphæroidis attractio ad centrum Mp erit reciproce proportionalis distantiæ a centro, sive ellipseos semidiametro TM.

III. Et quia a superficie pergendo directe ad centrum per Teor. II. attractio omnis minuitur in ratione simplici distantiarum MT, mT, & vires omnes extraneæ sunt distantiis ab axe, & a plano æquatoris proportionales, si sint insuper $AVav$, $RUtu$ superficies sphæroidicæ similes, ac concentricæ, eadem erit ratio puncti cujuscumque m, & vis ipsius omnis dirigetur secundum lineam ellipsi RmU normalem, atque erit normali lineæ proportionalis; vis autem puncti m ad centrum T erit ut $\frac{RT^2}{mT}$.

THEOREMA VI.

Iisdem positis pondera columnarum omnium MT, VT a superficie ad centrum ductarum erunt inter se æqualia, eritque totum fluidum in æquilibrio.

Nam primo si sint binæ superficies sphæroidicæ similes, ac concentricæ $AVav$, $RUtu$; erunt interceptæ Mm, VU totis MT, VT proportionales. Et si superficies ipsæ accipiantur inter se satis proximæ, & vis particularum omnium M, m in centrum T eadem censeri possit; erit pondus elementi cujuslibet Mm ut numerus

con-

conjunctim particularum omnium *Mm*, & vis particulae uniuscujusque; & cum sit *Mm* directe ut *MT*, & vis particulae unius *M* sit ut *MT* reciproce, per Coroll. II. Theor. V., idem semper manebit pondus elementorum omnium *Mm*, *VU*. Quod cum de singulis hujusmodi sphaeroidicis stratis valeat, in quae omnis sphaerois resolvi potest, pondera etiam columnarum omnium *MT*, *VT* a superficie ad centrum ductarum erunt inter se aequalia. Hoc autem dato si *AVav* referat planum aliquod per axem sphaeroidis *Aa* ductum, nullus in plano ipso motus oriri poterit, quo columnae aliae *MT* altiores, aliae humiliores fiant. At quia insuper per Theorema antecedens vis omnis composita in punctis singulis *M*, *m* plani ejusdem dirigitur secundum lineas ellipsibus concentricis normales, agitque in plano *AVav*; nullus etiam fluidi motus secundum lineas plano normales haberi poterit. Et quia denique motus omnis ad planum aliquod obliquus semper in duos alios resolvitur, quorum unus in plano ipso fiat, alter sit plano perpendicularis; patet secundum alias quascumque directiones nullum fluidi motum esse posse, scilicet fluidum esse in aequilibrio.

COROLLARIA.

I. Si sphaerois aliqua sub polis *A*, *a* compressa circa minorem axem *Aa* volvatur, & particulae omnes se se attrahant in duplicata ratione inversa distantiarum, & sit aequatoris radius *VT* ad minorem semiaxem *AT* ut attractio in polo *A* ad differentiam attractionis, & vis centrifugae sub aequatore *V*; erunt particulae omnes in aequilibrio. Quae enim rotatorio motu concipitur vis centrifuga proportionalis est radiis circulorum eodem tempore descriptorum, sive distantiae *MR* puncti cujusque *M* a minore axe sphaeroidis *Aa*.

II. Si proponatur sphaerois oblonga revolutione ellipseos *AVav* circa majorem axem *Vv* genita, & particulae ipsius omnes se se attrahant eadem lege, attrahanturque insuper a corpore alio satis dissito in productione axis majoris posito, & vis omnis, quae ex attractione corporis illius longinqui parallele ad axem majorem oritur, sit proportionalis triplae distantiae a plano ipso aequatoris, vis vero alia, qua axem versus particulae, & parallele ad aequatoris pla-

num

num trahuntur, proportionalis sit distantiæ ab ipso majore axe, ac denique semiaxis major VT ad æquatoris radium AT se habeat ut attractio in æquatore Aa ad attractionem totam in polo V; erit fluidum omne in æquilibrio.

III. Primo igitur in hypothesi partium se se trahentium in ratione duplicata reciproca distantiarum, si Tellus fluida, & homogenea esset omnis, & circa axem diurno motu revolveretur, sphæroidis circa polos compressæ formam indueret, in qua semiaxis minor ad æquatoris radium se haberet ut differentia gravitatis, & vis centrifugæ sub æquatore ad gravitatem totam sub polis. Deinde vero si particulæ omnes Terræ quiescentis ut antea se attraherent, & attraherentur insuper a Sole, aut Luna, in oblongam sphæroidem Terra conformaretur, & semiaxis major sphæroidis dirigeretur ad Solem, vel ad Lunam, atque ad minorem semiaxem se haberet ut tota gravitas sub æquatore ad differentiam absolutarum virium a Terra, & Sole, aut Luna sub polis oblongæ ipsius sphæroidis exercitarum.

IV. Quod si denique bini simul casus hujusmodi componantur, hoc est si particulæ omnes Terræ homogeneæ se se attrahant, attrahanturque a Sole, & Luna, iis legibus, quæ jam indicatæ sunt, atque omnes simul volvantur circa centrum, ob parvitatem virium extranearum, atque exiguam in utraque sphæroide differentiam semiaxium, geminari poterit constructio, & Terra oblongatæ simul, atque oblongæ sphæroidis figuram referet, quæ scilicet gigni posset si ellipsis circa majorem axem ita revolveretur, ut vertex minoris axis ellipsim aliam describeret. Major autem compositæ sphæroidis axis ad Solem, vel ad Lunam dirigetur, minor erit ipse axis diurnæ rotationis: & bini iidem axes, atque axis tertius binos intersecans ad rectos angulos, inter se erunt in ratione reciproca virium in singulis verticibus agentium. Videbimus modo particulas omnes terrestres jam indicatis legibus a Sole, ac Luna attrahi.

PROBLEMA V.

Si corpus aliquod L volvatur circa corpus T, fig. 31, attrahaturque a corpore alio S satis dissito, & in eodem plano orbitæ BLD posito in ratione directa massæ, & ratione duplicata reciproca distantiæ, determinare vires omnes, quæ inde oriuntur, parallele, & perpendiculariter ad rectas LT, ST. Sint

Sint rectæ LM, DT ad ST perpendiculares, parallela LN, & in rectam LT productam ducatur perpendicularis alia SK. Sit etiam $1 : M$ ratio massarum in S, & T, & sint absolutæ vires $\frac{1}{SL^2}$, $\frac{M}{TL^2}$. Cum esse debeat $LK = \frac{ST.TM}{TL} - TL$, erit vis omnis, quæ ex attractione corporis illius S secundum LK orietur, $\frac{LK}{SL^3} = \frac{ST.TM}{TL.SL^3} - \frac{TL}{SL^3}$: & cum etiam corpus T in S attrahatur vi $\frac{1}{ST^2}$ juxta ST, & vi $\frac{TM}{TL.ST^3}$ juxta LK; erit vis omnis, qua corpus L a T juxta LT distrahetur, $\frac{ST.TM - TL^2}{TL.LS^3} - \frac{TM}{LT.ST^3}$.

Simili modo erit $\frac{ST.LM}{TL.SL^3} - \frac{LM}{TL.ST^3}$ vis omnis, quæ dirigetur perpendiculariter ad LT: ac denique vi secundum SL resoluta secundum LT, ST vis, quæ ex attractione corporis illius S parallele ad ST orietur, erit $\frac{ST}{SL^3} - \frac{1}{ST^2}$.

Quod si igitur corpus S adeo ab L, & T distet ut proxime censeri possit $SL^3 = (ST^2 + LT^2 - 2ST.TM)^{\frac{3}{2}} = ST^3 - 3ST^2.TM$, & $\frac{1}{SL^3} = \frac{1}{ST^3} + \frac{3TM}{ST^4}$, & minores alii seriei termini possint negligi, erit vis parallele ad rectam ST exercita $\frac{ST}{SL^3} - \frac{1}{ST^2} = \frac{3TM}{ST^3}$: vis tendens ex T in $L = -\frac{TL}{ST^3} + \frac{3TM^2}{LT.ST^3}$: vis rectæ LT perpendicularis $= \frac{3LM.TM}{TL.ST^3}$.

COROLLARIA.

I. Cum $\frac{3TM^2}{LT.ST^3}$, quæ ob signi contrarietatem tendit ex T in L, sit ipsa prioris vis $\frac{3TM}{ST^3}$ portio, quæ juxta directionem rectæ TL exer-

exercetur, & $\frac{3LM.TM}{TL.ST^3}$ portio alia, quæ exercetur perpendiculariter ad LT, in hypothesi corporis illius S satis dissiti, binæ vires in corpore L exsurgent, quarum una $\frac{TL}{ST^3}$ tendet ex L in T, & erit radio TL proportionalis, altera $\frac{3TM}{ST^3}$ tendet ex N in L, & proportionalis erit triplæ distantiæ corporis L a recta DT, quæ est rectæ ST perpendicularis, quemadmodum in corollariis theorematis antecedentis assumptum est. Erit etiam $\frac{2BT}{ST^3}$ vis, quæ in B tendet ex T in S, demeturque gravitati corporis L in T: atque in D erit $\frac{DT}{ST^3}$ vis, quæ adjicietur gravitati, & in orbita circulari vis posterior prioris dimidia erit.

II. Vis $\frac{LT}{ST^3}$ erit ad vim $\frac{1}{ST^2}$, quæ exercetur ex S in T, ut $LT:ST$. Generatim vero si dum corpus L volvitur circa T corpus etiam T volvatur circa aliud S, & orbitæ pro circularibus assumi possint, ac ratio temporum periodicorum corporis L circa T, & T circa S sit $n:1$, juxta Theor. I. Lib. I., erit gravitas corporis T in S ad gravitatem corporis L in T ut $n^2 . ST:LT$. Quare compositis rationibus vis perturbatrix $\frac{LT}{ST^3}$ in mediocri distantia erit ad vim $\frac{M}{LT^2}$ gravitatis corporis L in T ut $n^2:1$, & si gravitas ipsa in mediocri eadem distantia pro unitate accipiatur, generatim erit vis perturbatrix $\frac{LT}{ST^3} = n^2 . LT$, & vis omnis residua corporis L in T erit

$$\frac{1}{LT^2} + n^2 . LT - 3n^2 . LT . \text{cos.}\, STL^2 = \frac{1}{LT^2} - \frac{1}{2} n^2 . LT + \frac{3}{2} n^2 . LT . \text{cos.}\, 2STL.$$

III. Quia tempus periodicum Lunæ circa Terram est $27^d 7^h 43'$, atque

atque eſt annus ſidereus $365^d 6^h 9'$, erit $1 : n^2 = 178725 : 1000$ ſatis proxime, & gravitas Lunæ in Terram in mediocri diſtantia erit ad vim perturbatricem $\frac{LT}{ST^3}$, quæ a Sole juxta vectorem radium lunaris orbitæ exercetur, ut $178.725 : 1$. Prior autem vis variabitur in ratione reciproca duplicata, altera in ratione directa ſimplici diſtantiæ. Eadem etiam eruetur ratio mediocris vis gravitatis ad vim mediocrem perturbatricem in hypotheſi orbitæ ellipticæ: cum juxta Theor. IX. Lib. I. velocitas in ellipſi ad mediocrem diſtantiam ea ſit, qua circulus eadem vi gravitatis, & in eadem a centro diſtantia deſcribi poſſet: & juxta Cor. IV. Theor. X. tempora periodica in ellipſibus eadem ſint quæ in circulis ad diſtantiam mediam deſcriptis.

SCHOLION.

Newtonus jam in Propoſ. XIX, & XXIV. Lib. III. Princip. Mathem. præſenſerat figuram Terræ totius fluidæ, & homogeneæ, ſive ratione diurni motus, ſive ob actionem Lunæ, & Solis, non niſi ſphæroidicam eſſe poſſe, oblatam quidem in priore caſu, & oblongam in caſu altero: atque idcirco Daniel Bernoullius Cap. II. §. VIII. de fluxu, ac refluxu maris acute dixerat Newtono trans velum etiam apparuiſſe quæ vix ab aliis microſcopii ſubſidio diſtingui poſſunt. Demonſtrationem theorematis tradiderunt poſtmodum Mac-Laurinus in diſſertatione de fluxu, & refluxu maris, quæ anno 1740 a Pariſienſi Academia præmium retulit, & Simpſonius in Tranſactionibus Philoſophicis anni 1741, atque adhuc nitidius expoſuerunt ille quidem Cap. XIV. Lib. I., iſte autem Sect. IX. Par. II. illuſtrium operum de Fluxionibus: & cum Mathematici præſtantiſſimi le Grange, & la Place hæc omnia ad ſublimiorem analyſim revocaverint, ſimplicior potius in hoc capite ſynthetica Mac-Laurini demonſtratio reddita eſt cum æquilibrii caſum eo deduximus, ut datis viribus in ſingulas homogeneæ ſphæroidis particulas agentibus, & traducto per centrum ſphæroidis plano pateret jam neque in plano ipſo, neque ſecundum lineas plano perpendiculares motum aliquem haberi poſſe.

CAPUT TERTIUM.

DE ATTRACTIONE CORPORUM ROTUNDORUM.

THEOREMA VII.

Si ad æquales omnes ſphæræ alicujus particulas tendant æquales vires creſcentes, aut decreſcentes in duplicata ratione diſtantiarum reciproce; tota ſphæræ attractio in punctum aliquod exterius poſitum exercita erit directe ut materiæ quantitas, & reciproce ut quadratum diſtantiæ a centro.

Sit MCN, fig. 32, ſectio per punctum A, & centrum ſphæræ O facta, accipianturque duo puncta C, c ſatis proxima, ducanturque AC, Ac, atque ipſis veluti radiis deſcribantur circulares arcus HCD, cd, ac deinde ex C in AN, & ex O in AC productam demittantur perpendicula CB, OP, jungaturque OC, ac radius ad peripheriam ſe habeat ut $1:p$. Tota arcus Cc attractio ſecundum AB erit $\frac{AB.Cc}{AC^3}$, & propterea erit $\frac{p.AB.BC.Cc}{AC^3}$ attractio circularis annuli revolutione arcus Cc circa axem MN geniti. Erunt autem æquales anguli HcC, ACM, cCT, & angulus cCT arcui CT ad peripheriam inſiſtens æqualis erit angulo COP, qui ad centrum inſiſtit dimidio eidem arcui, eruntque inter ſe ſimilia triangula rectangula CcH, COP: adeoque fiet $Cc:Hc = CO:PO = CO:\frac{AO.BC}{AC}$, & $Cc = \frac{AC.CO.Hc}{AO.BC}$, atque annuli totius attractio erit $\frac{p.CO.AB.Hc}{AO.AC^2}$. Inſuper in triangulo CAO eſt $AC^2 + AO^2 = CO^2 + 2AO.AB$, atque eſt $AO^2 - CO^2 = AM.AN$. Erit igitur attractio eadem $= \frac{p.CO.\overline{AC^2 + AM.MN}.Hc}{2AO^2.AC^2}$

=

$$= \frac{p.MO.Dd}{2AO^2} + \frac{p.MO.AM.MN.Dd}{2AO^2.AD^3}.$$

Jam vero dum punctum D ex M in N transit summa omnium Dd est MN, seu $2MO$, & summa omnium $\frac{Dd}{AD^2}$ est $\frac{1}{AM} - \frac{1}{AN}$, sive est $\frac{2MO}{AM.AN}$. Erit itaque attractio sphæricæ superficiei $\frac{2p.MO^2}{AO^2}$: & cum $2p.MO^2$ sit ipsa sphærica superficies; attractio strati cujuscumque sphærici, adeoque etiam sphæræ integræ erit directe ut materiæ quantitas, & reciproce ut quadratum distantiæ a centro.

COROLLARIA.

I. Si punctum A tangat exterius sphæricam superficiem, & in posteriore formula $\frac{2p.MO^2}{AO^2}$ fiat $AO = MO$, prodibit tota superficiei ipsius attractio $= 2p$. Quod si vero punctum A sit in ipsa sphærica superficie, ductaque chorda MC, & reassumendo priorem formulam $p\frac{.MB.BC.Cc}{MC^2}$ fiat $MC^2 = 2MO.MB$, & $Cc = \frac{MO.Bb}{BC}$, fig. 33., erit attractionis elementum $\frac{\frac{1}{2}p.Bb}{\sqrt{(2MO.MB)}} = \frac{p}{2\sqrt{2MO}}.\frac{Bb}{\sqrt{MB}}$: & cum summa omnium $\frac{Bb}{\sqrt{MB}}$ sit $2\sqrt{MB}$, posita $MB = 2MO$, erit tota superficiei sphæricæ attractio $= p$.

II. Patet autem ex Coroll. I. Theor. II. attractiones punctorum omnium strati cujuslibet sphæroidici, adeoque etiam sphæricæ alicujus superficiei in punctum aliquod interius positum exercitas se invicem destruere, & summam attractionum omnium evanescere. Quod si igitur punctum aliquod interius tangat sphæricam superficiem, ac deinde in superficie ipsa collocetur, postmodum vero superficiem eamdem exterius tangat, attractiones puncti propositi in tribus hisce casibus erunt in progressione arithmetica o, p, $2p$, atque in postremo casu duplo major erit attractio quam in secundo: atque ita casuum distinctione quam alii authores notaverant paradoxi species evanescet.

III. Hujus autem progreſſionis ratio patet ex formula
$\frac{p.MO.Dd}{2AO^3} + \frac{p.MO.AM.MN.Dd}{2AO^3.AD^3}$.
Nam ſi quæratur attractio circuli exigui radio Bc deſcripti, fig 32., & fiat $AM = AD = Dd$, evadet ſecundus formulæ ipſius terminus $\frac{p.MO.MN}{2AO^3}$: ac deinde congruentibus punctis M, & C, fiet $Dd = 0$, & prior terminus evaneſcet, ſecundus vero, ſeu tota exigui circuli attractio fiet $= p$. Quod ſi quæratur ſuperficiei reliquæ attractio, & fiat $AM = 0$, evaneſcet ſecundus terminus, ac fiet attractionis elementum $\frac{p.Dd}{2AO}$, ac poſita ſumma omnium $Dd = 2AO$, attractio ſuperficiei totius reliquæ æqualis erit attractioni circuli illius exigui. Addetur autem circuli attractio attractioni reliquæ ſuperficiei dum punctum A exterius tanget ſphæricam ſuperficiem ſubtrahetur vero cum interior erit contactus: & denique cum punctum A in ipſa erit ſuperficie ſphæræ in neutram partem a circulo illo exiguo impelli poterit.

IV. Cum ſit ſphæræ ſoliditas $\frac{2}{3} p.MO^3$, erit attractio ſphæræ in punctum aliquod exterius poſitum $\frac{2p.MO^3}{3AO^2}$, eadem ſcilicet ac ſi omnis materies, quæ in ſphæra eſt, in ſphæræ centro colligeretur. Quod ſi ſit $MO = AO$, erit ſphæræ attractio $\frac{2}{3}p.MO$: nimirum attractiones ſphærarum homogenearum in extima ſuperficie erunt ſphærarum radiis proportionales, ut etiam in Theor. I. dictum eſt. Denique ſi ſphæræ aut nucleos ſphæricos diverſæ denſitatis in centro habeant, aut ex ſtratis ſphæricis hetherogeneis coaleſcant, & denſitates recedendo a centro augeantur, vel imminuantur in data quavis ratione diſtantiarum, erunt ſemper attractiones directe ut maſſæ, & reciproce ut quadrata diſtantiarum.

PROBLEMA VI.

Invenire attractionem ſpæroidis oblatæ, & proxime ad ſphæram accedentis in punctum aliquod in productione axis majoris poſitum.

Sit

Sit MQN ſphæroidis fig. 33., & MCN ſphæræ inſcriptæ ſectio per minorem axem MN facta, ducanturque ex puncto A rectæ AT, At ſibi proximæ, quæ ſphæræ occurrant in punctis C, T, c, t, unde ad MN ducantur perpendicula CB, TF, cb, tf. Sint inſuper OP, ORp perpendicula ex centro O ducta in rectas AT, At, producaturque BC quouſque occurrat ſphæroidi in Q, & ex C in At demittatur perpendiculum aliud CH. Tum ſi ſit $AO = a$, ſemiaxis minor $MO = C$, differentia majoris, & minoris $= B$, erit $QC = \frac{B}{C} . BC$, & totus annulus circularis revolutione ipſius QC circa axem genitus $= \frac{pB}{C} . BC^2$. Cumque ob affinitatem ſphæræ, & ſphæroidis, annuli puncta omnia eodem modo agant in punctum A, erit $\frac{pB}{C} . BC^2 . \frac{AB . Bb}{AC^3}$ attractio ſecundum AB totius materiæ, qua ſphærois ſphæram inſcriptam ſuperat, & quæ duobus planis axi MN perpendicularibus in punctis B, b intercipitur. Eſt vero ob ſimilitudinem triangulorum $\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AO}$, & $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{PO^2}{AO^2}$. Inſuper ex natura circuli eſt $Bb : Cc = BC : MO$, & juxta Theor. VII. eſt $Cc : Hc = MO . AC : AO . BC$, & $Hc : HC = PO : PC$, atque eſt pariter $HC : Rp = AC : AR = AC : AP$, adeoque compoſitis rationibus eſt $Bb : Rp = BC . MO . AC . PO . AC : MO . AO . BC . PC . AP$, ſive eſt $Bb = \frac{AC^2 . PO . Rp}{AO . PC . AP}$. Hiſce valoribus ſubſtitutis ſuo loco ſingulis fiet attractio materiæ ejuſdem $\frac{pB}{C} . \frac{PO^3 . AC^2 . Rp}{PC . AO^4}$: atque erit ſimiliter $\frac{pB}{C} . \frac{PO^3 . AT^2 . Rp}{PC . AO^4}$ attractio totius materiæ ultra ſphæram inſcriptam redundantis, & interceptæ duobus planis perpendicularibus axi in punctis F, & f. Quare ob $AC^2 + AT^2 = 2AP^2 + 2PC^2$ erit elementum differentiæ attractionis ſphæræ, & ſphæroidis $= \frac{pB}{C . a^4} . \frac{PO^3 . \overline{2AP^2 + 2PC^2} . Rp}{PC}$; & ſi recta

vo-

PC vocetur X, & ſit $PO = \sqrt{C^2 - X^2}$, & $Rp = \frac{X \, . \, dX}{\sqrt{C^2 - X^2}} = \frac{PC \, . \, dX}{PO}$, fiet elementum quæſitæ attractionis

$\frac{2pB}{C \, . \, a^4} \, . \, \overline{C^2 - X^2} \, . \, \overline{a^2 - C^2 + 2X^2} \, . \, dX$, cujus ſumma cum ſit $=$

$\frac{2pB}{C \, . \, a^4} \, . \, (a^2 C^2 X - C^4 X + C^2 X^3 - \frac{1}{3} a^2 X^3 - \frac{2}{5} X^5)$, ſubſtituendo pro X radium ſphæræ C, fiet differentia attractionis ſphæroidis, & ſphæræ inſcriptæ $= \frac{2pB}{C \, . \, a^4} \, . \, \overline{\frac{2}{3} a^2 C^3 - \frac{2}{5} C^5}$, atque addita attractione ſphæræ erit tota attractio ſphæroidis $= \frac{2pC^3}{3a^2} + \frac{4pBC^2}{3a^2} - \frac{4pBC^4}{5a^4}$.

COROLLARIUM.

Si ſit $a = C$, hoc eſt ſi punctum A ſit in polo ſphæroidis oblatæ, fiet attractio ſphæroidis $= \frac{2}{3} pC + \frac{8}{15} pB$. Et ſi ſphærois oblonga proponeretur, cujus major axis eſſet C, differentia majoris, & minoris B, quantitas eadem B negative accipienda erit, ac fiet in polo ſphæroidis oblongæ attractio $= \frac{2}{3} pC - \frac{8}{15} pB$. Si ſemiaxis major ſphæroidis oblongæ ſit $C + B$, minor C, ſubſtituendo in antecedente expreſſione $C + B$ loco C, fiet in polo oblongæ ſphæroidis, quæ eoſdem ſemiaxes habeat cum oblata, attractio omnis $\frac{2}{3} pC + \frac{2}{15} pB$.

THEOREMA VIII.

Si ſphærois accedat proxime ad ſphæram, & punctum A' extra productionem axis MN ubilibet accipiatur, attractio omnis ſecundum $A'O$ exercita proxime æqualis erit attractioni alterius ſphæroidis, cujus axis ſit $2M'O$, & quæ eamdem ſoliditatem propoſitæ ſphæroidis habeat.

In primis ſi eodem plano, eodemque centro deſcribantur ellipſis aliqua, quæ accedat proxime ad circulum, & circulus, qui eamdem aream cum ellipſi complectatur; erecta ex centro linea ad pla-

planum propoſitum perpendiculari, in quovis lineæ ipſius puncto eadem erit attractio ab ellipſi, & a circulo exercita. Nam ob arearum æqualitatem, ſpatium, quo ellipſis in vertice majoris axis excurret ultra circulum, æquale erit ſpatio, quo circa verticem minoris axis deficiet: & ob ellipſim proxime circularem, utriuſque ſpatii puncta omnia cenſeri poterunt diſtantiam a perpendiculari erecta habere eamdem, & compenſare ſe ſe invicem vires omnes, & quibus ellipſis excedit circulum, & quibus deficit. Deinde ſi ellipſim inclinari intelligamus, & circa minorem axem aliquantulum torqueri, imminuta diſtantia ex parte una augebitur attractio, & minuetur ex parte altera: & ſi inclinatio omnis exigua ſit, negligendo differentiam incrementi, & decrementi virium, cenſeri poterit vim omnem, quæ ad ellipſeos centrum dirigitur, manere eamdem. Nam ſi recta XZ, fig. 34., ſemiordinatam aliquam ellipſeos axi minori in puncto o normalem referat, ac ſit pariter rectæ Ao normalis, eaque ſic vertatur circa o ut puncta X, Z circulares arcus XU, ZV deſcribendo abeant in U, & V, atque in AU, & AZ ex X, & V demittantur perpendicula Xx, Vz, erit attractio punctorum U, & V ſecundum Ao exercita $= \frac{Au}{AU^2} + \frac{Av}{AV^2} =$

$$\frac{Au}{AX^2 + 2AX^3 . Ux} + \frac{Av}{AZ^2 - 3AZ^3 . Zz} = \frac{2Ao}{AX^2} - \frac{3Au.Ux + 3Av.Zz}{AX^3}:$$

unde ſi inflexionis angulus ſit ſatis parvus negligi poterunt producta rectarum Ux, Zz in differentiam rectarum Au, Av, & attractio punctorum U, V ſecundum Ao æqualis erit attractioni $\frac{2Ao}{AX^2}$ punctorum X, & Z, ac totæ duarum rectarum XZ, VU attractiones æquales erunt. Quod cum pro ſingulis ſemiordinatis ellipſeos cujuſque valeat, quæ in ſphæroide propoſita planis quibuslibet per radium $M'O$, fig. 33., parallele ad tangentem puncti M' ductis ſecari poſſunt, tota etiam attractio ellipſeos uniuſcujuſque æqualis erit attractioni circuli, qui eamdem aream, atque idem centrum cum ellipſi habeat, ac ſit inſuper diametro per M' ducto perpendicularis, ac tota attractio ſphæroidis in punctum A' æqualis erit attractioni alterius ſphæroidis æque ſolidæ, & cujus revolutionis axis ſit ipſa diameter, quæ per M' ducitur.

CO-

COROLLARIUM.

Quia radius circuli, qui eamdem aream cum ellipſi habeat, eſt medius proportionalis inter binos ellipſeos ſemiaxes, ellipſeos autem in O ſectæ plano per ſemidiametrum conjugatam OG, parallele ad tangentem puncti M', tranſeunte ſemiaxes bini ſunt ſemidiameter eadem OG, & æquatoris radius $C+B$, atque inſuper aliæ ellipſes, inter ſe ſimiles cum ſint, eamdem ſervant proportionem ſemiaxium OG, & $C+B$; tota etiam ſphæroidis propoſitæ attractio in punctum A' æqualis erit attractioni alterius ſphæroidis, cujus revolutionis axis ſit $2M'O$, & in qua æquatoris radius ſit medius proportionalis inter OG, & $C+B$.

PROBLEMA VII.

Iiſdem poſitis attractionem ſphæroidis in punctum quodvis ubivis poſitum invenire.

Si in ſphæroide propoſita coſinus latitudinis puncti M', vel ſinus diſtantiæ a polo M ut antea acceptæ vocetur t, erit ſphæroidis ſemidiameter $M'O = C + B.t^2$, quemadmodum ex iiſdem formulis priorum problematum libri hujus facile colligitur. Tum vero ob angulum $M'OG$ proxime æqualem recto erit $\sqrt{1-t^2}$ ſinus diſtantiæ puncti G a polo N, ac fiet conjugata ſemidiameter $OG = C+B-B.t^2$, eritque $C+B-\frac{1}{2}B.t^2$ media proportionalis inter conjugatam ſemidiametrum OG, & æquatoris radium $C+B$. At juxta corollarium ſuperius attractio propoſitæ ſphæroidis in punctum A' ſecundum $A'O$ exercita æqualis eſt attractioni ſphæroidis alterius cujus revolutionis ſemiaxis ſit $C+B.t^2$, & æquatoris radices $C+B-\frac{1}{2}B.t^2$, & in qua idcirco differentia ſemiaxium ſit $B-\frac{3}{2}B.t^2$. Quod ſi igitur in formula Probl. VI. ſcribamus $C+B.t^2$ loco C, & $B-\frac{3}{2}B.t^2$ loco B, negligamuſque quadraticas differentiæ B poteſtates, & diſtantia puncti A' a centro vocetur a, evadet quæſita attractio

$$\frac{2p.}{3a^2}(C^3+3C^2.B.t^2)+\frac{4pC^2.}{3a^2}(B-\frac{3}{2}B.t^2)-\frac{4pC^4}{4a^4}.(B-\frac{3}{2}B.t^2)$$

=

$$= \frac{2pC^3}{3a^2} + \frac{4pC^2B}{3a^2} - \frac{4pC^4B}{5a^4} + \frac{6pC^4B.t^2}{5a^4}$$
$$= \frac{2pC^3}{3a^2} + \frac{4pC^2B}{3a^2} + \frac{2pC^4B}{5a^4}(1-3T^2).$$

COROLLARIA.

I. Si ſphæroidis ſoliditas $\frac{2}{3}p.(C^3+2C^2B)$ vocetur M, erit ipſius attractio $\frac{M}{a^2} + \frac{2pC^4B}{5a^4}.\overline{1-3T^2} = \frac{M}{a^2} - \frac{2pC^4B}{5a^4}.\overline{2-3t^2}$: & ſi ſit $t = \sqrt{\frac{2}{3}}$, qui eſt ſinus circiter 54° 44′, recedendo directe a centro ſphæroidis attractio minuetur in duplicata ratione auctarum diſtantiarum, & æqualis erit attractioni ſphæræ ejuſdem ſoliditatis. Et quidem ſi linea ad centrum ducta cum æquatoris plano efficiat angulum minorem 36° 16′, attractio ſphæroidis erit major quam ſi materies omnis in ſphæram conformaretur: minor vero erit attractio ſi angulus ille fiat major. Ob proximitatem vero ſphæræ, & ſphæroidis, attractio ubique erit quam proxime in ratione illa duplicata reciproca diſtantiarum a centro: in majoribus autem diſtantiis, cum ſecundus terminus debeat præ primo negligi, lex eadem accuratius ſervabitur.

II. Data diſtantia $A'O$ a centro, atque a plano æquatoris pergendo ad polos, erunt decrementa attractionis proportionalia quadratis ſinuum rectorum latitudinis. In ipſa vero ſphæroidis ſuperficie, poſito $A'O = a = M'O = C + B.t^2$, & $\frac{C^3}{a^2} = C - 2B.t^2$, attractio omnis fiet $\frac{2}{3}pC + \frac{8}{15}pB - \frac{2}{15}pB.t^2 = \frac{2}{3}pC + \frac{2}{5}pB + \frac{2}{15}pB.T^2$, & in æquatore ipſo ſphæroidis erit $\frac{2}{3}pC + \frac{2}{5}pB$: nimirum ab æquatore pergendo ad polos in eadem ſuperficie ſphæroidica erunt incrementa attractionis quadratis ſinuum rectorum latitudinis proportionalia.

III. Eruntque attractiones in polo ſphæroidis oblongæ, in æquatore ſphæroidis oblatæ iiſdem ſemiaxibus deſcriptæ, & in ſuperficie

circumſcriptæ ſphæræ inter ſe ut $\frac{1}{3}C+\frac{1}{15}B, \frac{1}{3}C+\frac{1}{5}B, \frac{1}{3}C+\frac{1}{3}B$, nimirum erunt continue proportionales. Sunt autem juxta elementa conicorum quantitates materiæ in tribus hujuſmodi corporibus in ratione continua ſemiaxis minoris C ad majorem $C+B$. Quare trium eorporum attractiones non erunt in ratione illa, quam ſemiaxes, & quantitates materiæ in ſingulis continuant.

IV. Si ellipſis volvatur circa majorem axem, & ſphæroidem oblongam gignat, inquiraturque attractio in puncto aliquo æquatoris; ductis quotcumque planis minori axi normalibus dividenda erit ſphærois in totidem ellipſes ſimiles: & cum ellipſeos in centro ſectæ ſemiaxis major ſit $C+B$, minor autem C, & radius circuli eamdem aream eum ellipſi comprehendentis ſit $C+\frac{1}{2}B$, cumque inſuper, per corollarium ſexti problematis, attractio in polo ſphæroidis oblatæ ſemiaxibus $C+B$, & C deſcriptæ ſit $\frac{2}{3}pC+\frac{8}{15}pB$, ſcribendo $\frac{1}{2}B$ loco B, fiet attractio in æquatore ſphæroidis oblongæ iiſdem eum oblata ſemiaxibus deſcriptæ $\frac{2}{3}pC+\frac{4}{15}pB$.

PROBLEMA VIII.

Data æquatione figuræ planæ, cujus circa axem revolutione gignitur ſolidum rotundum, invenire attractionem ab eodem ſolido in corpuſculum quodvis exercitam, quod in axe ipſo collocetur.

Sit in fig. 34. ſolidi rotundi axis Ao, atque oX radius circuli perpendiculariter ad axem ſecti, & corpuſculo aliquo in A poſito fiat $Ao = z$, $oX = y$, & radius ad peripheriam ſe habeat ut $1:p$. Erit $\frac{py \cdot z}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ attractio peripheriæ circularis juxta directionem axis exercita: eritque $-\frac{pzydy}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ attractio circularis annuli latitudinis $-dy$, integrandoque, & conſtantem quantitatem ſic addendo ut poſito $p=0$ evaneſcat attractio omnis, erit attractio plani totius circularis $p\left(1-\frac{z}{\sqrt{(y^2+z^2)}}\right)$,

da-

dataque æquatione, quæ relationem variabilium z, y definiat, summa attractionum omnium hujusmodi, sive rotundi solidi attractio determinabitur. Ita si conus aliquis altitudinis b, & densitatis δ proponatur, atque altitudo coni ad radium baseos se habeat ut $1:m$, erit attractio a circulari qualibet sectione in verticem coni exercita $p\delta . dz\left(1 \quad \frac{-z}{\sqrt{(z^2+m^2z^2)}}\right)$, & coni totius attractio erit $p\delta b\left(1 \quad \frac{-1}{\sqrt{(1+m^2)}}\right)$. Quod si fiat $y^2 = 2bz - z^2$, erit elementum attractionis sphæræ $p\delta . dz\left(1 \quad \frac{-1}{\sqrt{(2bz)}}\right)$, atque in integrali $p\delta\left(z - \frac{2z^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2b}}\right)$ ponendo primum $z = b$, ac deinde $z = 2b$, erit attractio hemisphærii $p\delta b\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$, & attractio sphæræ integræ $\frac{2}{3}p\delta b$.

COROLLARIA.

I. Si $1:\delta$ sit ratio mediæ densitatis Terræ ad densitatem alicujus montis, & $1:b$ sit ratio mediocris Terræ radii ad montis altitudinem, erit attractio Terræ in montis vertice $\frac{2p}{3(1+b)^2}$, & decrementum attractionis Terræ æquabitur additæ montis attractioni si in hypothesi montis hemisphærici fuerit $\frac{4}{3}pb = p\delta b\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$, sive $\delta = \frac{4}{3-\sqrt{2}}$; & in hypothesi montis conici si fiat $\delta = \frac{4}{3\left(1 - \frac{1}{\sqrt{(1+m^2)}}\right)}$.

II. In posteriore vero hac hypothesi, quæ rectius fortasse figuram montium exhiberet, si radius baseos altitudinem montis triplo excederet, esset $\delta = \frac{8}{3}$, fieret autem $\delta = \frac{4}{3}$ si radius baseos tam

 esset

esset magnus ut præ in ipso negligi possit montis altitudo : & in utraque hypothesi differentia attractionum esset altitudini b loci propositi supra terrestrem superficiem proportionalis. Unde ab imis vallibus, ubi horizontales montium actiones se invicem compensant maxima ex parte, ad verticem alicujus montis pergendo possibilis jam esset casus quod verticalis vis, quæ ob attractionem montis adjicitur, compenset, & superet etiam quod ex Terræ totius attractione deficit, & major in montis vertice habeatur gravitas acceleratrix: quod a Domino d' Alembert primo adnotatum est.

PROBLEMA IX.

Determinare curvam, quæ per puncta H, O transeat, fig. 35., & quæ circa axem AP conversa generet solidum, quod præ aliis solidis omnibus æqualibus majore attractione polleat in punctum quodcumque Q axis producti APQ.

Reassumptis omnibus quæ in priore volumine de figuris isoperimetricis jam dicta sunt, & inquisitione omni a tota curva ad elementum $NGFO$, atque ad curvam quamcumque aliam $NgfO$, iisdem terminis O, N comprehensam translata, fiat $QC = x$, $CB = BA = dx$, $CG = y$, $BF = y + dy$. Ob datam soliditatem si semiordinata CG augeatur quantitate quavis exigua $Gg = \varphi$, & BF minuatur quantitate $Ff = \omega$, erit

$y^2 dx + (y + dy)^2 . dx = (y + \varphi)^2 . dx + (y + dy - \omega)^2 . dx$, atque inde eruetur $\varphi = \omega \left(1 + \frac{dy}{y}\right)$. Attractiones vero circulorum in punctis C, B sectorum, sive elementa attractionis solidi rotundi juxta antecedens theorema debebunt esse

$$\left(1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right) . dx + \left(1 - \frac{(x+dx)}{\sqrt{(\overline{x+dx}^2 + \overline{y+dy}^2)}}\right) . dx$$

$$= \left(1 - \frac{x}{\sqrt{(x^2 + \overline{y+\varphi}^2)}}\right) . dx + \left(1 - \frac{(x+dx)}{\sqrt{(\overline{x+dx}^2 + \overline{y+dy-\omega}^2)}}\right) . dx .$$

Quare evolutis terminis, iisque inter se æquatis, qui variationes exiguas φ, ω continent, pro casu maximæ attractionis fiet

$$\frac{\varphi y x dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\omega y x dx + \omega x dy dx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(x+dx)(y+dy)\omega dx :}{(\overline{x+dx}^2 + \overline{y+dy}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

cumque a ſe ſubductis quantitatibus $\frac{xy}{(x^2+dx)^{\frac{3}{2}}}$; $\frac{(x+dx)(y+dy)}{(\overline{x+dx}^2+\overline{y+dy}^2)^{\frac{3}{2}}}$ habeatur ipſum prioris quantitatis differentiale erit pro caſu attractionis maximæ

$$\frac{xdy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = d\left(\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{xdy+ydx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3xy(xdx+ydy)}{x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

atque inde eruetur denique $dy = \left(\frac{y}{3x} - \frac{2x}{3y}\right) dx$.

COROLLARIUM.

Qui ſolutionem hujus problematis cum alia conferet, quam D. Saint Jacques de Silvabelle expoſuit in priore volumine Diſſertationum Phyſico-Mathematicarum Pariſienſi Academiæ oblatarum, facile intelliget formularum diverſitatem inde exoriri, quod variationes ſemiordinararum dum abeunt in curvam aliam Author idem aſſumpſerit pro differentialibus earum ſemiordinatarum, quæ ad curvam propoſitam referuntur: ſcilicet ſi eſſet $\varphi = dy$, $\omega = d(y+dy)$, & ſi ob datam ſoliditatem quantitas ydy, ſive $(y+dy).d(y+dy)$ in omnibus curvæ elementis data eſſet, atque inſuper ſi ob datam abſciſſam x, & poſito $x^2+y^2=z^2$ ubique eſſet $ydy = zdz$, & $(y+dy).d(y+dy) = (z+dz).d(z+dz)$, pro caſu maximæ attractionis fieret $\left(\frac{xdz}{z^2}\right) = d\left(\frac{xydy}{z^3}\right) = 0$, & quantitas $\frac{xydy}{z^3}$, adeoque etiam $\frac{x}{z^3}$ maneret conſtans, atque eſſet quæſiti ſolidi æquatio $a^2x = z^3$.

At patet quantitates φ, dy, & ω, $d(y+dy)$ confundi inter ſe invicem non poſſe, & aliam problematis ſolvendi rationem eſſe ineundam.

SCHOLION.

Simpſonius, & Mac-Laurinus in locis, quæ memoravimus, ille quidem analyticam, hic vero ſyntheticam methodum tradidit ſupputandi attractionem in punctum quodvis ſuperficiei ſphæroidicæ exercitam: quod Newtonus in Coroll. II. Propoſ. XCI. Lib. I. non niſi pro corpuſculo in polis ſito præſtare docuit. Idipſum pro corpuſculo ſito in

in polis, & æquatore Daniel Bernoullius, & pro corpuſculo ubivis poſito præſtiterunt Clairaut, & Walmesley facta hypotheſi quod ſphærois ad ſphæram proxime accederet. Generalem ſolutionem problematis ingenioſa analyſi exhibuit D. la Grange in Actis Berolinenſibus anni 1773. Nos eam hic ſolutionem problematis quæſivimus, quæ & brevior eſſet, & ad figuram Terræ definiendam ſufficeret. In poſterioribus autem corollariis adnotavimus attractiones in polo ſphæroidis atoblongæ, in æquatore ſphæroidis oblatæ iiſdem ſemiaxibus deſcriptæ, que in ſuperficie circumſcriptæ ſphæræ exercitas eſſe quidem in ratione continua, ſed non in ea, quam ſemiaxes, ſeu materiæ quantitates in tribus hiſce corporibus continuant. Newtonus in Propoſ. XIX. Lib. III. gravitatem in æquatore ſphæroidis compreſſæ eſſe mediam proportionalem inter gravitates in ſuperficie ſphæræ circumſcriptæ, & in polo ſphæroidis oblongæ ex eo tantum collegerat, quod ſphæra imminuendo diametrum unam in ratione data vertitur in ſphæroidem compreſſam, quod ſphærois compreſſa imminuendo in eadem ratione diametrum aliam vertitur in oblongam ſphæroidem, quodque in caſu utroque minui debet gravitas in eadem ratione quam proxime. Quæ omnia eo videtur redire ut abeunte in ſphæroidem oblatam ſphæra, & oblata in oblongam ſphæroidem, deficiant attractiones in eadem ratione, in qua materiæ ſimiliter utrobique poſitæ quantitas imminuitur, ſcilicet in ratione ſemiaxis majoris ſphæroidis ad minorem. Nævum hujuſmodi a nobis antea in diſſertatione de Figura Terræ adnotatum excuſare voluerunt Cl. Short, & Murdock in Tranſact. anni 1753, poſtrema Newtoni verba *in eadem ratione quam proxime* de continua ratione intelligentes ſed non ea, quam materiæ quantitates, & ſemiaxes exhibent: qui tamen loci indicati ſenſus minime videtur eſſe. Alia Newtoni loca emendabimus cum de Figura Lunæ, & de præceſſione æquinoctiorum mox diſſeremus.

CA-

CAPUT QUARTUM.

DE PLANETARUM FIGURA,

QUÆ EX ÆQUILIBRII LEGIBUS COLLIGITUR.

PROBLEMA X.

SI particulæ ſingulæ ſphæroidis oblongæ revolutione ellipſeos $AVav$ circa majorem axem Vv genitæ, fig. 26., ſe ſe attrahant, atque attrahantur inſuper in ratione duplicata reciproca diſtantiarum a corpore alio ſatis diſſito in productione axis majoris poſito, & data ſit ratio attractionis in æquatore exercitæ ad vim extraneam, ac ſint particulæ eædem omnes fluidæ, & homogeneæ, invenire proportionem ſemiaxium.

Si æquatoris radius vocetur C, & ſit major ſphæroidis ſemiaxis $C + B$, juxta corollarium ſexti problematis, erit attractio in polo V, vel $v = \frac{2}{3} pC + \frac{2}{15} pB$, & per Coroll. IV. Probl. VII. erit attractio in æquatore $A = \frac{2}{3} pC + \frac{4}{15} pB$. Jam vero juxta indicatam formulam Coroll. I. Probl. V. ſi particulæ omnes ſe ſe invicem trahentes in ratione duplicata reciproca diſtantiarum trahantur inſuper eadem lege a corpore alio ſatis diſſito in productione axis majoris poſito, minuetur quidem ſub polis V, v gravitas in centrum T, augebitur autem ſub æquatore A, a: atque erit vis, qua gravitas augebitur ſub æquatore, ad vim, qua imminuetur ſub polis, ut $AT : 2VT$. Quare ſi tota ſphæroidis oblongæ attractio ſub æquatore A ſe habeat ad vim, quæ ibidem a corpore extraneo impenditur, ut $G : P$, & ſphærois accedat proxime ad ſphæram erit abſolutum pondus ſub æquatore $\frac{2}{3} pC + \frac{4}{15} pB + \frac{2}{3} pC \cdot \frac{P}{G}$,

ſub

ſub polis vero $\frac{2}{3}pC + \frac{2}{15}pB - \frac{2}{3}pC.\frac{2P}{G},$

& differentia duorum ponderum erit $\frac{2}{15}pB + 2pC.\frac{P}{G}.$

Cum igitur juxta Coroll. II. Theor. VI. in caſu æquilibrii particularum omnium ſemiaxes ſphæroidis totius oblongæ eſſe debeant in ratione reciproca ponderum, erit etiam rationibus a ſe invicem ſubductis

$$\frac{2}{15}pB + 2pC.\frac{P}{G} : \frac{2}{3}pC + \frac{2}{15}pB - \frac{4}{3}pC.\frac{P}{G} = B : C,$$

atque inde illico eruetur $2C.\frac{P}{G} = \frac{8}{15}B$, ſive $B : C = 15P : 4G$.

COROLLARIA.

I. Quia per Coroll. III. Probl. V. gravitas Lunæ in Terram ad vim perturbatricem, quæ a Sole juxta vectorem radium lunaris orbitæ exercetur, in mediocri diſtantia ſe habet ut 178.725 : 1, ac prior vis accedendo ad Terram augetur in ratione duplicata reciproca diſtantiarum, altera vero imminuitur in ſimplici diſtantiarum ratione; erit in ſuperficie Terræ gravitas G ad vim P ex Solis attractione ortam in ratione compoſita ex rationibus 178.725:1, 3600:1, & 60:1, ſive ut 38604600:1. Quare ſi radius mediocris Terræ ut ſupra aſſumatur hexapedarum $3273008\frac{1}{2}$, ſeu pedum Pariſienſium 19638051, in hypotheſi Terræ totius fluidæ, & homogeneæ erit differentia ſemiaxium, quæ ex attractione Solis pendebit, pedum $\frac{15.19638051}{4.38604600}$, ſeu pedis unius, & digitorum undecim, proxime ut Newtonus in coroll. Propoſ. XXXVI. ex proportione vis centrifugæ ſub æquatore Terræ ad vim perturbatricem Solis collegerat.

II. Pariter ſi ſint M, & 1 quantitates materiæ in Terra, & Luna, ac ſi ſint mediocres radii C, & c, ac radius lunaris orbitæ vocetur R, erit $\frac{1}{c^2}$ gravitas abſoluta ſub æquatore Lunæ, & vis perturbatrix Terræ erit $\frac{c.M}{R^3}$, atque erit minor ſemiaxis Lunæ ad

diffe-

differentiam semiaxium, quæ ex attractione Terræ in eadem fluiditatis, & homogeneitatis hypothesi oriri posset, ut $\frac{4}{c^2} : \frac{15c.M.}{R^3}$

Cum itaque sit $R:C = 60:1$, $C:c = 73120$, $R:c = 219:1$; si ratio massarum $M:1$ statuatur $71.338:1$, ut ex phænomenis præcessionis æquinoctiorum, & nutationis terrestris axis inferius colligemus; fiet differentia semiaxium Lunæ $\frac{15c^3 M}{4R^3} = \frac{1}{39263}$: & si radius mediocris Terræ assumatur ut in Coroll. I. Probl. III., minuaturque in ratione $20:73$, eadem differentia prodibit pedum 137: evaderet autem pedum dumtaxat 77 si ratio massarum Terræ, & Lunæ cum Newtono assumatur $39.788:1$.

III. Si maneant omnia, quæ in hac ipsa propositione assumpta sunt, & proponatur alia oblonga sphærois, quæ ad sphæram similiter accedat, & in qua bini semiaxes sint c, & $c + b$, gravitas sub æquatore g, & vis extranea $\mathcal{Q}$, erit similiter $b:c = 15\mathcal{Q}:4g$; ac fiet $B:b = g.C.P:c.\mathcal{Q}.G$. Quare si in binis sphæroidibus propositis massarum ratio sit $M:1$, atque ob sphæroidum cum sphæris affinitatem sit $G:g = \frac{M}{C^2} : \frac{1}{c^2}$, erit $B:b = C^3.P:c^3.M.Q$:

ac si insuper extraneæ vires ex mutua oriantur sphæroidum duarum attractione, & sphæroides sint a se invicem satis dissitæ, atque ad sphæram proxime accedant, ac propterea sub utroque æquatore vis extranea sit massæ attrahentis sphæroidis, & radio attracti æquatoris proportionalis, posito $P:Q = C:c.M$, fiet $B:b = C^4:c^4.M^2 = \frac{1}{c^4} : \frac{M^2}{C^4}$.

IV. Itaque differentiæ semiaxium sphæroidis utriusque inter se erunt in ratione directa quadruplicata radiorum, & massarum reciproca duplicata: sive in ratione duplicata reciproca virium gravitatis in æquatore sphæroidis utriusque agentium. Newtonus cum in Prop. XXXVIII. Lib. III. statuisset differentiam semiaxium Lunæ ob vim Terræ ad differentiam semiaxium Terræ ob vim Lunæ se habere ut gravitas acceleratrix Lunæ in Terram ad gravitatem acceleratricem

Terræ in Lunam, & diameter Lunæ ad diametrum Terræ conjunctim, posito quod differentia semiaxium Terræ fluidæ ob vim Lunæ sit pedum $8\frac{3}{5}$, atque ea assumpta ratione massarum Terræ, & Lunæ, invenit differentiam semiaxium Lunæ fluidæ, & homogeneæ ob vim Terræ esse oportere pedum 93: qui Newtoni locus a nemine antea fuerat emendatus.

PROBLEMA XI.

Si sphærois oblata accedat proxime ad sphæram, & circa minorem axem rotetur, ac fluida, & homogenea sit omnis, & particulæ ipsius singulæ se se attrahant in ratione duplicata reciproca distantiarum, ac data insuper sit ratio attractionis sub æquatore ad vim centrifugam; invenire proportionem semiaxium.

Si major sphæroidis semiaxis, sive æquatoris radius ut antea sit $C+B$, & minor semiaxis C, juxta corollarium sexti problematis antecedentis, erit tota sphæroidis attractio sub polis $\frac{2}{3}pC+\frac{8}{15}pB$, & per Coroll. II. Probl. VII. erit attractio sub æquatore $\frac{2}{3}pC+\frac{2}{5}pB$. Quod si insuper tota sphærois circa axem minorem uniformiter revolvatur, & tota gravitas sub æquatore se habeat ad vim centrifugam ut $g:1$, quia ob sphæroidis, & sphæræ affinitatem vis centrifuga præ gravitate, & differentia semiaxium præ semiaxibus ipsis exigua est, neglectis minoribus fractionibus vis centrifuga sub æquatore censeri poterit $\frac{2pC}{3g}$, & absolutum pondus $\frac{2}{3}pC+\frac{2}{5}pB - \frac{2pC}{3g}$.

Itaque per Coroll. I. Theor. VI. fluido omni ad æquilibrii statum deducto esse oportebit

$$\frac{2}{3}pC+\frac{8}{15}pB : \frac{2}{3}pB+\frac{2}{5}pB - \frac{2pC}{3g} = C+B:C.$$

Inde autem eruetur $\frac{B}{C+B} = \frac{5}{4g}$, sive erit semiaxis major sphæroidis ad differentiam majoris, & minoris ut quadruplum gravitatis ad quintuplum vis centrifugæ sub æquatore.

CO-

COROLLARIA.

I. Si gravitas absoluta corporum sub æquatore se habeat ad vim centrifugam ut $288\frac{1}{2} : 1$, quemadmodum in Coroll. II. Probl. III. statutum est, ac si insuper Terra omnis fluida intelligatur, & particulæ ipsius singulæ sint homogeneæ, ac se invicem attrahant in ratione duplicata reciproca distantiarum, & circa axem diurno motu unformiter revolvi pergant, iisdem in æquilibrio compositis Terra omnis oblatæ sphæroidis figuram induet, & æquatoris radius ad differentiam semiaxis, qui per polos transit, se habebit ut $1154 : 5$, seu proxime ut $231 : 1$, eritque semiaxis major ad minorem ut $231 : 230$.

II. Si sit $1 : R$ ut radius æquatoris Jovis ad radium orbitæ alicujus Satellitis, & $1 : T$ ut tempus revolutionis Jovis circa axem ad tempus revolutionis periodicæ ipsius Satellitis circa Jovem, erit vis centrifuga in æquatore Jovis ad vim centrifugam Satellitis in orbita circa Jovem descripta ut $1 : \frac{R}{T^2}$, quæ in circulari orbita cum æqualis sit vi centripetæ, cumque Satellitis gravitas in Jovem ad gravitatem in æquatore Jovis se habeat ut $1 : R^2$, erit in æquatore ipso gravitas ad vim centrifugam ut $R^3 : T^2$, & facta eadem homogeneitatis partium, & fluiditatis hypothesi, erit differentia semiaxium Jovis $\frac{5T^2}{4R^3}$. Quare si tempus periodicum quarti Jovis Satellitis sit $16^d\ 16^h\ 32'$, sive $24032'$, & tempus revolutionis Jovis circa axem proprium sit $596'$, ac radius orbitæ ipsius Satellitis assumatur 25.3 semidiametrorum Jovis, neglectis altioribus potestatibus differentiæ semiaxium, fiet differentia omnis $\frac{1}{8}$ circiter. At si radius orbitæ Satellitis ejusdem juxta Poundii observationes sit semidiametrorum Jovis 26.63, prodibit differentia semiaxium $\frac{1}{9.3}$.

III. Si maneant omnia ut in corollario secundo problematis præcedentis, & gravitas in superficie Lunæ ad gravitatem in superficie Terræ se habeat ut $\frac{1}{c^2} : \frac{M}{C^2}$, atque insuper sub æquatore Ter-

ræ ſe habeat gravitas ad vim centrifugam ut $288\frac{1}{2} : 1$, & vis centrifuga ſub æquatore Terræ ſit ad vim centrifugam ſub æquatore Lunæ ut $\frac{C}{1} : \frac{c}{T^2}$, compoſitis rationibus erit gravitas ſub æquatore Lunæ ad vim centrifugam ut $288\frac{1}{2} . C^3 . T^2 : c^3 . M$, ac fiet $\frac{5c^3 M}{4 . 288\frac{1}{2} C^3 . T^2} = \frac{c^3 M}{231 . C^3 T^2}$ differentia ſemiaxium ex mutua attractione partium, atque ex motu illo orta, quo Luna circa axem proprium eadem periodo revolvitur, qua circa Terram revolutionem integram abſolvit. Cum itaque ſit $1 : T = 23^h 56' : 27^d 7^h 43'$ aliis corollarii indicati numeris ſubſtitutis, differentia ſemiaxium Lunæ fluidæ, & homogeneæ, & circa axem proprium revolutæ fiet $\frac{1}{117525}$, ſeu pedum $45\frac{1}{2}$.

IV. Quia Terræ, & Lunæ volumina ſunt inter ſe ut $C^3 : c^3$, & maſſis inter ſe poſitis ut $M : 1$, denſitates Terræ, & Lunæ inter ſe eſſe debent ut $\frac{M}{C^3} : \frac{1}{c^3}$, differentia ſemiaxium Terræ ad differentiam ſemiaxium Lunæ ſe habebit ut denſitas Lunæ ad denſitatem Terræ, & quadratum temporis periodici Lunæ ad quadratum temporis periodici Terræ circa axem proprium: atque univerſim differentia ſemiaxium Terræ, & Planetæ alterius erunt in ratione compoſita ex reciproca ſimplici denſitatis, & reciproca duplicata periodici temporis circa axem. Ita cum quadrata periodicorum temporum Terræ, & Jovis circa axes proprios ſint inter ſe ut $29 : 5$, & denſitas Terræ ad denſitatem Jovis ſe habeat circiter ut $39889 : 11225$ per Coroll. III. Probl. I. Lib. I., differentia ſemiaxium Jovis in iiſdem hypotheſibus debebit eſſe $\frac{39889}{11225} . \frac{29}{5} . \frac{1}{231} = \frac{1}{11\frac{2}{3}}$.

THEOREMA IX.

Si Terra oblatæ ſphæroidis proxime ad ſphæram accedentis figuram referat, & aut homogenea ſit omnis, aut nucleum ſphæroidicum denſiorem in centro habeat, aut ex ſtratis quibuslibet coaleſ-

lescat concentricis, ac sphæroidicis, quorum densitas a superficie pergendo ad centrum in ratione quavis augeatur; absolutum pondus in extima superficie ab æquatore pergendo ad polos augebitur semper quam proxime in duplicata ratione sinuum latitudinis.

Nam si in fig. 26. referat $AVav$ sectionem superficiei sphæroidicæ per Terræ polos A, & a factam, ac sit $RVru$ sectio nuclei sphæroidici, ac densioris, perinde se habebit punctum quodcumque M ac si a sphæroide homogenea attraheretur, addita insuper in centro sphæroide alia, cujus densitas æqualis sit differentiæ densitatum nuclei, & materiæ circumpositæ. Jam vero in superficie sphæroidis homogeneæ, & oblatæ ab æquatore pergendo ad polos, per Coroll. II. Probl. VII., augetur gravitas in duplicata ratione sinuum latitudinis. Insuper si sit Δ differentia densitatum, seu tota densitas sphæroidis, quæ in centro adjici intelligitur, & fiat $RT = c$, $TU = c + b$, juxta idem Probl. VII. erit sphæroidis ipsius attractio in punctum $M = \frac{2p\Delta c^2}{3TM^2} . (c + 2b) + \frac{2p\Delta c^3 b}{5TM^4} . (1 - 3T^2)$:

& cum positis aliis citati problematis denominationibus sit $TM = C + B . t^2 = C + B - B . T^2$, divisione facta, & neglectis productis quantitatum exiguarum B, & b, fiet attractio eadem

$$= \frac{2p\Delta c^2 . (c + 2b)}{3(C+B)^2} + \frac{2p\Delta c^2}{(C+B)^4} . \left(\overline{\frac{1}{3} cb + \frac{2}{3} CB - \frac{2}{5} cb . T^2}\right):$$

adeoque ab æquatore pergendo ad polos & ipsa augebitur in duplicata ratione sinuum latitudinis. Quare cum tota vis centrifuga in loco M sit rectæ RM proportionalis, & qua parte exercetur juxta directionem semidiametri TM sit ut RM^2, ac differentia virium hujusmodi sub æquatore V, in loco ipso M sit ut TR^2; viribus simul omnibus acceptis absolutum pondus ab æquatore pergendo ad polos augebitur in duplicata eadem ratione sinuum. Quod si aliæ etiam sphæroides adhuc densiores, ac diversis semiaxibus descriptæ circa nuclei centrum adjici intelligantur, singularum attractiones in punctum M eadem lege augebuntur. Duarum itaque sphæroidum differentia, seu stratum sphæroidicum, quo differunt, attrahet eadem lege: & si Terra omnis ex stratis sphæroidicis, ac concentricis coalescat,

lescat, quorum densitas a superficie pergendo ad centrum in ratione quavis augeatur, adhuc in ipsa superficie sphæroidis accedendo ad polos summa omnium virium, sive absolutum pondus augebitur in duplicata ratione sinuum latitudinis.

COROLLARIA.

I. Si inclusus nucleus materia circumposita sit rarior, differentia Δ densitatum negative accipienda erit, & differentia attractionis sub æquatore, & in loco quocumque M, adhuc proportionalis erit quadrato sinus latitudinis puncti ejusdem M, eademque semper habebitur attractionis lex, si in aliis, atque aliis nucleis interioribus densitas utcumque minui intelligatur, aut si etiam nucleus intimus materia omni sit vacuus, & fiat $\Delta = -1$. In quacunque igitur hypothesi sphæroidis ex stratis quibuslibet sphæroidicis compositæ, densitatisque in ratione quavis accedendo ad centrum crescentis, vel decrescentis, differentia omnium virium, sive absoluti ponderis sub æquatore, & in loco alio quolibet extimæ superficiei proportionalis erit quadrato sinus latitudinis.

II. Quia differentiæ pendulorum eodem tempore oscillantium proportionales sunt differentiis ponderum, in hypothesi quavis Terræ sphæroidicæ, & homogeneæ, aut ex stratis sphæroidicis heterogeneis compositæ, aut nucleum sphæricum, vel sphæroidicum densiorem in centro habentis, longitudines ipsæ pendulorum ab æquatore pergendo ad polos augeri poterunt in duplicata ratione sinuum latitudinis, sive in ratione simplici dimidiorum sinuum versorum latitudinis bis acceptæ. Quod si igitur lex hujusmodi longitudinis pendulorum eodem ubique tempore oscillantium institutis experimentis proxime satisfaciat, hypothesis aliqua Terræ sphæroidicæ, & ex stratis aliis sphæroidicis compositæ assumi poterit, qua simul phænomena omnia hujus generis explicentur.

III. Si longitudo penduli sub æquatore assumatur lin. 439.21, & longitudinis incrementum sub polari circulo sit lin. 2.06; dimidii sinus versi aliarum latitudinum bis sumptarum, & incrementa longitudinis pendulorum in locis singulis, quæ initio hujus libri memoravimus, & legis mox indicatæ, observationumque differentiæ erunt ut in tabula sequenti.

Ob-

Obſervationum Locus.	Incrementa obſervata.	Dimidius ſinus verſus.	Incrementa ſupputata.	Differentiæ obſervationum.
Ad *Portobello*.	0.09.	2762.	0.067.	0.023.
Ad *Petit-Goave*.	0.26.	10015.	0.244.	0.016.
Ad Prom. B. S.	0.93.	30142.	0.738.	0.192.
Romæ.	0.995.	43600.	1.063.	0.068.
Viennæ.	1.352.	55587.	1.353.	0.001.
Pariſiis.	1.46.	56670.	1.383.	0.077.
Londini.	1.54.	61275.	1.494.	0.046.
Petropoli.	2.02.	74912.	1.827.	0.193.
Pelli.	2.06.	84481.	2.06.	

IV. Qui igitur ab obſervationibus Petropoli, atque in Promontorio Bonæ Spei inſtitutis major prodit diſſenſus legis jam memoratæ intra limites quintæ partis unius lineæ conſiſtet: intra quos limites experimenta longitudinis pendulorum non ſatis eſſe certa Caillius, aliique authores contendebant. Idem dicendum eſt de exiguis aliis differentiis longitudinis pendulorum, quæ in aliis Ingriæ locis non adeo inter ſe diſſitis prodierunt, quaſque recenſuit D. Griſchowius Tom. VII. Nov. Comm. Academiæ Petropolitanæ. Cum enim Petropoli Revaliam uſque pendulum ſimplex ſecundis ſingulis oſcillans, in hypotheſi longitudinis ab æquatore ad polos creſcentis in duplicata ratione ſinuum latitudinis, una fixarum revolutione duabus oſcillationibus retardari debeat, retardatio diurna oſcillationum $9\frac{3}{5}$ inventa eſt: & cum Petropoli Pernaviam, & Dorpatum uſque, pro differentia latitudinis $1\frac{1}{2}^{\circ}$, retardatio diurna oſcillationum $5\frac{1}{2}$ in eadem hypotheſi eſſe debeat, inventa eſt oſcillationum Pernaviæ quidem $10\frac{1}{2}$, Dorpati vero 9: ac denique Petropoli Arensburgum uſque in inſula Oſiliæ, pro differentia latitudinis $1\frac{2}{3}^{\circ}$, retardatio diurna non 6 oſcillationum juxta illam hypotheſim, ſed $14\frac{1}{2}$ inventa eſt. Qui ex hujuſmodi differentiis numeri oſcillationum diebus ſingulis abſolutarum ſupputare velit quæ prodeant differentiæ longitudinis pendulorum,

eas

eas tam exiguas esse deprehendet; ut non nisi inevitabilibus, atque exiguis experimentorum erroribus possint tribui.

V. Si longitudo penduli sub æquatore sit lin. 431.21, & sub latitudine 66°48′ lin. 441.27 ut supra jam dictum est, eadem posita lege ponderum, differentiam lin. 2.06 augendo in duplicata ratione sinus totius ad sinum 66° 48′ fiet differentia longitudinis pendulorum singulis secundis temporis oscillantium sub polis, & sub æquatore lin. 2.44., & tota longitudo penduli sub polis erit lin. 441.65. Jam vero cum sit 230:231 = 439.21:441.12, longitudo penduli secundis singulis oscillantis sub polis partium 0.53 unius lineæ major erit quam quæ in hypothesi Terræ totius fluidæ, & homogeneæ esse posset. Quæ differentia cum in errores institutarum observationum omnis refundi nequeat, extra homogeneitatis, & æquilibrii casum hypotheses aliæ quærendæ erunt, quæ proportioni simul, & quantitati crescentium ponderum satisfaciant.

PROBLEMA XII.

Determinare hypotheses simpliciores, quæ & quantitati simul, & proportioni ponderum ab æquatore pergendo ad polos crescentium in duplicata ratione sinuum latitudinis proxime satisfaciant.

Si circa Terræ centrum sit nucleus aliquis sphæricus, & nuclei radius vocetur c, ac sit Δ differentia densitatis nuclei, & materiæ circumpositæ; perinde se habebunt pondera in extima superficie ac si homogenea esset Terra omnis, ipsique in centro adderetur nucleus radii c, & densitatis Δ. In hac autem hypothesi, manentibus præcedentibus aliis denominationibus esset

attractio sub æquatore $\frac{2}{3}pC + \frac{2}{5}pB + \frac{2p\Delta c^3}{3(C+B)^2}$;

absolutum pondus $\overline{1 - \frac{1}{g}}.\left(\frac{2}{3}pC + \frac{2}{5}pB + \frac{2p\Delta c^3}{3C^2} - \frac{4p\Delta Bc^3}{3C^3}\right)$,

pondus sub polis $\frac{2}{3}pC + \frac{8}{15}pB + \frac{2p\Delta c^3}{3C^2}$,

ponderum differentia $\frac{2}{15}pB + \frac{4p\Delta Bc^3}{3C^3} + \frac{2pC}{3g} + \frac{2p\Delta c^3}{3gC^2}$:

Qua-

Quare si ratio $C:B$ ea assumatur, quæ in priore libri hujus capite ex omnibus graduum observationibus media fere prodiit, videlicet 230:1, & si longitudo penduli uno secundo temporis oscillantis sub æquatore assumatur linearum 439.21, atque ut ferunt experimenta omnia ab æquatore pergendo ad polos longitudo eadem augeatur in duplicata ratione sinuum latitudinis, & sub polis incrementum omne esse debeat lin. 2.44; erit etiam

$$\overline{1-\frac{1}{g}}\cdot\left(C+\frac{3}{5}B+\frac{\Delta c^3}{C^3}-\frac{2\Delta Bc^5}{C^5}\right):\frac{1}{5}B+\frac{2\Delta Bc^5}{C^5}+\frac{C}{g}+\frac{\Delta c^3}{gC^3}=$$

43921 : 244. Posito igitur $g:1=288\frac{1}{2}:1$, & $C:B=230:1$ variæ prodibunt hypotheses, & radii c, & densitatis Δ nuclei sphærici, quibus datis ab æquatore pergendo ad polos augebuntur pondera in duplicata ratione sinuum latitudinis, atque ea simul incrementi totius quantitas habebitur, quæ pendulorum experimentis respondeat.

COROLLARIA.

I. Si radius nuclei densioris exæquet minorem semiaxem Terræ, & fiat $C=c$, erit etiam

$$\overline{1-\frac{1}{g}}.\left(C+\frac{3}{5}B+\Delta C-2\Delta B\right):\frac{1}{5}B+2\Delta B+\frac{C.\overline{1+\Delta}}{g}=23921:244.$$

factisque aliis substitutionibus, & reductis numeris prodibit $\Delta=\frac{1}{5\frac{1}{2}}$ circiter: nimirum si nucleus sphæricus usque ad Terræ polos pertingat, & paulo minus quam quinta parte densior intelligatur materia omni, quæ circa æquatorem redundat, simplicissima habebitur hypothesis, qua & proportioni, & quantitati simul crescentium ponderum proxime satisfiet.

II. His etiam positis reassumpta formula septimi problematis; cum $\frac{2}{3}pC^3$ sit soliditas nuclei sphærici a centro Terræ ad polos usque pertingentis, erit pro qualibet distantia a centro, & latitudine Terræ attractio $\frac{2pC^3}{3a^2}.\overline{1+\Delta}+\frac{4pC^3B}{3a^2}+\frac{2pC^5B}{5a^4}.(1-3T^2)$: & sub æ-

quarore, posito $T = 0$, evadet $\frac{2pC^3}{3a^2} . \overline{1+\Delta} + \frac{pC^3 B}{a^2}\left(\frac{4}{3} + \frac{2C^3}{5a^3}\right)$:

III. Quod si igitur fiat primum $a = C + B$, & deinde $a = C + B + b$, quantitas aurem b sit exigua, & negligi possint producta quantitatatum B, & b; erit gravitas in superficie Terræ sub æquatore ad gravitatem in altitudine b supra ipsam ut

$\frac{1}{3} . \overline{C - 2B} . \overline{1 + \Delta} + \frac{13}{15} B : \frac{1}{3} . \overline{C - 2B - 2b} . \overline{1+\Delta} + \frac{13}{15} B$,

& gravitas eadem omnis sub æquatore erit ad gravitatis decrementum, quod ad distantiam b assurgendo altius habebitur, ut

$\overline{C - 2B} . \overline{1+\Delta} + \frac{13}{5} B : 2b . \overline{1+\Delta}$.

IV. Si fiat ut antea $\Delta = \frac{1}{5\frac{1}{2}}$, $1 + \Delta = 1 . 18$, $C = 3265909$, $B = 14199$, & altitudo b assumatur hexap. 2434, substitutis numeris fiet eadem ratio 3877340:5744. Cum igitur longitudo penduli secundis singulis oscillantis sub æquatore, & in ipsa maris libella sit lin. 439.21, addendoque $\frac{1}{287.5}$, sive 2.53, ac seposita vi centrifuga, fit 340.74 longitudo, quæ absolutæ vi gravitatis responderet, eaque diminuatur in ratione absolutarum virium in superficie Terræ, atque in illa altitudine agentium, demendo id rursus quod competit vi centrifugæ; longitudo penduli uno secundo oscillantis in altitudine hexap. 2434 supra æquatorem erit linearum circirer 438.55. Bouguerius in vertice montis Pichincha hexap. 2434 supra maris libellam prope æquatorem penduli longitudinem invenit lin. 438.69.

V. Pariter in altitudine hexap. 1466 esset longitudo penduli lin. 438.8. Bouguerius Quiti, quæ urbs hexap. 1466 supra libellam maris attollitur, longitudinem penduli invenit lin. 438.88. In posteriore igitur hoc casu supererunt 0.08 unius lineæ, & 0.14 in casu altero corollarii antecedentis, quæ debeant tribui attractioni montium in vertice quidem conspiranti cum directione eadem gravitatis, ad pedes vero non nisi horizontaliter pendulum distrahenti a perpendiculo. Utrumque igitur Bouguerii experimentum cum legibus attractionis Terræ sphæroidicæ conveniet ubi quidpiam tribuamus montium attractioni. Ex formulis problematis octavi erui poterit quæ hypo-

the-

theses densitatis montium datæ altitudinis datæ ponderum differentiæ satisfaciant: & si alicubi contigerit in vertice alicujus montis majorem gravitatem acceleratricem pendulorum experimentis deprehendi, assignari poterunt hypotheses aliæ, quæ huic etiam phænomeno ponderum in majoribus a centro distantiis crescentium explicando sufficiant.

VI. Quod si itaque colligamus jam simul omnia, & sepositis aliis primitivæ fluiditatis, & æquilibrii hypothesibus curvitatem terrestris superficiei comparatis inter se invicem mensuris graduum directe investigemus, assumi poterit figuram Terræ ad illam proxime accedere, quam diurno motu circa axem se volvendo sibi comparasset si homogenea, & fluida fuisset omnis, nimirum sphæroidem oblatam, cujus semiaxis minor per polos transiens ad æquatoris radium proxime se habeat ut 230:231, quemadmodum in priore libri hujus capite explicatum est. Et si insuper juxta postremas duas propositiones statuamus solidam terram sic comparatam esse ut densitas sphæræ inscriptæ quinta circiter parte superet densitatem materiæ alterius circumpositæ, & circa æquatorem redundantis, satisfiet etiam experimentis pendulorum notis longitudinis differentiis ab æquatore ad polos crescentium ut suas oscillationes singula uno minuto secundo temporis absolvant.

VII. Denique ubi consideremus sub æquatore, ubi elatior est Terra, ampliora, & profundiora esse maria quam circa polos, verisimillimum videbitur densitatem mediam interioris totius nuclei quinta saltem sui parte majorem esse densitate terræ totius circumpositæ. Newtonus in Propos. X. Lib. III. communem supremam terram quasi duplo graviorem aqua esse censuit, & paulo inferius in fodinis quasi triplo etiam, & quadruplo, aut quintuplo, aut sextuplo majorem esse quam si tota ex aqua constaret. Hypothesis nuclei quinta dumtaxat parte densioris materia omni circa æquatorem redundante explicandæ & proportioni simul, & quantitati ponderum crescentium sufficit ut dictum est. Videbimus postmodum quod si solida omnis materies extra inscriptam sphæram redundans exæquet duas tertias partes illius materiæ, quæ similiter redundaret in hypothesi terræ totius solidæ, & ubique ejusdem cum nucleo densitatis, satisfiet etiam aliis phænomenis præcessionis æquinoctiorum, & nutationis terrestris axis.

APPENDIX.

DE FIGURA, ET DE APPARENTI LIBRATIONE LUNÆ.

NEwtonus igitur cum in corollario Propoſ. XXXVI. Lib. III. ex proportione vis centrifugæ ſub æquatore Terræ ad vim perturbatricem Solis collegiſſet differentiam ſemiaxium, quæ in Terra fluida, & homogenea ob vim Solis induci poſſet, eſſe unius pedis, & poll. 11 $\frac{1}{30}$: cumque in Propoſ. XXXVII. ex proportione maximorum, minimorumque æſtuum maris poſt ſyzigias, & quadraturas eruiſſet vim Solis ad vim Lunæ ſe habere ut 1:4.4815, quæ ratio æſtimandarum virium, ut videbimus, omnino incerta eſt, & differentiam ſemiaxium ob vim Lunæ ſtatuiſſet eſſe pedum 8 $\frac{3}{5}$: & cum denique quantitates materiæ in Terra, & Luna in propoſitione eadem cenſuiſſet eſſe inter ut 39.788:1, atque in Propoſ. XXXVIII. differentias ſemiaxium in Terra, & Luna cenſuiſſet eſſe inter ſe in ratione compoſita gravitatis acceleratricis, & mediocris diametri, differentiam ſemiaxium Lunæ fluidæ, & homogeneæ invenit eſſe oportere ob vim Terræ pedum 93. Inde autem fieri dixit ut eadem Lunæ facies ſemper in Teram obvertatur: neque in alio ſitu aliquo corpus lunare quieſcere poſſe cenſuit, ſed ad hunc ſitum oſcillando ſemper redire oportere. Vidimus autem differentiam ſemiaxium Lunæ fluidæ, & homogeneæ ob vim Terræ vere eſſe pedum 137: atque hoc poſito gravius fieret argumentum, quo Newtonus conjecerat Terræ, attractione fieri ut ſemper eadem Lunæ facies Terræ obvertatur.

Antequam vero conjecturam hujuſmodi examinemus, quæ Newtonus in propoſitione decimaſexta præmiſerat, & præcipua Librationis Lunæ phænomena exponenda, & conſideranda ſunt. In primis cum idem fere Lunæ hæmiſphærium, & fere eædem lunares maculæ obvertantur Terræ facile admodum intelligitur Lunam æquali tempore & circa Terram, & circa axem proprium eadem motus directione ab occidente in orientem volvi oportere. Ob ſolam enim vim projectionis, atque ob gravitatem Lunæ in Terram ſibi invicem parallelæ manerent ſemper dia-

diametri Lunæ omnes, & tota Lunæ ſuperficies tempore menſis unius ſynodici e Terra deberet conſpici. Majerus cum inclinationem mediam lunaris orbitæ ad planum Eclipticæ ſtatuiſſet eſſe $5^{\circ} 9' 8''$, ex variis macularum lunarium obſervationibus inclinationem axis rotationis Lunæ ad axem Eclipticæ varie definivit $2^{\circ} 8', 1^{\circ} 21', 1^{\circ} 38'$. Si ex binis hiſce poſterioribus obſervationibus, quæ minus inter ſe diſſident, medium accipiatur, & ſit inclinatio axis rotationis Lunæ ad axem Eclipticæ, & æquatoris lunaris ad eclipticæ planum $1\frac{1}{2}^{\circ}$, erit inclinatio æquatoris lunaris ad planum lunaris orbitæ circiter $3\frac{2}{3}^{\circ}$. Singularis enim alia Majeri obſervatio eſt quod æquatoris lunaris interſectio cum plano eclipticæ ſit ſemper parallela interſectioni eclipticæ, & lunaris orbitæ, ita quidem ut planum eclipticæ duo inter plana æquatoris & orbitæ lunaris jaceat, & angulus inclinationis planorum æquatoris, & orbitæ lunaris æquetur differentiæ duorum angulorum inclinationis orbitæ, & æquatoris lunaris ad eclipticam. Ita etiam punctum quodcumque lunaris æquatoris ab ecliptica digreſſus ad idem planum eclipticæ, atque ad eamdem plagam revertitur quo tempore Luna ad eumdem orbitæ circa Terram deſcriptæ nodum revertitur: quod tempus eſt $27^{d} 5^{h} 6' 56''$ circiter.

De ſingulari hoc phænomeno agemus poſtmodum. Modo ad librationis Lunæ phænomena redeundo minime omitti debet a Galilæo obſervatum primitus fuiſſe non omnino idem Lunæ hemiſphærium, nec maculas omnino eaſdem toto menſe ſynodico Telluri obverti. Et quidem ob parallelifmum lunaris axis, atque ob inclinationem lunaris orbitæ ad Eclipticam fieri oportere adnotavit ipſe ut pro varia Lunæ diſtantia a plano Eclipticæ, variaque meridiana altitudine ſupra horizontem modo quædam boreales maculæ, modo aliæ meridionales in conſpectum prodeant, atque ea Lunæ libratio habeatur, quæ in latum dicitur. Ob ipſum vero Telluris motum circa axem proprium fieri monuit Gallilæus ut non omnino eadem Lunæ facies & mane, & veſpere videri poſſit, atque alia habeatur Lunæ libratio in longum, ab ortu ſcilicet ad occaſum. Hanc alteram librationis ſpeciem collegit ipſe ex varia diſtantia maris criſium a limbo occidentali Lunæ, & Gri-

mal-

maldae maculae a limbo orientali. Accuratioribus autem macularum earumdem observationibus tertia Lunae libratio innotuit, quae pariter in longum fit, & mensis unius lunaris periodum habet, multoque est major quam quae ex diurno Telluris motu oriri potest. Librationis ejusdem rationem physicam Newtonus ex aequabili motu Lunae circa axem proprium, & ex inaequabili Lunae motu in orbita elliptica circa Terram veluti focum descripta optime derivavit.

Scilicet cum juxta Coroll. II. Probl. IV. Lib I. Luna areas circa Terram, & circa alterum focum orbitae ellipticae describat angulos proportionales temporibus, si Luna interim circa suum centrum aequabiliter revolvi pergar, eadem semper Lunae diameter ad alterum focum ellipseos dirigetur, & maxima diametri ejusdem aberratio a centro Terrae aequabitur duplae excentricitati per distantiam mediocrem divisae, sive angulo $6^\circ\ 18'$: & quae Lunae diameter in apogaeo ad Terram dirigetur, eadem in Lunae transitu ad perigaeum eo angulo a Terra deviabit occasum versus, & Lunae margo tantundem ex orientali parte amplius patebit, atque ad occasum coarctabitur. In reditu ad apogaeum, cum Luna ad distantiam mediam perveniet, eadem diameter eumdem focum constanter respiciendo a Terra deviabit contrario sensu. Ita erit limes variationis graduum $12\frac{3}{5}$: cujus sinus versus cum sit partium 25 millesimarum radii, spatium, quod orientales, sive occidentales maculae in extremo margine primum sedentes intra Lunae discum conficient, ad Lunae radium se habebit ut $1:40$.

Quod si dato Lunae loco D, fig. 36., spectatoris oculus diurno motu feratur ex C in c, & inde ad superficiem Lunae ducantur lineae tangentes CF, cA; erunt F, & A limites superficiei ejusdem e Terra visae, & librationis diurnae angulus FDA, sive CGc maxima sui quantitate aequabitur angulo, quem diameter Terrae e Luna visae subtendet. Iisdem ergo positis numeris corollarii primi Probl. I. Lib. I. erit diurna haec aberratio $1^\circ 54'$ circiter sub aequatore Terrae, aliis autem in locis minuetur in simplici ratione anguli diurno motu circa Terram descripti, seu radii circulorum aequatori parallelorum, seu denique in ratione simplici cosinus latitudinis: atque ita haec altera librationis species

pro

pro varietate locorum varia, & multo minor ubique est quam quæ pendet ex motu Lunæ & circa Terram, & circa proprium axem concepto. Simili modo definiri potest libratio quæ in latum fit, quæque oritur ex parallelismo axis, atque ex inclinatione lunaris orbitæ ad Eclipticam. Nam si recta *CB* eclipticam referat, & *BCG* sit angulus maximæ distantiæ Lunæ austrum versus, & Lunæ axis *Aa*, seu *Bb* sibi semper parallelus maneat; angulus *ADF* æquabitur angulo *BCG*, eoque angulo bis accepto differentia disci lunaris e Terra visi in maxima, & minima meridiana altitudine supra horizontem, atque in adversis limitibus latitudinis Lunæ Australis, & Borealis æquabitur angulo duplæ inclinationis lunaris orbitæ ad Eclipticam, angulo scilicet $10^\circ 18' 16''$: eaque rursus singulis mensibus lunaribus restituetur in gradum pristinum.

Neque vero ullæ sunt accuratæ observationes, quæ multo majorem esse indicent quantitatem librationis Lunæ, ut nonnullos olim contendisse legitur in priore volumine Commentariorum Bononiensis Academiæ. Grimaldus enim minimam Grimaldæ maculæ a limbo Lunæ orientali, & maris crisium a limbo occidentali distantiam 3, aut 4 earum partium deprehendit, quarum radius 100 complectebatur, distantiam maximam 11, vel 12. Quare cum maculæ hujusmodi æquatori Lunæ sint proximæ, & macularum distantiæ a lunari margine e Terra visæ sint sinus versi arcuum a marginis extremo incipientium, cumque sinubus versis partium 3, 4, 11, 12 centesimarum radii respondeant arcus graduum circiter 14, 16, 27, $28\frac{1}{2}$; differentiis ordine acceptis fiet circiter gradum $12\frac{1}{2}$, aut 13 quæ a Grimaldo observata est Lunæ libratio ab oriente in occidentem. Hevelii, & Bullialdi observationes, licet parum cum aliis Grimaldi congruant, quod tribui potest difficultati notandi margines macularum ubi transversim prope limbum videntur, non majorem tamen librationem Lunæ exhibent. Cum enim Bullialdo, & Hevelio quandoque visa sit prope limbum Grimaldi macula, & macula maris crisium; maxima utriusque maculæ distantia a limbo prodiit $5\frac{1}{2}$, aut 6 partium centesimarum radii. Minimam etiam distantiam centri maculæ Ty-

Tychonis a limbo Lunæ Auſtrali deprehendit Grimaldus partium 22, aut 24, maximam 38, aut 40: quibus ſinubus verſis cum ordine reſpondeant arcus gradum circitet 47, 48 $\frac{1}{2}$, 58 $\frac{1}{2}$, 60; obſervata Lunæ libratio in latum paulo erit minor libratione alia quæ in longum fit.

His itaque omnibus librationis phænomenis penitus ſatisfiet ubi ſtatuamus Lunam circa axem ſibi ſemper parallelum, & perpendicularem fere plano orbitæ circa Terram deſcriptæ eadem directione motus, eademque periodo temporis revolvi, quo revolvitur circa Terram. Bini autem motus hujuſmodi & rotationis, & projectionis ex unica vi poſſunt repeti, quæ ad diſtantiam partis $\frac{1}{547\frac{1}{2}}$ radii Lunæ a centro Lunæ ipſius primitus impreſſa fuerit, ut in Coroll. V. Probl. III. Lib. II. Volum. II. jam explicatum eſt. Si neque omnino ad diſtantiam illam a centro impreſſa fuiſſet vis prior, neque omnino eadem fuiſſet periodus duorum motuum circa axem proprium, & circa Terram Lunæ impreſſorum, continuatis revolutionibus aberrationes unius Lunæ hemiſphærii a Terra prodiiſſent ſemper majore. Si bini ii motus tantum quam proxime fuiſſent inter ſe æquales, facta inſuper hypotheſi Lunæ primitus fluidæ, & Terram verſus oblongatæ, explicari poſſet cur major Lunæ axis inæqualitate motuum a Terra aliquantulum retractus continuis oſcillationibus ad Terram retrahi debeat, ut videbimus ſuo loco. Patet vero quod cum in hypotheſi Lunæ oblongæ ad librationis phænomenon explicandum aſſumi debeat proxime eamdem eſſe periodum utriuſque motus, & circa axem proprium, & circa Terram Lunæ impreſſi; ſimplicior eſt hypotheſis qua in Luna utcumque etiam oblata, & omnino eamdem eſſe utriuſque motus periodum, & primitivam vim ad diſtantiam $\frac{1}{547\frac{1}{2}}$ radii a centro Lunæ impreſſam fuiſſe aſſumamus.

LI.

LIBER TERTIUS.

DE FIGURA, ET MOTU MARIS, ET ATMOSPHÆRÆ.

MAre bis diebus ſingulis ſupra libellam mediam aſſurgere intumeſcendo, & bis infra ipſam deprimi, ac detumeſcere, binoſque fluxus, ac totidem refluxus exhibere omnibus notum eſt. Notum eſt etiam tempora, & variationes omnes fluxuum, ac refluxuum varios Solis, ac Lunæ aſpectus ſic comitari, ut Solis, ac Lunæ actioni in mare undique exercitæ jam diu phænomenon adſcriptum fuerit. Ea vero ad Solis, ac Lunæ aſpectus phænomeni relatio eſt, ut in Noviluniis, ac Pleniluniis, cum ſimul conſpirant vires duorum luminarium in eadem recta jacentium; maximus fluxus in ipſum Solis, aut Lunæ appulſum ad meridianum loci non incidat, ſed duabus, aut tribus horis ſubſequatur, atque horis totidem refluxus ſubſequatur Solis, aut Lunæ appulſum ad horizontem: dum autem Luna a conjunctione, aut ab oppoſitione Solis tendit ad quadraruras, & tardius ſemper quam Sol ad meridiani planum reverritur, intervallum duorum fluxuum diebus duobus ſe conſequentium majus eſt una ſolari die, & poſt quadraturas majus eſt etiam die lunari. Ita cum tempus duos inter Lunæ appulſus ad eumdem meridianum ſit $24^h\,50\frac{1'}{2}$, juxta obſervationes a D. Maskeline ad inſulam *Barbados*, quæ libere Oceano alluitur, anno 1761 inſtitutas, intervallum duorum fluxuum diebus duobus poſt plenilunium Novembris erat $24^h\,37'$, eratque $25^h\,27'$ diebus duobus poſt ſubſequentem quadraturam. Duobus etiam, aut tribus diebus poſt novilunium, ac plenilunium habentur ſingulis menſibus æſtus maximi, atque æſtus minimi habentur diebus totidem poſt quadraturas. Juxta obſervationes illas, quas retulit Newtonus in Propoſ. XXXII. Lib. III., & Daniel Bernoullius Cap. VI. de maris æſtu, altitudines

maximorum fluxuum post syzigias, & minimorum post quadraturas tempore verno, & autumnali, Bristolii ante ostium fluvii Avonæ sunt pedum 45, & 25, Plimuthi 20 $\frac{1}{2}$, & 11 $\frac{1}{2}$, Maclovii 50, & 15. Augetur insuper maris æstus pro minore Lunæ distantia a Terra, & minore declinatione ab æquatore, atque ita maximi fluxus menstrui in plenilunia, & novilunia illa incidunt, quæ habentur Luna in perigæo, atque in æquinoctiali circulo posita. Denique annuæ fluxuum variationes sunt, quod pro minore Solis distantia a Terra augentur æstus, atque hyeme cæteris paribus æstus majores sint quam æstate: quodque insuper bini æstus se proxime consequentes vespere, & mane non sint æquales in locis extra æquatorem positis nisi cum Sol, & Luna versantur circa æquatorem. In regionibus Septentrionalibus, si Sol, & Luna declinent pariter ad Septentrionem, majores sunt fluxus qui habentur post appulsum ad superiorem meridiani partem, minores cum Sol, & Luna inde in partem adversam transeunt: quod si vero Sol, & Luna ad Austrum declinent priores fluxus in regionibus iisdem Septentrionalibus minores sunt posterioribus. In regionibus Australibus contrarium accidit. Ex observationibus Sturmii, & Colepressii differentia omnis prodiit quasi unius pedis Plimuthi, & Bristolii 15 digitorum. In iis maribus, quæ ab occidente in orientem late patent ut in mari Atlantico, Pacifico, Æthiopico, aquas æstuando attolli ad pedes usque 6, 9, 12, & quandoque etiam 15 scripsit Newtonus in Propos. XXXVII. Lib. III. Daniel Bernoullius Cap. IX. suæ de Marino æstu Dissertationis altitudinem fluxuum in maribus liberis, atque amplissimis pedum 8 esse dixit: At D. la Place pedum dumtaxat 5 ex observationibus colligi animadvertit. In Baltico, & Caspio mari nulli sensibiles sunt fluxus: in toto Hadriatico, & Mediterraneo mari satis exigui.

In maribus iis amplissimis cum aquæ omnes statis temporibus intumescant, ac deinde refluant, continuatam aliquam, ae generalem habent directionem motus, quæ eadem diurni motus in Luna, & Sole directio est, ab oriente scilicet in occidentem. Ita in mari Atlantico ad Americæ littora excurrunt aquæ, in mari autem Pacifico ab America potius recedere videntur. Communem hunc motum ma-

marium jam diu, ut Varenius refert, nautæ persenserant ubi est vehementior, in toto scilicet mari Pacifico, & ab India orientali usque ad Promontorium Bonæ Spei. In fretis etiam, quæ ad occidentem late patent, præcipue vehemens est maris motus, ut in freto Magellanico, & Mexicano. In ipsis vero maribus amplissimis adhuc aliæ observantur peculiares aquarum directiones, quas proprie *currentes* vocant, quæque a generali directione adeo deflectunt, ut alicubi etiam contrariæ sint. Ita ad Peruvii littora excurrunt aquæ ab austro in boream: atque ex Africæ latere a Promontorio, ut vocant *Capo-Verde*, ad sinum *Fernando-Poo* excurrunt ab occidente in orientem. Comes clarissimus de Buffon Tom. II. Historiæ naturalis peculiares hos motus ex generali illo marium motu derivandos esse censuerat, atque ex altioribus scopulis, quos maris fundus progredientibus aquis objicit. Nam & ubique irregularem esse maris fundum, & alicubi altius assurgere nautarum observationibus compertum est: & dato quod elatior fundus alicubi ad modum aggeris a borea in austrum se porrigat, ac generalem directionem maris ad occidentem intersecet ad rectos angulos; inde aquas reflecti, & contraria directione impelli in ortum necesse est. Sed venti etiam, & peculiares aliæ locorum, ac littorum circumstantiæ partem aliquam sibi vindicant totius phænomeni. Ita prope Maldivas, aliasque Indici maris insulas eadem aquarum currentium, ventorumque directio est, ex senis scilicet in senos menses contraria. In mari Hadriatico a Corcyrensi insula ad oras Dalmatiæ, & deinde ad Venetæ Ditionis littora, atque Æmiliæ postmodum, ac Flaminiæ eodem semper ordine excurrunt aquæ. Motum hujusmodi binis fere ab hinc sæculis nautæ agnoverant. Montanarius autem spectatis levioribus corporibus aquæ innatantibus velocitatem motus eam esse invenit, qua fere quatuor milliaria diebus singulis absolvantur: inde autem Montanarius, & Gulielminus rationem physicam derivarunt, qua flumina in mare influentia primo quidem compositis motibus aliquantulum in dexteram partem deflectant, deinde vero excursione illa maris abrupta, ac longius deviata, aggestisque ad dexteram arenæ cumulis, ad sinistram potius detorqueantur, ac denique adhuc longius provectis aquis, mixtisque, ac retardatis eidem maris directioni se acco-

modent, a sinistra scilicet ad dexteram ut etiam in Cap. VIII. Lib. I. Part. II. Vol. II. jam dictum est.

Generali directioni motus occidentem versus, quæ in amplissimis maribus deprehenditur, analogus est generalis ventus, qui intra Tropicos ab oriente continue advenit. Leges, ac variationes venti Hallejus in Transact. Philos. anni 1686, Dampierius, aliique plures descripserunt. Scilicet cum Sol ab æquatore declinat ad Cancri Tropicum, in maribus citra æquatorem positis ventus ab intersectione æquatoris, & horizontis videtur flare, & in maribus aliis ultra æquatorem positis spirat tunc temporis ab intersectione æquatoris, & Tropici Capricorni: & contra delato Sole ultra æquatorem, in maribus ultra æquatorem positis orientalis ventus ab intersectione horizontis, & æquatoris, in maribus vero citra æquatorem positis ex Tropico Cancri advenit: undique vero ultra zonam torridam non nisi ad quatuor, aut quinque gradus hinc illinc extra tropicos orientalis ventus excurrit. Directionem hanc generalem venti circa insulam Borboniam potissimum, atque ab orientali Africæ parte ad insulam Javam usque magnis etiam variationibus obnoxiam esse retulit D. Nux in Historia Parisiensis Academiæ anni 1760. Generalis phænomeni rationem physicam Hallejus eam attulit, quod adveniente Sole subjectus aer calefieri, atque expandi debeat, quodque ad occasum vergente Sole, cum rursus frigescere idem aer, ac condensari incipit, ad reficiendum elasticarum virium æquilibrium non nisi ex boreali, atque australi latere novus aer advenire possit, atque ex aliis columnis, quæ jam antea a Sole orientem versus relictæ sunt. Hoc dato orientalis ventus sub zona torrida habebitur, & hinc inde etiam a Tropicis eo tractu, ex quo aer affluens ad restituendum sub zona torrida æquilibrium virium sufficiet. Et quidem æquinoctii tempore in locis citra æquatorem positis aer ex oriente, & septentrione copiosius affluens compositam venti directionem ad occasum simul, & ad meridiem convertet: ultra æquatorem vero aer affluens ex oriente, & meridie ad occasum simul, & ad septentrionem dirigetur. Deinde ad Tropicum Cancri accedente Sole, ob calorem auctum in hemisphærio septentrionali, minores fient vires aeris e septentrione advenientis, & ventus ad orientalem propius accedet: in hemisphærio au-

autem meridionali, ob auctas meridionalis aeris vires, composita venti directio ad Tropicum Capricorni accedet propius: ac demum mutata Solis declinatione, ultra æquatorem ventus ex æquatore ipso; & citra æquatorem ex Tropico Cancri flare videbitur.

Binas alias hypotheses pro generali zonæ torridæ vento explicando protulit Daniel Bernoullius in Dissertatione, quæ anno 1751 retulit præmium Parisiense. Censuit enim §. VI. orientalem ventum proficisci posse ex frictione stratorum superiorum atmosphæræ, aut ætheris circumpositi, quæ diurnum motum stratorum inferiorum sequi non possint: quæ tamen superiora strata cum subtilissima, & tenuissima esse debeant, ne finito aliquo tempore ad eamdem angularis motus rationem cum terra omni, ac stratis densioribus componantur, ob tenuitatem ipsam ne quidem poterunt densiorum stratorum motum ab occidente in orientem sic retardare ut motus aliquis occidentem versus prope terrestrem superficiem sensibilis habeatur. Deinde §. XXXI., & XXXVI. rationem aliam Bernoullius addidit caloris, & dilatationis aeris: ita quidem ut cum aerem incalescere statuisset ipse ob multiplices reflexiones radiorum lucis, quæ fiunt prope terrestrem superficiem, quæque in majoribus altitudinibus uniformem aeris temperiem minime afficiunt; prope terram continue a polis ad æquatorem affluere dixit densiorem aerem, frigidioremque, ac refici aere alio, qui in superiore atmosphæræ parte ab æquatore ad polos refluit. Hoc autem posito aer ex circumpolari aliquo circulo ad parallelos alios circulos transeundo, angularis motus defectu utique occidentem versus deflecteret: at omnis deflexio hujusmodi, & orientalis ventus inde ortus non prope tropicos dumtaxat, verum etiam per totam temperatam zonam esset sensibilis, ubi velocitas diurni motus longe major est diurna velocitate aeris ex locis circumpolaribus advenientis. At insuper quæ constans est caloris differentia, ab æquatore pergendo ad polos, jam diu compensari debuit diversa columnarum aeris altitudine, atque in æquilibrio composita atmosphæra omni, diurni tantum, ac nocturni caloris differentia supererit, ex qua orientalis ventus oriatur, ut ab Hallejo explicatum est. Novam aliam hypothesim protulit celebris d' Alembert in Dissertatione, quæ anno 1746 Berolinense præmium obtinuit, cum generalis venti eam-

dem

dem eſſe rationem, & cauſſam cenſuit, quæ marini æſtus cauſſa eſt, attractionem videlicet Lunæ, & Solis. At maximum utriuſque phænomeni diſcrimen eſt, quod orientalis venti variationes omnes, aliis cauſſis extrinſecis non accedentibus, non niſi ex loco Solis pendeant ut dictum eſt: fluxus vero, & refluxus maris compoſitis Solis, ac Lunæ viribus, ac præcipue viribus Lunæ reſpondeat. Videamus tamen quæ Lunæ, & Solis in fluidam telluris partem ſit actio, & actionis totius leges cum phænomenis motuum maris, & atmoſphæræ comparemus.

CAPUT PRIMUM.

DE ÆQUILIBRIO FLUIDORUM NUCLEOS SPHÆROIDICOS CIRCUMAMBIENTIUM, ET DE ALTITUDINE FLUXUS MARIS.

PROBLEMA I.

Datis ſemiaxibus ſphæroidis homogeneæ, accedentiſque proxime ad ſphæram, invenire proportionem vis, quæ ad centrum dirigitur, & vis alterius, quæ perpendicularis eſt axi ipſius ſphæroidis.

In primis ſi proponatur ſphærois revolutione ellipſeos *ABHD*, fig. 37., circa minorem axem *DB* genita, per Coroll. II. Probl. VII. Lib. II. erit tota attractio ſphæroidis in æquatore $A = \frac{2}{3}pC + \frac{2}{5}pB$, & per Coroll. I. Theor. IV. in puncto quocumque Q erit vis axi *DB* perpendicularis $= \overline{\frac{2}{3}pC + \frac{2}{5}pB} \cdot \frac{QL}{C+B}$, ſeu proxime

$= \overline{\frac{2}{3}pC - \frac{4}{15}pB} \cdot \frac{QL}{C}$. Erit etiam attractio in polo ſphæroidis *D*

=

$= \frac{2}{5} pC + \frac{8}{15} pB$, & in puncto quocumque Q erit vis perpendicularis plano æquatoris $= \overline{\frac{2}{3} pC + \frac{8}{15} pB} \,.\, \frac{QV}{C}$. Quod si igitur pro $\frac{2pC - \frac{4}{15} pB}{3}$ scribamus $\frac{2}{3} pC + \frac{8}{15} pB - \frac{4}{5} pB$, vis $\overline{\frac{2}{3} pC + \frac{8}{15} pB} \,.\, \frac{QL}{C}$ secundum QL cum vi $\overline{\frac{2}{3} pC + \frac{8}{15} pB} \,.\, \frac{QV}{C}$ secundum QV componet vim $\overline{\frac{2}{3} pC + \frac{8}{15} pB} \,.\, \frac{QO}{C}$ secundum QO, ac supererit vis $- \frac{4}{5} pB \,.\, \frac{QL}{C}$, quæ contraria directione tendet ex L in Q: atque erit vis omnis in centrum O ad vim perpendicularem axi in puncto quocumque Q ut
$\overline{\frac{1}{3} C + \frac{4}{15} B} \,.\, QO : - \frac{2}{5} B \,.\, QL$.

Quod si proponatur sphærois revolutione ellipseos ejusdem circa majorem axem AH genita, juxta corollarium Probl. VI. Lib. II. erit attractio in puncto Q secundum QL exercita
$= \overline{\frac{2}{3} pC + \frac{2}{15} pB} \,.\, \frac{QL}{C+B} = \overline{\frac{2}{3} pC - \frac{8}{15} pB} \,.\, \frac{QL}{C}$, & per Coroll. IV. Probl. VII. erit attractio secundum QV exercita
$\overline{\frac{2}{3} pC + \frac{4}{15} pB} \,.\, \frac{QV}{C}$. Quod si igitur pro vi priore, quæ dirigitur ex Q in L, scribamus $\overline{\frac{2}{3} pC + \frac{4}{15} pB} \,.\, \frac{QL}{C} - \frac{4}{5} pB \,.\, \frac{QL}{C}$, patebit similiter vim omnem tendentem in centrum O se habere ad vim, quæ tendit ex L in Q, ut $\overline{\frac{1}{3} C + \frac{4}{15} B} \,.\, QO : - \frac{2}{5} B \,.\, QL$.

Quod

Quod si etiam proponeretur sphærois oblonga, in qua revolutionis axis esset C, & æquatoris radius $C - B$, atque ita manentibus omnibus ut in priore casu fieret B negativa; erit attractio in puncto Q secundum QV exercita $= \overline{\frac{2}{3}pC - \frac{8}{15}pB} . \frac{QV}{C}$, & attractio secundum LQ erit

$$= \overline{\frac{2}{3}pC - \frac{2}{5}pB} . \frac{QL}{C-B} = \overline{\frac{2}{3}pC - \frac{8}{15}pB} . \frac{QL}{C} + \frac{4}{5}pB . \frac{QL}{C};$$

& adhuc vires secundum QO, & QL agentes inter se erunt ut $\overline{\frac{1}{3}CB - \frac{4}{15}B} . QO : \frac{2}{5}B . QL$.

COROLLARIA.

I. Si more solito instituatur divisio, atque ob exiguam differentiam rectarum AO, QO, DO negligantur producta inferiorum ordinum, vis omnis ad centrum tendens in sphæroide oblata, atque oblonga erit ad vim, quæ perpendiculariter ad axem DB supererit, ut $5QO : \frac{6B}{C} . LQ$, seu proxime ut $1 : \frac{6B}{5C} . LQ$, & in sphæroide oblata, atque oblonga, quæ iisdem semiaxibus majore AO, & minore DO sit descripta, eadem directione tendet ex L in Q: in oblonga autem sphæroide, cujus semiaxis major sit DO, e contra dirigetur ex Q in L. Si punctum Q assumatur tam proximum puncto A, ut insuper possit negligi productum differentiæ semiaxium B in differentiam rectarum QL, QO, fiet virium earumdem ratio $1 : \frac{6B}{5C}$.

II. Positis aliis denominationibus Probl. VII. Lib. II. si generatim sit $\frac{2p}{3a^2} . (C^3 + 2C^2B) + \frac{2pC^2B}{5a^2} . (1 - 3T^2)$ vis omnis, quæ ad oblatæ sphæroidis centrum dirigitur, & sit propterea $\frac{2p}{3a^2}(C^3 + 2C^2B)$ vis illa, quam eadem materiæ quantitas secundum QO exerceret si tota in sphæram conformaretur, & $\frac{2pC^2B}{5a^2} . (1 - 3T^2)$ vis

alia, quæ ex forma sphæroidis oritur, quæque prope æquatorem, posito $T = 0$, & $a = C$, fit $\frac{2}{5}\ pB$; erit $\frac{6B}{5C} . \frac{2}{3}p . \overline{C + 2B}$ seu proxime $\frac{4}{5}\ pB$ vis, quæ ob formam ipsam sphæroidis secundum LQ supererit: scilicet vis hujusmodi posterior præcedentis dupla erit.

III. Patet autem quod si angulus AOQ, & sinus T deviationis ab æquatore maneat satis exiguus, & sphærois accedat proxime ad sphæram, recedendo directe a centro vis utraque, & quæ secundum QO, & quæ secundum LQ superest præter vim $\frac{2p}{3a^2}(C^3 + 2C^2B)$; imminui debet in eadem ratione quam proxime. Quare cum vis centralis ea portio, quæ ex figura sphæroidica ortum ducit, prope æquatoris planum, in qualibet a centro distantia sit $\frac{2pC^4B}{5a^4}$, erit vis perpendicularis minori axi sphæroidis $\frac{4pC^4B}{5a^4}$, & quæ inde orietur vis perpendicularis rectæ a loco dato prope æquatorem ad centrum ductæ erit quam proxime $\frac{4pC^4B . T}{5a^4}$.

THEOREMA I.

Si sphæra solida, & homogenea *abhd*, fig. 38., fluido aliquo diversæ densitatis ad modicam altitudinem circumambiatur, revolvaturque circa axem DB, & vis centrifuga præ gravitate sit valde exigua, æquilibrium totius fluidi sub alicujus sphæroidis forma tueri poterit.

Statuamus fluidum omne ad oblatæ sphæroidis formam se se componere, ac fiat ut antea sphæroidis semiaxis minor $DO = C$ major $AO = C + B$: & in fig. 37. cum sit ex conicis $AO^2 : AO^2 - DO^2 = VO : OR$, fiet etiam OR quam proxime $= \frac{2B . QL}{C}$. Si vis omnis, quæ juxta QO dirigitur, in sectionibus omnibus per axem DB traductis sit ad vim aliam, quæ superest juxta QT, ut $QO : OR$, seu proxime ut $C^2 : 2B . QL$, completo parallelogrammo $QTRO$, vis ex bi-

binis composita secundum QR sectioni cuilibet $ABHD$ normalem dirigetur, eritque totum fluidum in æquilibrio. Jam vero attractrices vires homogeneæ sphæroidis semiaxibus AO, DO descriptæ, secundum QO, QT, esse debent ut $1 : \frac{6B.QL}{5C^2}$: & si radius sphæræ $abhd$, fig. 38., vocetur c, densitatesque fluidi circumpositi, & sphæræ inclusæ sint inter se ut $1 : 1+\Delta$, atque in data a centro distantia QO augeatur sphæræ homogeneæ attractio in ratione auctæ quantitatis materiæ, sive in ratione $C^3+\Delta c^3 : C^3$; erit ratio virium juxta QO, & QT attrahentium $1+\frac{\Delta c^3}{C^3} : \frac{6B.QL}{5C^2}$. Denique si tota sphærois circa axem DB volvatur, & gravitas ad vim centrifugam sub æquatore se habeat ut $g : 1$, & vis centrifuga præ gravitate exigua sit, ac sit ubique proportionalis distantiæ ab axe; erit in loco quocumque Q vis omnis secundum QO exercita ad vim omnem, quæ secundum QT supererit, ut $1+\frac{\Delta c^3}{C^3} : \frac{6B.QL}{5C^2}+\left(1+\frac{\Delta c^3}{C^3}\right).\frac{QL}{g.C}$. Quod si igitur ratio hujusmodi cum alia congruat $C^2 : 2B.QL$, extremis, ac mediis in se ductis fiet $2B.(C^3+\Delta c^3) = \frac{6}{5}B.C^3+\frac{C}{g}.(C^3+\Delta c^3)$, atque inde eruetur $\frac{B}{C} = \frac{1}{2g}.\frac{C^3+\Delta c^3}{\frac{2}{5}C^3+\Delta c^3}$: scilicet totum fluidum erit in æquilibrio si differentia semiaxium ad minorem semiaxem sphæroidis oblatæ se habeat $C^3+\Delta c^3 : g.(\frac{4}{5}C^3+2\Delta c^3)$.

COROLLARIA.

I. Si differentia semiaxium B negativo signo exprimatur, oblata sphærois vertetur in oblongam semiaxibus C, & $C-B$ descriptam: atque ita pro casu æquilibrii universim erit $\frac{B}{C} = \frac{5}{4g}.\frac{1+\frac{\Delta c^3}{C^3}}{1+\frac{5\Delta c^3}{2C^3}}$.

Sci-

Scilicet data ratione densitatum, & radio sphæræ inclusæ, universim differentia semiaxium fluidi augebitur in eadem ratione vis centrifugæ: data autem vi centrifuga, semper eadem erit semiaxium differentia si differentia densitatum augeatur in ratione reciproca triplicata radii sphæræ inclusæ, sive si in sphæra inclusa materiæ quantitas eadem maneat.

II. Si in casu oblatæ, aut oblongæ sphæroidis iisdem semiaxibus descriptæ fiat $C=c$, in casu vero sphæroidis oblongæ, quæ semiaxes habeat C, & $C-B$, si fiat $C-B=c$, negliganturque producta differentiæ B in rationem vis centrifugæ ad gravitatem, fiet $\frac{B}{C}=\frac{1}{2g}\cdot\frac{1+\Delta}{\frac{2}{5}+\Delta}$, & sphærois oblata, aut oblonga habebitur prout quantitas $\frac{1+\Delta}{\frac{2}{5}+\Delta}$ positivum, aut negativum valorem obtinebit. Quod si densitas tota sphæræ interioris vocetur ω, & sit $\Delta=\omega-1$, erit etiam $\frac{B}{C}=\frac{1}{2g}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{5\omega}}$. Data igitur gravitate, & vi centrifuga semiaxium differentia non erit densitati fluidi, aut sphæræ directe, aut reciproce proportionalis.

III. Si sit $5\omega<3$, quantitas $1-\frac{3}{5\omega}$, & differentia semiaxium B negativa erit, & si fluidum sphæræ affusum, cum rotationis motus imprimitur, sphæroidis ad polos oblongatæ figuram habeat, continuato motu ab eadem figura minime recedet. Generatim vero imminuta quantitate $1-\frac{3}{5\omega}$, cum ω propius accedet ad $\frac{3}{5}$, Δ ad $-\frac{2}{5}$ augebitur differentia semiaxium. At cum calculus omnis processerit in hypothesi exiguæ differentiæ, & sphæroidis accedentis proxime ad sphæram, extra formulæ casum erunt absurda omnia, quæ in hypothesi differentiæ ultra datos limites auctæ inde colligi viderentur: ut quod si nuclei densitas ad fluidi densitatem se habeat ut $3:5$,

lentiſſimo etiam impreſſo circulari motu fluidum circa æquatorem altius aſſurgendo ultra quoſcumque limites debeat excurrere.

THEOREMA II.

Si fluidum nucleo ſphæroidico interius homogeneo ad modicam altitudinem affundatur, revolvaturque ſimul circa axem, adhuc exterius ad alicujus ſphæroidis formam ſe ſe componet.

Si minor ſemiaxis in utraque ſphæroide interiore, atque exteriore vocetur C, ac differentia ſemiaxium in nucleo quidem ſolido vocetur b, B vero in toto fluido circumpoſito, & differentia denſitatum adhuc ſit Δ; perinde attrahetur punctum quodcumque Q, ac ſi ſphæroidi denſitatis 1, ac ſemiaxium C, $C+B$ interius adderetur ſphærois alia denſitatis Δ, & ſemiaxium C, $C+b$. Erit igitur attractio in centrum ad eam attractionis partem, quæ perpendiculariter axi DB ſupererit, ut $1+\Delta : \frac{6}{5}.\overline{B+\Delta b}.\frac{QL}{C^3}$: & ſi ſphærois revolvatur circa axem ipſum, & tota gravitas ſub æquatore ſe habeat ad vim centrifugam ut $g:1$, & in ſphæroide oblata vis perpendicularis axi eamdem vis centrifugæ directionem habeat, contrariam vero in oblonga; utrobique æquilibrium circumfuſi fluidi haberi poterit ſi fiat

$$1+\Delta : \frac{6}{5}.\overline{B+\Delta b}.\frac{QL}{C^3} \pm \overline{1+\Delta}.\frac{QL}{g.C} = C^3 : 2B.QL.$$

Inde autem eruetur $\frac{B}{C} = \pm\frac{1}{2b}.\frac{1+\Delta}{\frac{2}{5}+\Delta} + \frac{\frac{2}{5}\Delta b}{\frac{2}{5}C+\Delta C}$: & cum neglectis minoribus fractionibus cenſeri poſſit $\frac{B}{C} = \frac{B}{C-B}$, eadem formula oblongæ etiam ſphæroidi inſerviet, cujus ſemiaxis major ſit C, minor vero ſemiaxis in ſphæroide ipſa, & in nucleo interiore $C-B$. Quare ſi fiat ut antea $\Delta = \omega - 1$, erit pro caſu quolibet poſitivæ, aut negativæ differentiæ ſemiaxium

$$\frac{B}{C} = \frac{1}{2g}.\frac{1}{1-\frac{3}{5\omega}} + \frac{3b}{3C}.\frac{1-\frac{1}{\omega}}{1-\frac{3}{5\omega}}.$$

CO-

COROLLARIA.

I. Si differentiæ B, & b exiguæ sint, ac b sit positiva, differentia etiam B positiva esse poterit, si quantitates $\frac{1}{2g} + \frac{3b}{5C} \cdot \overline{1 - \frac{1}{\omega}}$, & $1 - \frac{3}{5\omega}$ aut simul positivæ, aut simul negativæ fuerint, hoc est si simul fuerit $\frac{1}{2g} > \frac{3b}{5C} \cdot \overline{\frac{1}{\omega} - 1}$, & $\omega > \frac{3}{5}$, aut simul fuerit $\omega < \frac{3}{5}$, & $\frac{1}{2g} < \frac{3b}{5C} \cdot \overline{\frac{1}{\omega} - 1}$. Quod si etiam differentia b positivum valorem habeat, differentia B fiet negativa, & fluidum oblatæ sphæroidi affusum sphæroidis oblongæ formam tueri poterit si alterutra ex binis iis quantitatibus negativa fuerit, si scilicet posito $\frac{1}{2g} < \frac{3b}{5C} \cdot \overline{\frac{1}{\omega} - 1}$ fuerit $\omega > \frac{3}{5}$, aut posito $\omega < \frac{3}{5}$ fuerit $\frac{1}{2g} > \frac{3b}{5C} \cdot \overline{\frac{1}{\omega} - 1}$.

II. At vero in motu circulari vis centrifuga æqualis est quadrato velocitatis per radium circuli diviso: & in motu uniformiter accelerato quadratum velocitatis æquatur constanti vi acceleratrici ductæ in duplum spatium percursum. Itaque erit $\frac{1}{2g} > \frac{3b}{5C} \cdot \overline{\frac{1}{\omega} - 1}$, seu vis centrifuga major erit quam $\frac{6gb}{5} \cdot \overline{\frac{1}{\omega} - 1}$, si rotationis velocitas major fuerit quam quæ acquiri posset eadem vi acceleratrice g cadendo per altitudinem $\frac{3b}{5} \cdot \overline{\frac{1}{\omega} - 1}$: fluidum scilicet nucleo oblato affusum sphæroidis oblongæ formam tueri poterit si cum velocitas rotationis major fuerit, quam modo diximus, nuclei densitas tribus quintis partibus minor fuerit densitate fluidi, aut viceversa.

III. Pariter fluidum nucleo oblongo affusum oblatæ alterius sphæroidis formam habere poterit, si cum negativa sit differentia b, fue-

fuerint etiam aut simul positivæ, aut simul negativæ quantitates $\frac{1}{2g} - \frac{3b}{5C}.\overline{1-\frac{1}{\omega}}$, & $1-\frac{3}{5\omega}$: scilicet si rotationis velocitas major fuerit quam quæ acquiri posset cadendo per altitudinem $\frac{3b}{5}.\overline{1-\frac{1}{\omega}}$, & nuclei densitas major fuerit tribus quintis partibus densitatis fluidi, aut si & nuclei densitas, & velocitas rotationis simul ab indicatis quantitatibus deficiant. Si fuerit $\omega=\frac{3}{5}$, & $\frac{1}{2g} \pm \frac{3b}{5C}.\overline{1-\frac{1}{\omega}} = 0$, figura cujuslibet sphæroidis, quæ accedat proxime ad circulum, retinendo æquilibrio inserviet.

IV. Generatim vero pro æquilibrii casu vis perpendicularis axi se habebit ad gravitatem ut $\frac{6}{5C}.(B+b.\overline{\omega-1}) \pm \frac{\omega}{g} : \frac{\omega C}{QL} = 2B : \frac{C^2}{QL}$, & in sphæroide oblata vis perpendicularis eamdem habebit directionem vis centrifugæ, contrariam vero in oblonga. Quod si igitur oblata sphærois ab æquilibrii casu abducta magis comprimi incipiat, & differentia semiaxium B augeatur quantitate exigua b', interim autem vis perpendicularis minuatur; singulæ fluidi particulæ ad axem accedent propius, & prior æquilibrii forma restituetur. Tum autem erit

$$\frac{6}{5}.(B+b'+b.\overline{\omega-1}) + \frac{C\omega}{g} : 2B + 2b' < \omega : 1,$$

subductisque terminis analogiæ antecedentis fiet $\frac{6}{5}\,b' < 2\,\omega\,b'$, sive $\omega > \frac{3}{5}$.

V. Idipsum erit si oblata sphærois ab æquilibrii statu recedendo oblongari ad polos incipiat, & vis perpendicularis axi augeatur, ac sit

$$\frac{6}{5}.(B - b' + b.\overline{\omega - 1}) + \frac{C\omega}{g} : 2B - 2b' > \omega : 1.$$

Rursus enim prodibit $\omega > \frac{3}{5}$, auctaque vi perpendiculari singulæ fluidi particulæ ab axe longius recedent quousque pristinam æquilibrii

brii

brii formam restituant. Id in sphæroide etiam oblonga habebit locum: nam si differentia semiaxium $-B$ fiat $-B-b'$, vel $-B+b'$, ad æquilibrium restituendum necesse erit ut vis perpendicularis, quæ axem versus dirigitur, augeatur in primo casu, minuaturque in casu altero: quod esse nequit nisi in utroque casu sit $\omega > \frac{3}{5}$.

VI. Cum itaque in hypothesi quavis nuclei oblati, aut oblongi exterius fluidum sub oblongæ, & oblatæ sphæroidis forma æquilibrari possit, ut modo vidimus, sive posito $\omega > \frac{3}{5}$, sive etiam $\omega < \frac{3}{5}$; in priore casu turbatum uteumque æquilibrium restituetur: in casu autem altero aucta, vel imminuta differentia semiaxium, in sphæroide quidem oblata augebitur eodem ordine, vel imminuetur vis perpendicularis axi, in oblonga autem minuetur e contra, vel augebitur, & fluidum utrobique magis semper, magisque recedet ab æquilibrio. Posito $\omega = \frac{3}{5}$ eadem semper maneret ratio vis perpendicularis ad gravitatem, & æquilibrium sub quavis sphæroidis forma haberi posset. At nisi simul sit $\frac{1}{2g} \pm \frac{3b}{5C} . \overline{1 - \frac{1}{\omega}} = 0$, posito $1 - \frac{3}{5\omega} = 0$ differentia semiaxium ultra quoscumque limites, & extra casus formularum omnium præcedentium augeretur.

THEOREMA III.

Si particulæ omnes fluidi nucleo sphærico, vel sphæroidico ad modicam altitudinem affusi attrahantur a corpore alio satis dissito, fluidum omne sphæroidis oblongæ figuram induet, cujus major axis ad idem corpus dirigetur.

In primis enim si fluidum nucleo æque denso circumfusum ad oblongæ sphæroidis *ABHD* formam se se componat, & sint sphæroidis semiaxes $C+B$, & C, juxta Probl. I. in puncto quocumque Q attractrices vires, & quæ ex Q in O, & quæ ex Q in T dirigentur, inter se erunt ut $\frac{1}{3}pC + \frac{4}{15}pB : \frac{2}{5}pB . \frac{LQ}{C}$, seu proxime

ut

ut $1 : \frac{6}{5} B . \frac{LQ}{C^2}$. Quod si ipse etiam nucleus sphæroidis figuram referat semiaxibus $C + b$, & C descriptæ, & fluidi, ac nuclei densitates sint inter se ut $1 : 1 + \Delta$, juxta Theor. II., fiet ratio earumdem virium $1 + \Delta : \frac{6}{5} . \overline{B + \Delta b} . \frac{LQ}{C^2}$. Denique si fluidum omne attrahatur a corpore alio satis dissito, quod in productione majoris axis AH sit positum, atque ut in Probl. V. Lib. II. vis omnis, qua punctum quodcumque Q distrahitur a plano perpendiculariter ad AO traducto per centrum O, proportionalis sit triplæ distantiæ a plano ipso, atque ad distantiam 1 vocetur P, sit autem g absoluta particulæ cujusque gravitas in D, vel A; neglectis minoribus fractionibus erit in puncto eodem Q absoluta vis, quæ ex attractione corporis longinqui orietur, $\overline{1 + \Delta} . P . \frac{LQ}{g . C}$. Erit autem vis hujusmodi $\overline{1 + \Delta} . 3P . \frac{LQ}{g . C}$ si loco P eadem accipiatur quantitas, quæ in Probl. X. Lib. II. Æquilibrium itaque totius fluidi haberi poterit si fiat

$$1 + \Delta : \frac{6}{5} . \overline{B + \Delta b} . \frac{LQ}{C^2} + \overline{1 + \Delta} . 3P . \frac{LQ}{g.C} = C : 2B . \frac{LQ}{C}.$$

Inde autem, factis iisdem substitutionibus quæ antea, eruetur

$$\frac{B}{C} = \frac{3P}{2g} . \frac{1 + \Delta}{\frac{2}{5} + \Delta} + \frac{\frac{3}{5} \Delta b}{\frac{2}{5} C + \Delta C} = \frac{3P}{2g} . \frac{1}{1 - \frac{3}{5\omega}} + \frac{3b}{5C} . \frac{1 - \frac{1}{\omega}}{1 - \frac{3}{5\omega}}.$$

COROLLARIA:

I. Si differentia semiaxium fluidi, & nuclei exiguæ sint, & nucleus solidus oblongæ sphæroidis figuram habeat, fluidum omne figuram oblatæ alterius sphæroidis referre poterit, cujus minor axis ad corpus illud longinquum dirigatur, si quantitas $1 - \frac{3}{5\omega}$ negativa

sit.

sit, hoc est si nuclei densitas minor fuerit tribus quintis partibus densitatis fluidi circumpositi. Generatim etiam æquatio, quæ fluidi ipsius formam determinat, evolvi, & variæ densitatis hypotheses pro casu longinqui corporis attrahentis expendi poterunt ut in corollariis superioribus pro casu particularum omnium circa axem aliquem rotantium jam factum est. Hic autem omissis aliis hypothesibus præstabit illas dumtaxat, quæ in natura habent locum, examinare.

II. Si negligatur differentia semiaxium, quæ ex motu diurno oritur, & solidus telluris nucleus censeatur sphæricus, mare, & atmosphæra Telluri affusa, Solis, aut Lunæ actione sphæroidis oblongæ figuram induet, cujus major axis ad Solem, aut Lunam dirigetur, atque universim erit differentia semiaxium $= \frac{3P}{g} \cdot \frac{1 + \Delta}{\frac{4}{5} + 2\Delta} = \frac{3P}{2g} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{5\omega}}$. Quod si igitur, ut in Coroll. I. Probl. XII. Lib. II., interior nucleus plusquam quinta sui parte statuatur densior terra exteriore, & maribus circumfusis, scilicet si sit $\Delta = \frac{1}{5\frac{1}{2}}$, differentia altitudinum maris, quæ ex viribus Solis, aut Lunæ oriri poterit, fiet circiter $\frac{3P}{g}$.

III. Si fiat $\Delta = 0$, hoc est si media terræ interioris densitas, & marium affusorum statuatur eadem, erit $\frac{15P}{4g}$ altitudo omnis, ad quam usque ascendent maria, & quæ etiam, juxta Probl. X. Lib. II., ob attractrices Solis, aut Lunæ vires esset differentia semiaxium in hypothesi Terræ totius ad centrum usque fluidæ & homogeneæ. Scilicet, juxta corollarium primum problematis ejusdem, esset elevatio marium ob vim Solis pedum $1\frac{11}{12}$: & si vis Solis ad vim Lunæ se habeat proxime ut $2:5$, quemadmodum inferius ex phænomenis præcessionis æquinoctiorum, & nutationis terrestris axis eruemus, esset circiter pedum $4\frac{19}{24}$ altitudo, ad quam maria ob solam Lunæ vim

elevari possent: conjunctisque Solis, ac Lunæ viribus esset altitudo omnis pedum fere $6\frac{3}{4}$. Si nuclei interioris densitas assumatur illa, quæ ex pendulorum experimentis videtur colligi, erit altitudo marium $\frac{3P}{g}$, nimirum pedum $1\frac{8}{15}$ ob vim Solis, & pedum $3\frac{5}{6}$ ob vim Lunæ atque ob vim utramque pedum circiter $5\frac{1}{3}$.

IV. Quia vero differentiæ semiaxium sphæroidis utriusque, quæ Lunæ, ac Solis viribus respondent, sunt viribus Lunæ, & Solis proportionales, manifestum est altitudinem fluxus, & qui a Luna, & qui a Sole gignitur, variari debere in ratione reciproca triplicata distantiæ Lunæ, & Solis a centro Terræ. Ita igitur hyberni æstus, qui ex Sole oriuntur, majores erunt æstivis: & quia maxima, media, & minima Lunæ distantia a Terra proxime sunt inter se ut numeri 1055, 1000, 945, quorum numerorum cubi sunt inter se ut 3, $2\frac{1}{2}$, 2; fluxus maximi, qui ob vim Lunæ excitari possunt in apogæo, in distantia mediocri a Terra, & in perigæo, inter se ordine erunt ut numeri $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, & si in mediocri distantia sit altitudo fluxus pedum $3\frac{5}{6}$, erit in apogæo pedum dumtaxat $3\frac{1}{5}$, & pedum $4\frac{3}{4}$ in perigæo.

V. Quia insuper naturalis inertiæ ratione actæ semel in motum aqueæ particulæ agitari debent diutius, atque ultra limites illos excurrere, quos impressarum virium æquilibrium postularet; in maribus liberis, atque amplissimis major altitudo fluxus habebitur, quam quæ Solis, ac Lunæ viribus respondet. Newtonus in Propos. XXXVII. Lib. III. cum vim perturbatricem Lunæ multo majorem assumpsisset quam vere sit, & majorem altitudinem fluxus supputasset, hanc aliam aucti fluxus rationem minime consideravit. Principium autem inertiæ Daniel Bernoullius §. IV. Cap. VII., & Eulerus §. LXXIII. Cap. VI. de fluxu, & refluxu maris expresse tradiderunt, & cum revocari nequeat ad calculum, pendulorum exemplis explicarunt.

Ani-

Animadvertit autem Newtonus in portubus, ac fretis angustioribus majore impetu, ac copiosius aquam affluere, & reciprocis littorum reflexionibus ferri altius, atque hanc rationem, & caussam attulit quod altitudo fluxus alicubi 30, 40, & 50 etiam pedum habeatur.

VI. Hæc omnia cum fieri debeant in hypothesi quod Sol, & Luna dato terrestris superficiei loco immineant; diurni motus ratione habita manifestum est majorem axem sphæroidis oblongæ, sub cujus forma æquilibrium marium, & virium omnium perturbatricium haberetur, Soli, & Lunæ circa Terram revolutæ obverti semper oportere, & verticem sphæroidis eodem ordine ab oriente in occidentem volvi, ac successive in locis occidentalibus intumescere oportere aquas marium, & detumescere ad orientem, binosque fluxus, ac totidem refluxus haberi diebus singulis: & cum jam æquilibrii limites innotescant non alii undarum excursus ultra eosdem limites habebuntur, quam qui ex inertia partium undique in motum actarum profluent. Ita vero cum ut aquæ intumescant ad occidentem, copiosius ex locis aliis advenire debeant, in quibus antea intumescebant, scilicet ex oriente; patet in æstibus hisce reciprocis potiorem aquarum motum ab oriente in occidentem fieri oportere. Data autem generali hac directione motuum aliæ aquarum currentium variationes, quas libri hujus initio indicavimus, ex fundi littorum, locorumque differentiis colligi, atque explicari facile poterunt.

VII. Denique cum altitudinum differentiæ a loco illo, cui Sol, & Luna conjunctim imminent, usque ad distantiam graduum nonaginta, non nisi 5, aut 6 pedum conjunctis viribus haberi possit, nec nisi reciprocis oscillationibus, reflexionibusque ad altitudinem illam excrescat, quæ in portubus quibusdam, ac sinubus angustioribus observari solet; perspicuum est ad distanriam octo, aut decem graduum in iis maribus, quæ aut nullam habent, ut Caspium mare, aut non omnino habent liberam, ut mare Balticum, cum maribus aliis amplioribus communicationem, nullam sensibilem altitudinum differentiam, nullum æstum sensibilem conjunctis etiam Solis, ac Lunæ viribus induci posse. In mari Mediterraneo, quod latius patet ab occidente in orientem, & quod Gaditano freto cum Oceano At-

lantico communicat, altitudinum differentia, quæ fluxum, ac refluxum exhibet diebus singulis, est circiter trium quadrantium unius pedis. Fit autem ob multiplices reflexiones littorum, & insularum freto Hadriatico adjacentium, quod æstuantes aquæ copiosius in fretum ipsum rejectæ multo majorem altitudinem fluxus exhibeant. Media altitudo fluxus duorum circiter pedum Parisiensium Venetiis observari solet, paulo major in Perigæo Lunæ, & minor in Apogæo, major etiam in Noviluniis, ac Pleniluniis, & minor in quadraturis Lunæ, & Solis.

APPENDIX.

DE VARIIS HYPOTHESIBUS PROFUNDITATIS MARIS, ET CALCULIS MARINI ÆSTUS.

NEwtonus in Propos. XXXIV., & XXXVII. Princip. Mathem. facem aliis Geometris prætulerat ut varium adeo, ac multiplex marini æstus phænomenon, atque attractrices Solis, ac Lunæ vires in maria exercitas ad calculum revocarent. Calculum omnem summi Geometræ Daniel Bernoullius, Mac-Laurinus, & Leonardus Eulerus exhibuerunt anno 1740, cum marini æstus ratio a Parisiensi Academia præmio proposito quæreretur. Mac-Laurinus n sua Dissertatione theorema illud elegantissimum præcipue tradidit, quod attractionem, & æquilibrium homogenearum sphæroidum respicit, quodque in Cap. II. Lib. II. faciliore demonstratione exposuimus. Eulerus neque ad quam curvam, neque ad quam altitudinem mare ob Solis, ac Lunæ vires deduci debeat in sua Dissertatione accurate demonstravit, & altitudinem fluxuum vi Solis genitam quadruplo minorem invenit esse quam jam antea Newtonus ex principiis aliis collegerat. Bernoullius marini æstus phæno-

nomena diſtinčte evolvit, atque altitudinem, tempus, ac variationes fluxuum pro loco quolibet, & pro qualibet Lunæ, & Solis diſtantia a Terra, & a ſe invicem ſupputavit. Et quidem fluxuum differentiam quæ ex Sole oritur proxime, eamdem invenit Bernoullius, quam Newtonus determinavit, & Newtonianam lunaris fluxus ſupputandi methodum correxit: variationem autem altitudinis aeris, & mercurii in barometris ſuſpenſi longe majorem invenit, quam quæ conjunčtis Solis, ac Lunæ viribus induci poſſet.

Et quidem Newtonus pro ſupputanda fluxuum altitudine, quæ ob vires Solis, & Lunæ haberi debet, hypotheſim eamdem retinuit, qua differentiam ſemiaxium Terræ viribus centrifugis motus diurni genitam ſupputaverat, quod ſcilicet tota telluris maſſa eſſet fluida, & pondera columnarum omnium a ſuperficie ad centrum uſque dučtarum eſſent inter ſe æqualia: rationem autem virium Solis, & Lunæ ex maximis, ac minimis æſtubus collegit. Eadem pariter a Lac-Laurino, & Bernoullio maſſæ fluidæ, & æquilibrii columnarum hypotheſis aſſumpta eſt. Bernoullius vero cum analyticas formulas differentiæ columnarum undique circa centrum in æquilibrio conſiſtentium a maſſa telluris fluida, & mari libero ad atmoſphæram, non quidem centro, ſed ſuperficiei Terræ circumpoſitam traduxiſſet, tantam illam eruit, quam inferius corrigemus, differentiam altitudinum aeris, & mercurii in barometris ſuſpenſi. At inſuper cum quæ ex formulis iiſdem colligitur fluxuum altitudo minor Bernoullio viſa ſit quam quæ in libero mari obſervari ſolet, cumque differentia duorum fluxuum nočtu, & interdiu ſe conſequentium prodeat multo major, quam quæ in partubus maris deprehenditur, atque etiam ſupputata fluxuum maximorum tempora in ipſum Solis, ac Lunæ appulſum ad meridianum, & in novilunii, ac plenilunii dies, quando potiores ſunt Solis, ac Lunæ vires, non incidant, aliud inertiæ principium protulit Bernoullius, quo Eulerus etiam uſus eſt, & quod in corollariis antecedentibus ſatis jam indicavimus.

Hypotheſim aliam, quæ variationibus maris, & atmophæræ explicandis magis accomodata videtur eſſe, ingenioſe evolverunt celebres Mathematici Clairaut Cap. II. Part. II. de Figura Terræ, & A-
lem-

lembert in Dissertatione de generali ventorum caussa, ac To. I., & VI. Opusculorum, ubi inquisierunt leges æquilibrii fluidorum nucleos sphæricos, ac sphæroidicos ad modicam altitudinem circumambientium. Alembertius etiam determinavit qua lege, & quibus gradibus fluida nucleo sphærico circumfusa accedentibus Solis, ac Lunæ viribus, aut impresso circulari motu ad æquilibrii statum pervenerint. Et quidem singulare est quod in hypothesi marium nucleum solidum ad modicam altitudinem circumambientium eadem prodeat altitudo fluxus, quæ in hypothesi columunarum ad centrum usque pertingentium haberetur. Singulare est etiam quod circumfusi fluidi æquilibrium, spectato circulari motu, & sub oblatæ, & sub oblongæ sphæroidis forma haberi possit. Evolutis jam in antecedente libro legibus æquilibrii massæ totius fluidæ, leges æquilibrii fluidorum nucleo solido affusorum breviter explicavimus in hoc capite, atque ita casus illos distinximus, in quibus fluidum ab æquilibrio utcumque abductum ex se in pristinam formam restitui, aut inde magis semper, magisque abduci debet, ut dubium hacce in re nullum suboriri amplius possit. Quibus autem legibus ad hunc æquilibrii statum perveniant fluida, & quæ marini æstus, ac generalis zonæ torridæ venti analogia esse possit, singillatim inquiremus postquam ipsæ æquilibrii formulæ ad variationes marini æstus explicandas in subsequente capite traductæ fuerint.

Aliam problematum horum omnium generaliter resolvendorum methodum, plane novam, atque ingeniosam exhibuit D. la Place in Actis Parisiensis Academiæ anni 1775, & 1776, habita scilicet ratione motus diurni Terræ, & profunditatis maris cujuslibet, undarumque in amplissimo Oceano recurrentium, quarum ad calculum reducendarum spem nullam esse censuerat Eulerus §. LXXXII. Cap. VI. de æstu maris. Cum enim differentiam duorum fluxuum vespere, & mane se consequentium in majoribus Lunæ, ac Solis distantiis ab æquatore, atque in hypothesi exiguæ marium profunditatis, sextuplo fere majorem Brestii esse oportere animadverteret D. la Place quam vere sit, nec Bernoulliano inertiæ principio censeret formulas analyticas cum observationibus conciliari posse; variationes fluxuum, quæ ex varia maris profunditate, atque aliis calculi elementis pendent ac-

accurate supputavit. Ac primo quidem in hypothesi maris ad altitudinem dimidiæ leucæ supra fundum assurgentis invenit author clarissimus altitudinem fluxuum sub æquatore viginti fere pedum esse oportere, & paradoxum illud consequi deprehendit quod maria iis in locis deprimi debeant, quibus imminent Luna, & Sol, atque in locis hinc inde integro quadrante dissitis elevari. Aliis etiam hypothesibus duarum, aut trium leucarum profunditatis maris ob rationes consimiles rejectis hypothesim quatuor leucarum liberæ, ac mediæ profunditatis author idem proposuit, in qua & media altitudo fluxus sub æquatore esset pedum dumtaxat quinque, & differentia duorum fluxuum proxime se consequentium pro quavis Solis, ac Lunæ declinatione esset exigua, & nulla etiam ex marium recursibus oriri posset præcessionis æquinoctiorum, & nutationis terrestris axis variatio.

Primo autem libera, ac media leucarum quatuor, seu milliarium circiter duodecim profunditas pro maribus omnibus amplissimis videtur nimia. Cum enim profundiores sinus nihil ad fluxum, ac refluxum conferant nisi pateant undique latius, cumque hac de caussa in mari Caspio, atque in fretis angustioribus nulli sensibiles sint æstus, maria autem amplissima Pacificum, Atlanticum, Indicum tot insulis interspersa sint, tot peculiaribus aquarum cursibus indicent non longius distare fundum, tot etiam in locis minores profunditates habeant, ut inter Africam, & Americam potissimum nautarum experimentis compertum est; nulla veri similitudine assumi posset continuatam ubique, ac satis liberam haberi milliarium duodecim profunditatem. Insuper tanta hac assumpta maris profunditate licet exigua duorum fluxuum differentia explicari possit, inexplicatum adhuc maneret cur fluxus, ac refluxus maris Brestii, aliisque in locis tanto majores sint, quam qui ex virium attractricium calculo colliguntur, & quod inertiæ principium majoris fluxuum altitudinis, retardationisque fluxuum post Solis, ac Lunæ appulsum ad meridianum, & post novilunia, ac plenilunia ratio, & caussa est, idem etiam explicandæ minori fluxuum differentiæ sufficit, ut mox videbimus. Cum in libro tertio voluminis antecedentis notatum fuerit quam dubii, & incerti semper motorum fluidorum, & in se undi-

que

que agentium ſint calculi; manifeſtum eſt fluida omnia ob naturalem inertiam præconceptis motibus diutius affici, & ultra æquilibrii limites excurrere. Cum igitur diurni motus ratio in corollario ſexto antecedente ſatis ſit habita, præmiſſo hoc alio generali inertiæ principio, & priore hypotheſi aſſumpta exiguæ maris profunditatis, in capitulo ſubſequente inquiremus num variationes etiam, ac differentiæ fluxuum, ac refluxuum explicari poſſint. Alembertus de generali ventorum cauſſa cum ageret mediam Oceani profunditatem quartæ milliaris unius partis tantummodo eſſe ſtatuit.

CAPUT SECUNDUM.

DE PERIODO, AC VARIATIONIBUS FLUXUS, AC REFLUXUS MARIS.

PROBLEMA II.

SI Sol, & Luna dato angulo a ſe invicem recedant, locum maximi fluxus maris determinare.

Si Sol in productione radii OC jaceat, fig. 39., & radius mediocris Terræ vocetur C, & ſit b differentia ſemiaxium, quæ ob vires perturbatrices Solis induci poſſet, erit in loco quocumque Q diſtantia ſuperficiei ſphæroidicæ a centro $C + b.\ \text{coſ.}\ COQ^2 = C + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b.\ \text{coſ.}\ 2COQ$. Pariter ſi ſit B differentia ſemiaxium, quæ induci poſſet ob vires Lunæ, & Luna in productione radii OA jaceat, erit in puncto eodem Q ſphæroidis ſemidiameter $C + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B.\ \text{coſ.}\ 2AOQ$. Et quia ob parvitatem duarum virium cenſeri poteſt utramque ſimul eumdem effectum edere, quem præſtarent ſingillatim: viribus ſimul agentibus erit in loco Q altitudo fluxus $\frac{1}{2}.\overline{B+b} + \frac{1}{2}B.\ \text{coſ.}\ 2AOQ + \frac{1}{2}b.\ \text{coſ.}\ 2COQ$: & quo in loco habebitur fluxus maximus maxima etiam evadet quantitas $\frac{1}{2}B.\ \text{coſ.}\ 2AOQ + \frac{1}{2}b.\ \text{coſ.}\ 2COQ$. Diametro OQ, & cen-

centro T deſcribatur circulus, qui duas rectas AO, OC ſecet in V, & U, accipianturque duo puncta v, & u ſatis proxima, ut ſint æquales anguli VOU, vOu, atque ex iiſdem punctis in diametrum demittantur perpendicula VN, UM, vn, um. Ob angulum VTQ duplum anguli VOQ, & UTQ duplum ſimiliter anguli UOQ, in loco maximi fluxus maxima etiam evadet quantitas $B . TN + b . TM$, adeoque acceptis differentiis erit $b . Mm - B . Nn = 0$. At ſi circuli radius accipiatur pro unitate eſt $Vv = \frac{Nn}{NV}$, & $Uu = \frac{Mm}{MU}$, & elementis arcuum Vv, Uu poſitis inter ſe æqualibus fieri debet $Nn : Mm = NV : MU$. Itaque in loco maximi fluxus erit $B : b = Mm : Nn = MU : NV =$ ſin. $2COQ$: ſin. $2AOQ$, ſive ſinus duplorum angulorum COQ, AOQ erunt viribus in directione CO, & AO agentibus reciproce proportionales.

COROLLARIA.

I. Simili modo ſi angulum AOQ augeri, & angulum COQ minui angulo exiguo z intelligamus, quia in loco maximi fluxus debet eſſe $\frac{1}{2}B . \text{coſ.}\, 2AOQ + \frac{1}{2} b . \text{coſ.}\, 2COQ = \frac{1}{2} B . \text{coſ.}\, \overline{2AOQ + z} + \frac{1}{2} b . \text{coſ.}\, \overline{2COQ - z}$, binis terminis poſterioribus reſolutis, & poſito coſ. $z = 1$, eruetur $\frac{B}{b} = \frac{\text{ſin.}\, 2COQ}{\text{ſin.}\, 2AOQ} = \frac{\text{ſin.}\, COQ}{\text{ſin.}\, AOQ} . \frac{\text{coſ.}\, COQ}{\text{coſ.}\, AOQ}$: atque inde aliæ etiam analogiæ educi poterunt. Sed ſi Geometrice conſtrui debeat problema, centro quocumque t, fig. 40., deſcribatur circulus, qui tranſeat per punctum O, & rectas CO, AO ſecet in X, & Z, juganturque recta XZ, atque in puncto K dividatur ipſa in ratione virium reciproca, & per K ducatur radius tq, jungaturque recta OqQ; erit Q locus quæſitus. Anguli enim Xtq, Ztq dupli erunt angulorum XOq, ZOq, atque in radium tq demiſſis perpendiculis Xm, Zn, erit $Xm : Zn = XK : ZK = B : b$.

II. Si ſit M ſinus, & N coſinus anguli AOC, & ſinus anguli AOQ vocetur m, ac ſit propterea ſin. $COQ = M . \surd (1 - m^2) - mN$,

& cof. $COQ = Mm + N . \sqrt{(1 - m^2)}$, pofterior corollarii antecedentis æquatio evadet

$$\frac{B}{b} = \left(\frac{M}{m} - \frac{N}{\sqrt{(1 - m^2)}}\right)\left(\frac{M}{\sqrt{(1 - m^2)}} + \frac{N}{m}\right):$$

inde vero, multiplicatis terminis, eruetur

$$\left(M^2 - N^2 - \frac{B}{b}\right)\frac{m . \sqrt{(1 - m^2)}}{MN} = 2m^2 - 1,$$

& pofito $\frac{M}{N} - \frac{N}{M} - \frac{B}{b . MN} = A$, fiet ordine

$$A^2 m^2 - A^2 m^4 = 4m^4 - 4m^2 + 1,$$

$$\left(\pm m^2 \mp \tfrac{1}{2}\right) \sqrt{(A^2 + 4)} = \tfrac{1}{2} A,$$

$$m = \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} \pm \frac{A}{2\sqrt{(A^2 + 4)}}\right)} .$$

III. Ex priore conftructione manifeftum eft quod fi angulus AOC fit acutus, locus maximi fluxus Q erit medius inter A, & C: quodque fi angulus AOC fit rectus, hoc eft fi Sol, & Luna reperiantur in quadraturis, punctum Q in A cadet, ibique ob vim Lunæ attollentur maria ubi vi Solis deprimentur, & contra deprimentur vi Lunæ ubi Solis vi affurgent: & quod denique fi angulus AOC' fit recto major, fig. 41, duo maximi fluxus puncta cadent intra D, H, & B, A. Ope autem formulæ pofterioris, dato quocumque angulo AOC, femper affignari poterunt duo puncta fibi invicem ex diametro oppofita, in quibus conjunctis Solis, & Lunæ viribus maximus fluxus habebitur, & duo infuper alia puncta quadrante integro ab iis diffita, in quibus habebitur maximus refluxus: & cum priora duo defignentur ambiguo figno, quod formulæ præfigitur, cumque finui

$\sqrt{\left(\tfrac{1}{2} + \frac{A}{2\sqrt{(A^2 + 4)}}\right)}$ cofinus $\sqrt{\left(\tfrac{1}{2} - \frac{A}{2\sqrt{A^2 (+4)}}\right)}$ refpondeat, bina alia puncta ambiguo figno exprimentur, quod formulæ inclufum eft.

IV. Quia tempus duas inter Solis, & Lunæ conjunctiones eft dierum circiter $29 \tfrac{1}{2}$, adeoque diebus fingulis Luna a Sole recedit circiter

citer

citer $50\frac{1}{2}'$ temporis, & tempus duos inter appulsus Lunæ ad meridianum est $24^h\, 50\frac{1}{2}'$; Luna a syzigiis recedente maximus maris fluxus appulsum Solis ad meridianum subsequetur, & antecedet appulsum Lunæ, & intervallum duorum fluxuum diebus duobus se consequentium Solari die erit majus, & minus lunari. Quod si anguli AOQ, COQ, fig. 41., assumantur adeo exigui, ut eorum cosinus sint proxime æquales radiis, sinus vero sint arcubus QA, QC proportionales, in superiore analogia fiet $B:b = QC:QA$, scilicet retardatio fluxus post unam naturalem diem ad antecessionem præ una lunari die se habebit ut vis Lunæ ad vim Solis. Quare si intervallum duorum fluxuum post syzigias diebus duobus se consequentium sit $24^h\, 37'$, ut initio hujus libri adnotavimus, fiet etiam $B:b = 37:13.5$.

V. Quadraturam tempore fluxus maximus appulsum Lunæ ad meridianum subsequetur; atque intervallum duorum fluxuum una etiam lunari die erit majus: & si angulus AOC paulisper minor sit recto, fig. 41., eductaque ad Cc perpendiculari OS sinus anguli QOC radio, & cosinus arcui QS æqualis assumi possit, erit similiter $B:b = QS:QA$, scilicet paulo post quadraturas retardatio QS fluxus post unam naturalem diem erit ad retardationem QA post diem unam lunarem ut vis Lunæ ad vim Solis. Itaque simili ratione si intervallum duorum fluxuum assumatur $24^h\, 87'$, erit $B:b = 87:36.5$, quæ ratio virium perturbatricium aliquantulum ab ea discrepat, quem ex phænomenis præcessionis æquinoctiorum, & nutationis terrestris axis colligitur, quæque est $5:2$ satis proxime.

PROBLEMA III.

Data proportione virium Solis, & Lunæ invenire maximam fluxus retardationem, &, quæ retardationi maximæ respondet, Solis, & Lunæ distantiam inter se.

Quia locus maximi fluxus, Q, fig. 39., totum angulum VOU sic dividit in binos alios VOQ, UOQ ut sinus VN, UM duplorum angulorum VTQ, UTQ sint in ratione reciproca virium secundum rectas, VO, UO agentium, dato quocumque angulo UTQ,

si accipiatur $B:b = UM : VN$, invenietur qua in directione VO Luna esse debeat, ut Sole in productione rectæ UO posito, maximus fluxus incidat in locum Q. Jam vero sinus UM fit maximus cum angulus UTQ evadit rectus, & semirectus angulus UOQ: eoque in casu maximus etiam fiet angulus VTQ, ipsiusque dimidius VOQ: eritque $\frac{b}{B}$ valor maximus sinus VN anguli ejusdem VTQ.

Quod si igitur sinus anguli VOQ ut antea vocetur m, & sit $2m\sqrt{(1-m^2)} =$ sin. $2AOQ = \frac{b}{B}$, in casu anguli ejusdem AOQ maximi debebit esse $4m^2 - 4m^4 = \frac{b^2}{B^2}$, atque inde eruetur primum $\pm 2m^2 \mp 1 = \frac{1}{B} . \sqrt{(B^2 - b^2)}$, ac deinde $m =$ $\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2B} . \sqrt{B^2 - b^2}\right)}$. Posito autem sin. $COQ =$ cos. COQ $= \sqrt{\frac{1}{2}}$, sin. $AOQ = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2B} . \sqrt{B^2 - b^2}\right)}$, & cos. $AOQ =$ $\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2B} . \sqrt{B^2 - b^2}\right)}$, si fiat $M =$ sin. $AOC =$ sin. COQ. cos. $AOQ +$ cos. COQ. sin. $AOQ = \sqrt{\frac{1}{2}}$. (sin. $AOQ +$ cos. AOQ); quadratis terminis erit $2M^2 = 1 + 2$. sin. AOQ. cos. $AOQ = 1 +$ $2\sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4B^2} . \overline{B^2 - b^2}\right)}$, & reductis terminis sinus M angularis distantiæ AOC, quæ maximæ distantiæ fluxus a Sole, & Luna respondebit, fiet $= \sqrt{\left(\frac{B+b}{2B}\right)}$, & cosinus $N = \sqrt{\left(\frac{B-b}{2B}\right)}$.

COROLLARIA.

I. Generatim etiam si sinus anguli COQ vocetur n, M vero & N ut antea sint sinus, & cosinus anguli AOC juxta Coroll. I. Probl. II. habebimus hanc aliam analogiam

B

$B : b = n\surd(1 - n^2) : MN . \overline{1 - 2n^2} + \overline{M^2 - N^2} . n\surd(1 - n^2)$;
ac fiet $\left(M^2 - N^2 - \frac{b}{B}\right) . n\surd(1 - n^2) = MN . (2n^2 - 1)$:

& posito $\frac{M}{N} - \frac{N}{M} - \frac{b}{B . MN} = C$, generatim eruetur $n =$
$\pm\surd\left(\frac{1}{2} \pm \frac{C}{2\surd(C^2+4)}\right)$. Quare in casu maximi anguli COQ;
posito $n = \surd(1 - n^2) = \surd\frac{1}{2}$, $2n^2 - 1 = 0$, fiet
$M^2 - N^2 = 2M^2 - 1 = \frac{b}{B}$, & $M = \surd\left(\frac{B+b}{2B}\right)$.

II. Angulus COQ maximæ retardationis fluxus post Solis appulsum ad meridianum, virium dumtaxat perturbatricium ratione habita, erit $45°$: & quia Solis ac Lunæ vires sunt inter se quam proxime ut $2 : 5$; erit sinus maximi anguli $COA = \surd\frac{7}{10} = 0.83661$ qui sinus cum respondeat angulo $56° \; 47'$, subducto angulo $45°$; angulus AOQ maximæ fluxus distantiæ a Luna fiet $11° \; 47'$. Habita vero inertiæ ratione, qua fluida utcumque impulsa excurrunt ultra limites æquilibrii, retardatio fluxus maximi major etiam esse poterit: sicuti eamdem ob caussam fit quod Solis, & Lunæ viribus conspirantibus fluxus maximus duabus, aut tribus horis post meridiem, & mediam noctem habeatur diebus singulis, & singulis mensibus habeatur duobus, aut tribus diebus post Novilunium, & Plenilunium.

III. Quia insuper generatim si G sit numerus graduum, quos angulus AOQ continet, & fiat ut 360 ad G, ita 24.60 ad quartum prodit numerus minutorum temporis, quibus angulus idem absolvitur: & quia cum sit $360 : 24 . 60 = 1 : 4$, numerus G quater sumptus exhibet quæsitum numerum minutorum temporis; angulo $45°$ horæ tres, & $11° \; 47'$ respondebunt $47 \frac{2'}{15}$ temporis, hoc est maxima fluxus distantia habebitur 3^h post appulsum Solis, & $47'$ ante Lunæ appulsum ad Meridianum. Quia denique ab una ad al-

te-

teram conjunctionem transeundo Luna absolvit 360° diebus $29\frac{1}{2}$ circiter; si fiat $360^\circ : 56\frac{3}{4} = 29\frac{1}{2} : 4\frac{2}{3}$, patebit maximam fluxus distantiam diebus $4\frac{2}{3}$ post syzigias incidere, & diebus $2\frac{2}{3}$ circiter antecedere tempus quadraturarum.

PROBLEMA IV.

Data qualibet Solis, & Lunæ distantia a se invicem retardationes maximorum fluxuum supputare.

Si M ut antea sit sinus, & N cosinus angularis distantiæ Lunæ a Sole, sinus angularis distantiæ fluxus maximi a Luna vocetur m, atque absolutæ vires Solis, & Lunæ sint inter se ut $b : B$, posito $\frac{bM^2 - bN^2 - B}{bMN} = \frac{2bM^2 - B - b}{bMN} = A$, ut in Coroll. II. Probl. II., fiet $A^2 m^2 - A^2 m^4 = 4m^4 - 4m^2 + 1$. Quia vero per corollarium superius distantia fluxus maximi a Luna nunquam est major arcu $11^\circ\, 47'$, cujus sinus m est circiter quinta pars radii, negligi poterit quarta ejusdem sinus potestas m^4, & fiet $(A^2 + 4) . m^2 = 1$, sive $m = \frac{1}{\sqrt{(A^2 + 4)}}$. At insuper cum esse debeat $B : b = 5 : 2$ satis proxime, fiet etiam $A = \frac{2bM^2 - B - b}{bMN} = \frac{4M^2 - 7}{2MN}$, atque hoc valore substituto evadet $A^2 + 4 = \frac{16 M^4 - 56 M^2 + 49 + 16 M^2 N^2}{4M^2 N^2} = \frac{49 - 40 M^2}{4M^2 N^2}$. Erit itaque $m = \frac{1}{\sqrt{(A^2 + 4)}} = \frac{2MN}{\sqrt{(49 - 40M^2)}} = \frac{\text{sin. } AOC}{\sqrt{(29 + 20 \text{ cos. } 2AOC)}}$.

COROLLARIA.

I. Si angulus AOC sit acutus, fig. 41., sinus m positivus erit, & fluxus maximus subsequetur appulsum Solis ad meridianum, & antecedet appulsum Lunæ: si vero angulus AOC' distan-

ſtantiæ Solis a Luna ſit recto major, & ſinus M poſitivus maneat, coſinus autem N fiat negativus, etiam ſinus m negativus fiet, & fluxus maximus ſubſequetur Solis, & Lunæ appulſum ad meridianum. Et quidem ſi anguli AOC, HOC' æquales ſint inter ſe, anteceſſio fluxus AOQ æqualis erit angulo retardationis AOq, & quibus gradibus antecedet fluxus appulſum Lunæ dum ipſa a ſyzigiis cum Sole tranſibit ad quadraturas, iiſdem ſubſequetur Lunam in reditu Lunæ ipſius a quadraturis ad ſyzigias.

II. Si in priore formula $m = \frac{2MN}{\sqrt{(49 - 40M^2)}}$ ſubſtituantur valores ſinus, & coſinus diſtantiæ cujuslibet propoſitæ Solis a Luna; patebit quo arcu, & tempore fluxus maximus, ſeclusa inertiæ ratione, a Sole, & Luna diſtare debeat. Ut ſi angulus AOC ſit 30°, vel 150°, & in utroque caſu ſit $M = \frac{1}{2}$, N vero $= \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$; prodibit $m = \pm 0.1387$, qui eſt ſinus circiter $\pm 7° 58'$, quique juxta Coroll. III. Probl. III. reſpondet tempori $31 \frac{13'}{15}$. Quod ſi igitur Luna a Sole diſtet arcu 30°, maximus fluxus a Luna diſtabit arcu 7° 58', a Sole vero 22° 2', habebiturque $1^h\, 28 \frac{2'}{15}$ poſt Solis, & $31 \frac{13'}{15}$ ante Lunæ appulſum ad meridianum: & ſi Lunæ, & Solis diſtantia ſit 150°, & diſtantla fluxus maximi a Luna ſit in adverſam partem 7° 58', & a Sole 157° 58', maximus fluxus incidet $10^h\, 31 \frac{13'}{15}$ poſt Solis, & $31 \frac{13'}{15}$ poſt Lunæ appulſum ad meridianum.

III. Aliis ſimilibus ſubſtitutionbus locus, & tempus fluxuum maximorum eruetur ut in tabula ſequenti.

Diſtan-

Distantiæ Lunæ a Sole	Distantiæ fluxus a Sole	Distantiæ fluxus a Luna	Tempus post, & ante appulsum Solis	Tempus post, & ante appulsum Lunæ
15.°	10.° 47.′	4.° 13.′	+ 43 $\frac{2'}{45}$.	— 16 $\frac{13'}{15}$.
30.	22. 2.	7. 58.	+ 1.° 28 $\frac{2'}{15}$.	— 31 $\frac{13'}{15}$.
45.	34. 18.	10. 42.	2. 17 $\frac{1}{5}$.	42 $\frac{4}{5}$.
56.° 47.′	45. 0.	11. 47.	3. 0.	47 $\frac{2}{15}$.
60.	48. 32.	11. 28.	3. 14 $\frac{2}{15}$.	45 $\frac{13}{15}$.
75.	65. 35.	8. 25.	4. 22 $\frac{1}{3}$.	33 $\frac{2}{3}$.
90.	90. 0.	0. 0.	6. 0.	0.
105.	113. 25.	8. 25.	7. 33 $\frac{1}{3}$.	+ 33 $\frac{2}{3}$.
120.	131. 28.	11. 28.	8. 45 $\frac{13}{15}$.	+ 45 $\frac{13}{15}$.
123.° 13.′	135. 0.	11. 47.	9. 0.	47 $\frac{2}{15}$.
135.	145. 42.	10. 42.	9. 42 $\frac{4}{5}$.	42 $\frac{4}{5}$.
150.	157. 58.	7. 58.	10. 31 $\frac{13}{15}$.	31 $\frac{13}{15}$.
165.	169. 13.	4. 13.	11. 16 $\frac{13}{15}$.	16 $\frac{13}{15}$.

PROBLEMA V.

Determinare variationes fluxuum, quæ in loco quovis proposito pendent ex varia Solis, & Lunæ declinatione ab æquatore.

Sit in fig. 42. propositus locus L, & sit $LDVd$ sectio per eumdem locum, & Dd axem motus diurni facta. Sit etiam LOE angulus, quo Luna, aut Sol a plano æquatoris IOK distant, ac denique sit $ERgr$ sectio sphæroidis illius oblongæ, in quam fluida telluri affusa ob Solis, aut Lunæ vires conformari debent. Si differentia Ee semiaxium EO, RO ut antea vocetur B, erit in loco L altitudo fluxus $HL = B \,.\, \text{cos}.\, \overline{LOE}^2 = B \,.\, \text{cos}.\, \overline{LOI + IOE}^2$, si scilicet anguli LOI, IOE hinc inde ab æquatore ex partibus adversis jaceant

ceant. Producta autem HO in h, dum rotatione circa axem Dd concepta punctum I perveniet in K, & E in G, eruntque æquales anguli IOE, KOG, erit in V altitudo fluxus $Vh = B.\text{cos}.\overline{GOh}^2$ $= B.\text{cos}.\overline{LOI - IOE}^2$, eademque erit tunc temporis altitudo fluxus in loco H. Quare si sinus anguli IOE declinationis Lunæ, aut Solis æquatore vocetur M, cosinus autem N, & sint m sinus, & n cosinus anguli LOI latitudinis loci propositi, erit quæsita altitudo fluxus $B.\overline{Nn \mp Mm}^2$ superiore signo ad superiorem fluxum, & inferiore signo ad fluxum alium proxime subsequentem relato, eritque duorum fluxuum differentia $4B.MNmn = B.\text{sin}.2LOI.\text{sin}.2IOE$; atque erit denique altitudo media utriusque fluxus $B.\overline{N^2n^2 + M^2m^2}$ $= \overline{1 - m^2 + 2m^2M^2 - M^2}$.

COROLLARIA:

I. Primo igitur si anguli LOI, IOE ex partibus adversis jaceant, & sit utriusque summa LOE, prior fluxus minor erit posteriore, & contra posterior fluxus fiet minor si recta EO inter LO, & IO jaceat, & sit duorum angulorum differentia LOE. Hoc dato in locis septentrionalibus qui superiori Solis, aut Lunæ appulsui ad meridianum respondebit fluxus, scilicet diurnus fluxus, major erit nocturno dum Sol, aut Luna in septentrionalibus itidem signis Eclipticæ reperientur: & contra nocturnus fluxus major erit diurno dum Sol, aut Luna pervenient ad signa australia. Paribus autem declinationibus hinc inde positis eadem semper habebitur media altitudo fluxus $B(1 - m^2 + 2m^2M^2 - M^2)$.

II. Sub æquatore cum debeat accipi $m = 0$, $n = 1$, eadem erit fluxus utriusque altitudo $B.N^2$, ut etiam ex formulis aliis antecedentibus consequitur. Eadem pariter erit altitudo fluxus utriusque in loco quovis extra æquatorem posito si Sol, & Luna reperiantur sub æquatore, & fiat $M = 0$. Si latitudo loci sit 45°, & fiat $m^2 = \frac{1}{2}$, erit media altitudo fluxus $\frac{1}{2}B$ quicumque demum sit valor sinus M, hoc est pro qualibet Lunæ, & Solis distantia ab æquatore. Si latitudo loci sit minor 45°, & sit $m^2 < \frac{1}{2}$, erit $2m^2M^2 - M^2$

quantitas negativa, & altitudo media duorum fluxuum proxime se consequentium fiet maxima cum erit $M = o$, & Sol, ac Luna reperientur sub æquatore.

III. Si sit $M = m$, & $N = n$, hoc est si loci propositi latitudo æquetur declinationi Lunæ, & Solis, in eorumdem appulsu ad superiorem meridiani partem erit altitudo fluxus $B.\overline{N^2 - M^2}^2$ dum Sol, & Luna in signis australibus reperientur, & in appulsu ad inferiorem partem meridiani maxima habebitur altitudo fluxus $B.\ \overline{N^2 + M^2}^2 = B$. In hoc etiam casu si fuerit $N = M$, aut si universim fuerit $Nn = Mm$, hoc est si loci propositi distantia a polo exæquet Solis & Lunæ distantiam ab æquatore, unicus dumtaxat fluxus habebitur in inferiore quidem appulsu ad meridianum si australis sit declinatio Lunæ, & Solis, in superiore autem appulsu cum Sol, & Luna in signis Borealibus reperientur. Congruunt hæc omnia cum iis formulis, quas Bernoullius tradiderat Cap. X. de fluxu, & refluxu maris.

IV. Universim etiam erit maxima altitudo fluxus $B.\text{cos}.\ \overline{LOI - IOE}^2$ altitudo minima $B.\ \text{cos}.\ \overline{LOI + IOE}^2$, atque erit differentia duorum fluxuum proxime se consequentium $B.\ \text{sin}.\ 2LOI.\ \text{sin}.\ 2IOE$. Ita cum Brestii latitudo sit circiter $48^\circ\ 23'$ si Lunæ, ac Solis declinationem statuamus esse 20°, erit maximus fluxus $B.\ \text{cos}.\ \overline{28^\circ\ 23'}^2 = B \times 0.77425$, minimus fluxus $B.\ \text{cos}.\ \overline{68^\circ\ 23'}^2 = B \times 0.135715$; & differentia duorum fluxuum erit $B \times \overline{0.6383}$: & si statuamus conjunctis Solis, ac Lunæ viribus sub zona torrida elevari maria ad altitudinem usque pedum $6\frac{3}{4}$, pro ea Lunæ, ac Solis declinatione erit maximus fluxus Brestii pedum 5.22, fluxus minimus 0.91, atque erit ratio duorum fluxuum 5.7:1. Juxta observationes omnes, quas retulit Cassinus in Actis Parisiensis Academiæ anni 1714, circa Novilunia, & Plenilunia Solstitialia est maximus fluxus Brestii circiter pedum 15, & differentia fluxus maximi, & minimi est circiter unius pedis. Plimuthi, & Bristolii fluxuum differentia est etiam pedis $1\frac{1}{4}$.

V.

V. Qui igitur hæc omnia simul comparet bina simul phænomena inveniet, quæ ex formulis præcedentibus nulla habita inertiæ ratione deduci nequeunt: & quod maximus fluxus triplo fere illum excedat, qui Solis, ac Lunæ viribus respondet: & quod diurni, & nocturni fluxus differentia quadruplo fere sit minor quam quæ ob solas easdem vires haberetur. Cl. la Place phænomenon hujusmodi posterius Bernoullianæ fluxuum theoriæ, atque hypothesi exiguæ profunditatis maris adversari animadvertit. At quæ prioris phænomeni explicatio afferri potest eadem etiam phænomeno posteriori explicando inserviet. In quacumque autem profunditatis maris hypothesi non alia phænomeni prioris ratio videtur esse quam quod præconcepto motu undæ maris, ac reciprocis recursibus, ac littorum reflexionibus fere pedibus decem ferantur altius quam Solis, ac Lunæ virium æquilibrium postularet. Hoc dato vocari in dubium non posset amplius quod §. XI. Cap. X. subdidit Bernoullius diurni æstus vehementia adhuc noctu agitari aquas, & altius evehi, noctu autem deficientibus Solis, ac Lunæ viribus adhuc quidpiam subsequenti fluxui detrahi, atque ita binos æstus proxime se consequentes ad æqualitatem propius accedere. Ex iisdem principiis colligi facile, atque explicari poterit cur in Noviluniis, ac Pleniluniis æquinoctialibus, cum bini æstus noctu, & interdiu habiti æquales sint, iique superent altitudinem mediam aliorum fluxuum, ut in Coroll. II. notatum est, sint etiam majores fluxibus aliis omnibus qui in toto anni curriculo observari solent.

APPENDIX.

DE ATMOSPHÆRA SOLIS, ET PLANETARUM.

Igitur in hypothesi marium ad modicam altitudinem solido telluris nucleo affusorum, atque ita ad æquilibrium tendentium ut composita virium directio perpendicularis sit extimæ superficiei, ob naturalem autem inertiam ultra limites æquilibrii excurrentium,

æſtuum phænomena explicari poſſunt, quæ in mari ampliſſimo, ac libero obſervantur. Eamdem hypotheſim retinebimus cum deinde inquiremus quibus legibus mare, & atmoſphæra impreſſo circulari motu, & accedentibus Solis, ac Lunæ viribus ad æquilibrii ſtatum pervenerint, quæ motuum in mari libero, & in atmoſphæra omni inde exſurgentium analogia eſſe poſſit, quid ex iiſdem viribus poſſit repeti, quod ad afferendam rationem generalis venti ſub zona torrida ex oriente flantis conducat. In hiſce enim phænomenis non niſi qui denſior, & ſuperficiei terreſtri propior eſt aer, ſpectari debet. In alio autem phænomeno evolvendo, quod variationes altitudinis barometricæ vi Solis, ac Lunæ genitas reſpicit, totam ſimul atmoſphæram ad uſque extremos limites conſiderare neceſſe erit, atque ad pleniorem argumenti hujus tractationem præſtabit conſiderare, atque inquirere quæ ſpectato etiam motu rotationis, & viribus omnibus attractricibus, non in terreſtri atmoſphæra tantum, ſed inſuper in atmoſphæra Lunæ, & Solis, aliorumque Planetarum differentia altitudinum, & altitudinis cujuſque limites eſſe poſſint.

Et quidem Solem revolvi circa axem proprium Galilæus ex motu macularum, atmoſphæra autem ampliſſima circumdari Dominicus Caſſinus ex zodiacalis lucis phænomenis primum collegerat. Galilæus, cum ſuperficiem Solis pluribus quandoque maculis obſcurioribus conſpergi teleſcopii ſui ope comperiſſet, & macularum numerum, figuram, denſitatem continue variari, ut in levioribus exhalationum partibus debet contingere, maculas tamen omnes deprehendit communi motu ab occidente in orientem promoveri, & uno circiter lunari menſe ad priſtinum diſci locum reverti: quod fieri non poſſet niſi Sol ipſe, cui aut adhærent, aut ex quo aſſurgunt maculæ, ab occidente in orientem volveretur circa centrum, & ſingulas revolutiones ſingulis fere menſibus lunaribus abſolveret. Revolutionis tempus Caſſinus accurate definivit. Cum enim poſt $27^{d}\,12^{h}\,20'$ eamdem maculam ad eumdem diſci lunaris locum e Terra referri comperiſſet, eoque tempore medius motus Terræ a punctis æquinoctialibus ſit $27^{\circ}7'20''$, tempus idem minuendo in ratione $360^{\circ}:387^{\circ}7'20''$,

maculam,

maculam quamlibet circa Solem, & Solem circa se ipsum revolvi statuit tempore 25ᵈ 14ʰ 8ʹ. Positionem etiam æquatoris, & axis Solis inquisivit Cassinus: quod plures alios post ipsum Astronomos problema exercuit. Clariss. Kaestnerus accuratiorem methodum protulit, qua, datis tribus observationibus unius maculæ, elementa omnia motus Solis circa axem proprium determinari possunt. Statuit autem hujusmodi axem ad axem Eclipticæ inclinari angulo 6° 51ʹ, & æquatorem Solarem plano Eclipticæ occurrere in 2ˢ 4°28ʹ. Eulerus To. XII. Comment. Petropolitanæ Academiæ tribus observationibus problemati satisfieri animadvertit in ea tantum hypothesi quod maculæ adhæreant Solis superficiei, quo in casu exæquari deberent tempora, quibus maculæ apparent in disco Solis, atque ultra Solem occultantur. At cum ocultationis tempus plerumque majus sit, ac propterea supra Solis superficiem altius assurgant maculæ, ut mox videbimus, quatuor observationibus opus esse animadvertit Eulerus ut axis, & æquatoris Solaris locus accurate determinetur.

Hæc ipsa vaporum, atque exhalationum e Solari corpore assurgentium elevatio cum fluido aliquo ad modum atmosphæræ Solem circumdari manifeste indicet, latissime extendi atmosphæram ex Cometarum caudis, atque ex amplitudine luminis illius colligitur, quod anno 1683 a Cassino observatum est, quodque cum intra *Zodiacum* sit vividius, Zodiacale appellari solet. Cum enim lumen hujusmodi oriri nequeat nisi ex fluido aliquo subtilissimo, quod undique Solarem lucem reflectat, in plano æquatoris Solis nunquam gradibus 60, aut 50 minus excurrere videtur, & quandoque etiam amplius quam 100: adeoque semper ultra orbitam Mercurii, & Veneris, quæ plusquam gradibus 48 a Sole nunquam recedit, & quandoque etiam excurrit ultra orbitam Terræ, & Martis. Latitudine vero cum lumen illud intra 13, ac 20 gradus circa axem rotationis Solis contineatur, pro varia Solis ad horizontem obliquitate, & crepusculorum vi, & duratione observari solet diversimode: atque autumnali tempore ante ortum Solis, verno autem tempore post occasum vividius cernitur: quæ *Zodiacalis* lucis phænomena fuse jam a Cassino, & Mairano descripta habemus. In hac igitur Solari atmosphæra cum sem-

per

per Venus, & Mercurius, & quandoque etiam Luna, Mars, & Cometæ ad perihelium accedentes immergantur, particulas fluidi debent undique circa se rapere, & ad modum atmosphæræ alterius cohibere. In remotissimis autem aphelii locis atmosphæra Cometarum diutissime debet rigescere, & in reditu ad Solem explicare iterum se se, & in amplissimum capillitium illud abire, quod interiorem nucleum circumdat, & nuclei diametrum quandoque decuplo, & amplius superat. Tanta etiam caloris differentia in perihelio perculsæ rariores partes magis semper magisque expandi debent, quousque gravitatis specificæ defectu in solari ipsa atmosphæra altius avolent, & longiorem caudam exhibeant: & cum primo ad partes Soli oppositas, atque in eodem plano orbitæ a Cometis descriptæ dirigantur, progrediente capite ad Solem attrahi, atque ita incurvari debent, ut concavitatem partibus illis objiciant, ad quas motus omnis dirigitur.

Atmosphæra Lunæ cum satis rara, & variabilis esse debeat, ut in sideribus prope discum transeuntibus variationem figuræ, coloris, motus non nisi aliquando sensibilem exhibeat, qua in re tot, & tam variæ prodierunt Astronomorum observationes; manifeste tamen eclipseos tempore oculis omnium se se offert cum Sole obtecto, lucem undique reflectendo, phænomenon annuli discum lunarem circumambientis videndum præbet. Aliud lunaris atmosphæræ certissimum indicium, atque argumentum protulit D. Séjour in Actis Parisiensis Academiæ anni 1764, & 1765 cum solarium eclipsium observationibus ingeniose collatis inter se animadvertit conciliari posse omnes statuendo quod radii Solis prope marginem Lunæ transeuntes refractionem 4″ subeant accedendo ad lineam illam, quæ a centro Lunæ ad observatoris oculum ducitur: quæ cum author clarissimus phænomenis singulis aptaverit initii, finis eclipsium, maximæ obscurationis, distantiæ cornuum &c, uno simul argumento, & difractionem radiorum lucis, quæ juxta Newtoni experimenta in adversas partes deberet fieri, rejecit, & refractionem horizontalem Lunæ 2″ esse ostendit: quod lunarem atmosphæram millies fere rariorem esse indicat aere nostro, in quo refractio horizontalis est circiter $32\frac{1'}{3}$.

Mihi

Mihi autem videtur annulo illo lucido, quem in eclipsi totali Solis tot jam observatores circa Lunæ discum conspexerunt, lunarem atmosphæram observatorum oculis objici manifestissime. Annulus enim cum eousque in latitudinem pateat ut plusquam duodecimam partem lunaris diametri exæquet, ex inflexione, & difractione aliqua radiorum Solis prope marginem Lunæ transeuntium oriri nequit, ut suspicati olim fuerant Isleus, & Stancarius: nam vis quæ lucem deflectit a recto tramite, quæcumque sit, non nisi in minimis distantiis corporum se prodit. Contra longe amplior, & non Lunæ, sed Soli concentricus esset annulus, si, ut censuerat Cassinus, oriretur ex ipsa luce ab atmosphæra Solis ad nos reflexa. Annuli etiam phænomena ostendunt densiorem, & aquæ similem esse non posse atmosphæram Lunæ, in quam illabentes radii adeo inflectantur, ut plusquam dimidiam illustrent portionem disci, & adhuc annulum eclipsium solarium tempore obversum nobis exhibeant: in hac enim Clariss. Boscovichii hypothesi extremo lunari disco, ad quem radii oblique transeunt, similis esset annulus, & cum unum lunarem digitum Cassino, & Louvilleo, & binos etiam digitos latitudine exæquare celebri Ulloa visus sit, in singulis noviluniis deberet conspici. Annulus tamen non nisi totalis eclipseos tempore conspicitur, & nihil habet quod luci a lunari disco reflexæ assimiletur. Quæ a Dom. Ulloa die 24 Junii anni 1778, dum ab insulis Terzeriis ad Promontorium D. Vincentii iter faceret, habita est solaris eclipseos observatio in actis Berolinensibus anni ejusdem recensetur. Annulus ille lucidus quinque, aut sex secundis ante immersionem circa Lunam apparere cœpit, & Solis, ac Lunæ centris propius ad se accedentibus lucidior visus est, digitos binos latus, prope Lunam rubescens, in medio flavus, atque aurantius, & in extrema parte adhuc colorem flavum, sed multo clariorem referens, secundis autem quatuor, aut quinque ante emersionem disparuit.

Atmosphæra etiam aliqua Veneris globum circumdari in posteriore utroque Veneris per Solem transitu præcipue innotuit. In priore enim transitu diei 10 Junii anni 1761 D. D. Strömer, Wargentin, Mallet, Melanderhielm, aliique Sueci Astronomi agnoverunt interio-

rem

rem utrumque contactum Veneris in ingressu, & egressu fuisse paulo ampliorem, tanquam si discus Veneris ultra circularem formam exundans ligaminis cujusdam specie Solis limbo adhaesisset: atque insuper splendorem quemdam ante immersionem perfectam, & incoepta jam emersione Veneris disco affusum deprehenderunt, quam etiam speciem annuli D. de Chappe Tobolski, & Parisiis D.D. de Fouchy, & Ferrner observarunt. Die vero 3 Junii anni 1769 Melanderhielm, aliique plures Upsaliae, & Gadolinus Aboae, in Veneris ingressu, ante contactum interiorem, deprehenderunt Veneris discum nigra quadam fascicola Soli adhaesisse, quae etiam abrumpi saepius, iterumque coire momento temporis visa est. Variationes aliae, quae in disco Martis, Jovis, & Saturni distingui solent, simili modo indicant sua atmosphaera singulos circumdari. Quae enim in Martis disco maculae, ac zonae distinguuntur, cum diversis temporibus differant inter se loco, figura, & magnitudine, fluidum aliquod esse indicant, quod solidam Planetae massam circumdet. Simili modo Hugenius aliquam esse atmosphaeram Jovis ex varia, & irregulari macularum forma collegerat, quae modo magis modo minus distant a se invicem, & modo plures, modo pauciores sunt, quandoque binae, aut tres, quandoque etiam quinque, ut retulit Jacobus Cassinus in Actis anni 1735. Dominicus Cassinus in actis anni 1715 retulit Saturnum ansis destitutum telescopio pedum 114 ejusdem formae apparuisse, cujus Jupiter telescopio pedum 34 intueri solet, binis scilicet zonis sectus, rectilineis, & plano annuli parallelis, quae subsequentibus annis arctiores, curvae aliquantulum, & versus annulum convexae visae sunt, quandoque etiam in unicam zonam coaluerunt, saepe autem telescopiis distingui nequeunt. Aliquam esse atmosphaeram Jovis singulare illud phaenomenon certo indicat, quod a se observatum retulit celebris Wargentin in Vol. II. Novorum Actorum Upsaliensis Academiae. Optimo enim instrumento usus deprehendit umbram tertii Jovis Satellitis, qui prae aliis Satellitibus amplior, ac lucidior apparet, in Jovis discum projectam aliquando obscuriorem, plerumque ad modum lucidae faculae apparere. Hae enim variationes lucis non nisi ob variationem fluidi alicujus circumpositi haberi possunt. Maculae insu-

insuper quæ in disco Jovis ampliari Solis propinquitate, & augeri numero videntur, variationes siderum nonnunquam prope Martis discum transeuntium, analogia aliorum Planetarum confirmat quemque etiam Planetam superiorem fluido aliquo ad modum atmosphæræ circumdari. Videamus modo quæ atmosphæræ cujusque forma, & limites esse possint.

CAPUT TERTIUM.

DE LIMITIBUS, ET FIGURA ATMOSPHÆRÆ.

PROBLEMA VI.

Data differentia temporum, quibus videntur in disco Solis, atque occultantur solares maculæ, determinare altitudinem, ad quam usque supra Solis superficiem elevantur.

Sit in fig. 43. radius Solis *DA*, & *DL* radius circuli, quem macula describit circa Solem, atque ex oculo spectatoris *E* ducantur binæ *EA*, *EC*, quæ Solem tangant. Cum maculæ ad Solis discum referri nequeant nisi cum arcum *GF* binis tangentibus interceptum describere videntur, sit $m:n$ ratio arcus *GF* ad reliquum arcum *GHF*, quæ eadem erit ratio temporum, quibus in disco Solis videntur maculæ, atque ultra Solem occultantur. Erit $\frac{m-n}{m+n} . 360^\circ$ differentia duorum arcuum *GHF*, *GF*, quæ e Terra observari poterit: & cum revolutio macularum $27^d\ 12^h\ 20'$ absolvatur respectu Terræ, & fixarum respectu $25^d\ 14^h\ 8'$, ut in præcedente appendice notatum est; erit $\frac{m-n}{m+n} . 360^\circ . \frac{25^d\ 14^h\ 8'}{27^d\ 12^h\ 20'}$ differentia eorumdem arcuum, quæ ex Terra immobili observari posset. Quartam igitur partem differentiæ totius accipiendo erit arcus $FL = \frac{m-n}{m+n} . 90^\circ . \frac{25^d\ 14^h\ 8'}{27^d\ 12^h\ 20'}$: cumque ob maximam Solis distantiam anguli *EAD*, *ECD* proxime sint

recti, erit maculæ propositæ a superficie Solis distantia $AL =$ sin. vers. $\left(\frac{m - n}{m + n} . 90^{\circ} . \frac{25^{d}\, 14^{h}\, 8'}{27^{d}\, 12^{h}\, 20'}\right)$.

COROLLARIUM.

Cum maculæ illæ, quas anno 1676 Cassinus, anno 1684 Kirchius, Stannianus anno 1703, aliique aliis temporibus observarunt, diebus circiter 12 apparuerint in disco Solis, & circiter diebus 15 latuerint, fiet arcus LF circiter $9 \frac{1^{\circ}}{4}$, & sinus versus AL ad radium DL circuli a maculis descripti circa Solem se habebit circiter ut 13 : 1000, ad ipsum vero Solis radium DA ut 13 : 987, seu proxime ut 1 : 76, & si radio Solis tribuamus semidiametros terrestres 100, altitudo omnis, ad quam maculæ e superficie Solis avulsæ plerumque ascendent, erit circiter semid. $1 \frac{1}{3}$. Krafftius To. VII. Academiæ Petropolitanæ maculam unam commemoravit, cujus certa erat reversio, quæque apparuit diebus 13, & 14 dumtaxat latuit, quæque idcirco non nisi sexta semidiametri terrestris parte a Solis superficie distare poterat. Plures maculas, quæ dimidio fere revolutionis totius tempore conspicuæ fuerint, ipsique propterea adhæserint Solis superficiei, memoravit Keillius Lect. V. Astronomiæ, & Monnierius Cap. V. Institutionum. Ex tot iis maculis, quarum historiam contexerat Scheinerus, vix fuerit aliqua, quæ apparuerit diebus 12, plures quæ diebus $12 \frac{1}{2}$, 13, $13 \frac{1}{2}$ in Solis disco visæ sunt. Et cum in singulis hisce casibus maculæ ad extremum usque disci solaris marginem conspicuæ fuerint, nullum jam amplius dubitandi locum relinquunt quod ea temporum differentia aliunde quam ex varia macularum distantia a Solis superficie debeat repeti.

PROBLEMA VII.

Invenire limites altitudinis, ad quam usque atmosphæra cujusvis Planetæ extenditur.

In primis si requiratur qui limes Atmosphæræ Planetam aliquem circumambientis ob attractionem Planetæ alterius esse possit; sit $M : 1$ ratio massarum Planetæ utriusque, & eorumdem distantia vocetur, a

ac

ac prioris Planetæ radius accipiatur pro unitate. Erit $\frac{M}{x^2}$ particulæ cujusvis gravitas in istius centrum ad distantiam quamcumque x, & vis omnis, qua a centro distrahetur eadem particula actione Planetæ alterius, erit $\frac{1}{(a-x)^2} - \frac{1}{a^2}$. Binis igitur viribus inter se æquatis limes ultimus attractionis, ultra quem fluidum a priore Planeta in alium debet abripi, invenietur resoluta æquatione

$$x^4 - 2ax^3 + Ma^2 x^2 - 2Ma^3 x + Ma^4 = 0.$$

Deinde si requirantur limites densioris fluidi, quod a stratis omnibus inferioribus dato tempore in motum agi, & ad eamdem angularis motus rationem componi potest; sit $g : 1$ ratio gravitatis ad vim centrifugam sub æquatore Planetæ cujuslibet propositi, & ad distantiam quamcumque x gravitas sit $\frac{g}{x^2}$, vis autem centrifuga sit x. Binis viribus rursus æquatis limes alius, ultra quem vis centrifugæ excessu fluidi particulæ circa eumdem Planetam consistere amplius non poterunt, invenietur posito $x = g^{\frac{1}{3}}$.

Denique cum reassumptis formulis Probl. V. Lib. III. Vol. II., & posito $n = 2$, eruatur $\log. \frac{\pi}{D} = \frac{-rz}{A(r+z)}$, & logarithmis Briggianis sumptis esse debeat $\log. \frac{D}{\pi} = \frac{0.4343 \times rz}{A(r-z)}$, adeoque etiam

$$z = \frac{Ar. \log. \frac{D}{\pi}}{0.4343 \times r - A \log. \frac{D}{\pi}}$$

, si innotescat ad quem usque terminum fluidi particulæ ponderibus deficientibus expandi possint, & qui sit limes rationis densitatis in superficie Planetæ D ad ultimam atmosphæræ densitatem π, ac si innotescat insuper altitudo A atmosphæræ homogeneæ æquiponderantis, ac radius Planetæ r; dabitur etiam altitudo z, ad quam usque atmosphæra extendi poterit.

COROLLARIA.

I. Si in priore casu hujus problematis distantia x extremi limitis a centro Planetæ attrahentis præ duorum Planetarum distantia sit adeo exigua ut possit negligi altior potentia x^4, & si insuper massa Planetæ attrahentis M sit adeo exigua ut possint negligi producta Ma^2x^2, $2Ma^2x$, supererit $Ma^3 = 2x^3$, ac fiet $x = a\sqrt[3]{\frac{1}{2}M}$. Ita si mediocris distantia Terræ, & Lunæ statuatur semidiametrorum terrestrium 60, & sit ratio massarum 71 : 1, ac fiat $\frac{1}{2}M = \frac{1}{142}$ & radix cubica proxime sit $\frac{1}{5.2}$; erit semidiametrorum $11\frac{3}{5}$ distantia a Lunæ centro, ultra quam ob potiorem Terræ attractionem fluidum omne a Terra Lunam versus deberet distrahi. In aliis Planetis multo latiores essent atmosphærarum limites, qui exæquatis attractionibus respondent.

II. In altera vero problematis hujus formula si substitutis denominationibus Coroll. II. Probl. XI. Lib. II. gravitas sub Planetæ æquatore se habeat ad vim centrifugam ut $R^3 : T^2$, fiet $x = \frac{R}{T^{\frac{2}{3}}}$. Ita in Jove altitudo densioris atmosphæræ paulo ultra binos semidiametros Jovis consistet: in Sole autem esset limes hujusmodi semidiametrorum terrestrium $22918\left(\frac{25\frac{1}{2}}{365\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$. In terrestri æquatore cum gravitas ad vim centrifugam se habeat ut $288\frac{1}{2} : 1$, fiet limes ultimus aeris, qui ad eamdem diurni motus rationem componi potest, semidiametrorum terrestrium plus quam sex. In hisce autem altitudinibus longe rariores, subtilioresque atmosphæræ particulæ esse debent quam ut eamdem angularem velocitatem finito tempore a stratis inferioribus recipiant.

Quia

III. Quia mercurius in barometro ad altitudinem 28 pollicum ſuſpenſus, in antlia Pneumatica, ad trientem uſque unius lineæ poteſt deprimi, cumque ita aer omnibus artis ſubſidiis nonniſi millies circiter rarefiat, ubi ſtatuamus hunc eſſe extremæ rarefactionis limitem, atque in tertia problematis hujus formula fiat log. $\frac{D}{\pi} = 3$, & altitudo aeris homogenei mercurio ad 28 pollices ſuſpenſo æquipoderantis aſſumatur hexapedarum 4343, fiet $z = \frac{30000.}{1 - \frac{30000}{r}}$: ſcilicet paulo major erit hexapedis 30000 altitudo illa, ultra quam aeris denſitas propius ad ætherem accedet, & nulla amplius circa Terram atmoſphæra ſenſibilis ſupererit.

PROBLEMA VIII.

Dato quod vis centrifuga ſit directe ut diſtantia ab axe, gravitas autem reciproce ut quadratum diſtantiæ a centro, atmoſphæræ totius figuram ad ultimos uſque limites determinare.

Exhibeat $ADHB$ figuram atmoſphæræ nucleo ſolido $adhb$ circumfuſæ, fig. 37., ac ſit $QO = z$, $QL = x$, $QV = y$, $Oa = r$, atque in puncto quocumqe Q ſit gravitas $\frac{gr^2}{z^2}$, vis centrifuga $\frac{x}{r}$, atque ea vis centrifugæ portio, quæ opponitur gravitati, ſit $\frac{x^2}{rz}$. Cum ſit $\frac{x^2}{z^2} = \text{ſin.}\, QOD^2$, erit vis omnis quæ ex Q in O dirigetur $\frac{gr^2}{z^2} - \frac{z}{r} . \text{ſin.}\, QOD^2$: & cum atmoſphæræ totius altitudo ſit multo major radio nuclei, ſi circa nucleum cenſeamus æquilibrari columnas omnes æque ac ſi ad centrum uſque continuarentur; ſumma omnium virium in ſingulis columnis erit eadem, & poſito $DO = C$, erit $\frac{gr^2}{2r} + \frac{z^2}{z} . \text{ſin.}\, QOD^2 = \frac{gr^2}{C}$, ſive etiam $\frac{z^3}{2gr} . \text{ſin.}\, QOD^2 = \frac{x^2 z}{2gr} = \frac{r^2 z}{C} - r^2$. Eſt autem

z

$z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, atque in hypothesi vis centrifugæ proportionalis distantiæ ab axe rotationis esse debet $AO = rg^{\frac{1}{3}}$, ut etiam ex secunda parte antecedentis problematis colligitur: & posito $x = z = rg^{\frac{1}{3}}$ ex posteriore æquatione eruitur $C = DO = \frac{2}{3} rg^{\frac{1}{3}}$. His igitur factis substitutionibus habebimus $(3g^{\frac{2}{3}} r^2 - x^2)^2 (x^2 + y^2) = 4g^2 r^6$: inde autem radice extracta eruemus $y = \pm \sqrt{\left(\left(\frac{2gr^3}{3g^{\frac{2}{3}} r^2 - x^2} \right)^2 - x^2 \right)}$

COROLLARIA.

I. Cum igitur x^2 nunquam esse possit major quam $g^{\frac{2}{3}} r^2$, abscissæ cuilibet QL, sive, VO positivæ, ac negativæ utrimque binæ semiordinatæ respondebunt, quarum una positiva, altera erit negativa, & atmosphæra omnis non nisi ovalis alicujus in se redeuntis formam præseferet. In hac igitur solvendi problematis methodo cum extremorum limitum atmosphæræ, ubi æquilibrium gravitatis, & vis centrifugæ haberi debet, in definienda atmosphæræ figura habuerimus rationem, nulli jam amplius supersunt casus ramorum duplicium, aut excurrentium in infinitum, quos casus ex propria solutione erutos D. Mairan in Tractatu de Aurora Boreali enumeraverat. Neque aliæ prodibunt formulæ si, ut Eulerus contendebat, ratio etiam haberetur impulsionis radiorum luminis, cujus intensitas eamdem sequitur legem gravitatis, & vim omnem residuam in centrum exhiberet adhuc quadratis distantiarum reciproce proportionalem.

II. Erit autem extrema semiaxium proportio $rg^{\frac{1}{3}} : \frac{2}{3} rg^{\frac{1}{3}}$, sive $3:2$, & semiaxis utriusque quantitas non ex fluidi densitate, sed ex ratione tantum pendebit gravitatis, ac vis centrifugæ, atque ex illa ab axe distantia, in qua binæ vires æquari debent inter se. Quia ab

vero juxta corollarium secundum problematis antecedentis, iisdem viribus exæquatis longe major atmosphæræ altitudo, & raritas stratorum prodit quam ut æqualem angularem motum a stratis aliis inferioribus recipianr, patet easdem Mairani formulas utcumque correctas, reductasque ad physicam atmosphæræ theoriam nullibi conferre posse. Cum tamen aliquis semper motus continuo affrictu partium contiguarum ab inferioribus semper ad superiora strata transire debeat, cumque aucto motu, ac vi centrifuga imminui primo particularum pondus, ac denique particulas ipsas disperdi necesse sit, inde potius physica ratio deduci poterit earum omnium variationum, quæ in suprema atmosphæræ Solis regione observari solent, & quas in præcedente appendice indicavimus.

III. Scilicet si ultra orbitas Mercurii, & Veneris statuamus adhuc aliquem motum a superficie Solis, atque intermediis fluidi undique circumfusi stratis transire, atmosphæra Solis circa æquatorem latius se expandet, atque ob majorem differentiam semiaxium reflexis ad Terram radiis lenticularem potius quam sphæroidicam figuram referet. Hoc ipso etiam atmosphæræ densitas, ac vis luminis, paribus aliis circumstantiis, in suprema regione augebitur. At ubi eam vim centrifugam, quæ gravitatem superet, conceperint partes singulæ, huc illuc disperdentur, & zodiacale lumen coarctari videbitur quousque novo incremento motus, ac vis centrifugæ fluidum sub æquatore assurgat altius, atque ad polos hinc inde aut fiat depressior, aut aliunde reficiatur.

PROBLEMA IX.

Figuram atmosphæræ terrestris, quousque sensibilem habet densitatem, & semiaxium rationem determinare.

Cum præ toto telluris radio exigua sit altitudo, ad quam usque aeris densitas sensibilis esse definit, ut in Coroll. III. Probl. VII. jam dictum est, reassumi poterunt formulæ, quibus in Theor. II., & III. casum æquilibrii fluidorum ad modicam altitudinem nucleo solido, ac sphærico, vel sphæroidico circumfusorum determinavimus. Primo scilicet si atmosphæræ semiaxis minor vocetur C, & sit b differentia semiaxium Terræ, B vero differentia semiaxium atmosphæ-

ræ,

ræ, quæ ex motu diurno oritur, utraque autem ſatis exigua cenſeri poſſit, atque inſuper denſitas nuclei ſphæroidici ad denſitatem fluidi circumfuſi ſe habeat ut $\Delta + 1 : 1$, & ſit $\Delta = \omega - 1$; univerſim debebit eſſe

$$\frac{B}{C} = \frac{1}{2g} \cdot \frac{1+\Delta}{\frac{2}{5}+\Delta} + \frac{\frac{3}{5}\Delta b}{\frac{2}{5}C+\Delta C} = \frac{1}{2g} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{5\omega}} + \frac{3b}{5C} \cdot \frac{1-\frac{1}{\omega}}{1-\frac{3}{5\omega}}:$$

& ſi ob exiguam fluidi denſitatem negligatur fractio $\frac{1}{\omega}$, aut differentia denſitatis Δ cenſeatur infinita, fiet $\frac{B}{C} = \frac{1}{2g} + \frac{3b}{5C}$: ac denique ſi pro ratione $\frac{b}{C}$ aſſumamus quantitatem $\frac{5}{4g}$, quæ juxta Probl. XI. Lib. II. obſervationibus proxime reſpondet, fiet $\frac{B}{C} = \frac{5}{4g}$.

Quod ſi inſuper requiratur differentia ſemiaxium atmoſphæræ, quæ ex Solis, ac Lunæ actione oriri poteſt, iiſdemque ſervatis denominationibus Probl. X. Lib. II. ſit $g : P$ ratio gravitatis in ſuperficie Terræ ad vim perturbatricem, quæ in locis quadrante integro a Sole, & Luna diſſitis additur gravitati, atque ibi ſit reſidua vis in centrum $g + P$, in locis vero, quibus imminet Sol, & Luna, ſit $g - 2P$; juxta formulas alias Theor. III. libri hujus erit

$$\frac{B}{C} = \frac{3P}{2g} \cdot \frac{1+\Delta}{\frac{2}{5}+\Delta} + \frac{\frac{3}{5}\Delta b}{\frac{2}{5}C+\Delta C} = \frac{3P}{2g} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{5\omega}} + \frac{3b}{5C} \cdot \frac{1-\frac{1}{\omega}}{1-\frac{3}{5\omega}},$$

atque in caſu atmoſphæræ noſtræ erit $\frac{B}{C} = \frac{3P}{2g} + \frac{3b}{5C} = \frac{3P}{2g} + \frac{3}{4g}$.

COROLLARIA.

I. Ex priore formula $\frac{B}{C} = \frac{5}{4g}$ manifeſtum eſt ſphæroidem illam oblatam, in quam vis centrifugæ actione denſior atmoſphæræ pars con-

conformabitur, solidæ terræ esse similem, eamdemque haberi utrobique proportionem semiaxium. Ex altera vero formula consequitur in plano æquatoris, ubi non amplius spectanda est differentia semiaxium terrestrium $\frac{b}{C}$, differentiam semiaxium atmosphæræ esse dumtaxat $\frac{3P}{2g}$: in plano autem terrestris meridiani esse differentiam semiaxium atmosphæræ $\frac{3P}{2g} + \frac{3}{4g}$. Binis autem iisdem casibus diurni motus, & attractricium Solis, ac Lunæ virium simul compositis ostendi posset figuram atmosphæræ eam esse, quæ gigni posset si ellipsis circa majorem axem, qui ad Solem, atque ad Lunam dirigitur, sic volveretur, ut vertex minoris axis ellipsim aliam describeret: quod de terra etiam fluida in Coroll. IV. Theor. VI. Lib. II. jam dictum est.

II. Quia vero calculus omnis, & formula tertii Theorematis locum non habent nisi in iis casibus, in quibus differentiæ B, & b satis exiguæ statuantur singulæ, & differentiæ semiaxium atmosphæræ $\frac{B}{C}$ binæ sunt partes, quarum prior $\frac{3P}{2g}$ ex viribus perturbatricibus, altera $\frac{3b}{4g}$ ex differentia semiaxium nuclei pendet, & prior variationis pars eadem adhuc esset si interior nucleus esset sphæricus; pro variationibus, quæ ob Solis, ac Lunæ vires haberi possunt, quam proxime determinandis satis erit, aut variationes in plano æquatoris ortas considerare, aut Terram omnem considerare tanquam si proxime esset sphærica. Ita igitur assumi poterit differentia altitudinum atmosphæræ, quæ pendet ex Solis & Lunæ viribus, $B = \frac{3P.C}{2g}$, atque hinc inde recedendo a locis, quæ Soli, ac Lunæ subsunt, differentia altitudinum imminuetur in duplicata ratione cosinus angularium distantiarum, atque ad distantiam graduum 45 erit omnis differentia $\frac{3P.C}{4g}$.

III. Si loco C assumamus mediocrem Telluris radium, seu

circiter pedes Parisienses 19638051, atque ut in Coroll. I. Probl. X. Lib. II. vis gravitatis g in superficie Terræ ad vim perturbatricem P Solis se habeat ut 38604600:1; erit differentia altitudinum aeris homogenei $\frac{3P.C}{2g}$, quæ ob vim eamdem habebitur, linearum 110: & cum vis Solis sit ad vim Lunæ ut 2:5, erit differentia altitudinum vi Lunæ genita linearum 275, & viribus conjunctis fiet differentia omnis linearum 385. Quod si igitur pro mediocri altitudine aeris homogenei assumamus ut antea hexapedas 4343, seu lineas 3752352, differentia eadem erit pars altitudinis $\frac{1}{9746}$: & cum imminutio ponderis, quæ in singulis aeris particulis haberi debet ob junctas simul vires Lunæ, & Solis, sit totius ponderis pars $\frac{7}{2} \times \frac{1}{38604600}$; seu tantum $\frac{1}{11029889}$; manifestum est pondera columnarum aeris terrestri superficiei incumbentium non esse æqualia; atque imminutionem ponderis vi Solis, ac Lunæ genitam in singulis aeris particulis longe minorem esse incremento altitudinis, quod in atmosphæra omni ob illam æquilibrii legem inducitur, qua composita virium omnium directio esse debet superficiei fluidi perpendicularis.

IV. Qui igitur in locis omnibus, quæ Soli ac Lunæ subsunt, censuerunt minorem atmosphæræ pressionem, minoremque mercurii in barometris suspensi altitudinem esse oportere, ii minime consideraruntob easdem vires multo magis augeri altitudinem totius columnæ aereæ quam pondus in particulis singulis imminuatur. Et cum variatio ponderis præ variatione altitudinis tam sit exigua, poterit illa in calculo pressionis negligi, atque ita pressionis variatio supputanda erit, ac si manente eodem pondere columnæ aereæ 110 lineæ altitudinis ob vim Solis, & lineæ 275 ob vim Lunæ accederent. Scilicet si rationem densitatis aeris, & mercurii statuamus esse 1:11200, erit variatio altitudinis mercurii vi Solis genita sub æquatore $\frac{110}{11200}$, seu $\frac{1}{102}$ circiter unius lineæ, ut etiam Alembertus §. XXXV. Dissertationis de generali ventorum causa invenerat: atque esset $\frac{1}{41}$ circiter unius li-

næ

neæ variatio genita ob vim Lunæ, & omnis ſimul variatio $\frac{1}{29}$. Daniel Bernoullius Cap. VI. de æſtu maris variationem linearum 20 haberi oportere invenit in ea hypotheſi, quam atmoſphæræ noſtræ applicari non poſſe In appendice capitis primi jam adnotavimus, quod ſcilicet columnæ aeris ad centrum uſque continuatæ inter ſe omnes æquilibrentur: quodque in Probl. X. pro amplioribus tantum atmoſphæris aſſumptum fuit.

V. Hæ vero eſſent altitudines fluxuum atmoſphæræ, variationeſque altitudinis barometricæ ſecluſa inertiæ ratione, qua aquæ, & aeris particulæ ultra limites æquilibrii debent excurrere, majoreſque variationes exhibere. In Mari altitudinis incrementum majus quam in libero ſuperiore aere deberet eſſe, quod ob variam littorum poſitionem intumeſcentes aquæ copioſius reflectantur, & in anguſtioribus fretis accumulentur. Si tamen jam ſupputatæ variationes aeris in eadem ratione augeantur, qua in fretis anguſtioribus augetur altitudo fluxus, nulla unquam variatio altitudinis barometricæ diebus ſingulis ob Lunæ, ac Solis vires haberi poterit, quæ ſit ſenſibilis. Cl. la Place in Diſſertatione, quam memoravimus, conſiderata atmoſphæræ altitudine, & omnium aeris recurſuum ratione habita invenit diurnam variationem altitudinis barometricæ quadrantis unius lineæ eſſe poſſe ſub æquatore, & inde ad polos pergendo imminui, atque in latitudine graduum 40. adhuc quadruplo minorem fieri. Invenit etiam maximam atmoſphæræ, & Mercurii in barometris ſuſpenſi altitudinem non quidem in Lunæ, ac Solis appulſum ad meridianum, ſed potius in horam illam incidere, qua mare tefluit. At cum in hypotheſi exiguæ altitudinis, quæ juxta Coroll. III. Probl. VII. denſioris aeris præ toto telluris radio altitudo eſt, atque in eo caſu, quem Clairaut, & Alembert præcipue ſpectandum eſſe cenſuerant, vis compoſitæ ad ſuperficiem extimam perpendicularis, adeo exigua prodeat altitudinis variatio, hoc ipſo patet neque altioris aeris, ſubtilioriſque, neque recurſuum aeris denſioris ratione habita variationem ullam haberi poſſe, quæ obſervationibus barometricis poſſit detegi.

VI. Dum autem, quæ ſphærica intelligitur atmoſphæræ forma *abhd*, fig. 38., actione virium perturbatricium abit in ſphæroidem ob-

oblongam $ABHD$, invenietur facile in loco U invariatæ altitudinis esse oportere $UO = C + \frac{1}{3} B$. Nam si radius ad peripheriam se habeat ut $1 : p$, exæquatis soliditatibus sphæræ $\frac{2}{3} p . UO^3$, & sphæroidis oblongæ $\frac{2}{3} p . C^2 \overline{C + B}$, ob differentiam B exiguam eruetur $UO = \sqrt[3]{C^3 + C^2 B} = C + \frac{1}{3} B$: & cum differentiæ altitudinum AO, UO sint ut quadrata cosinus anguli AOU, posito $C + B . \overline{\text{cos.} AOU}^2 = C + \frac{1}{3} B$ eruetur cos. $AOU = \sqrt{\frac{1}{3}} = 0.5773$, & angulus AOU prodibit $54^\circ 44'$. Aer igitur in latitudine graduum 45 vi Lunæ, Solis supra altitudinem minimam C, & supra altitudinem mediam $C + \frac{1}{3} B$ assurget: & cum differentia ponderis in particulis singulis præ tota altitudinis differentia possit omnino negligi, ut in Corol. III. jam dictum est, accedentibus Solis, ac Lunæ viribus major fiet altitudo mercurii in barometris suspensi, eritque altitudinis incrementum proportionale viribus perturbatricibus $\frac{P}{g}$.

VII. Quod si itaque altitudinis barometricæ variatio vi Lunæ, ac Solis genita ullo modo ratione inertiæ, aut ob varios aeris recursus sensibilis posset evadere, haberetur altitudo major ubi vires majores essent: scilicet in perigæo Lunæ major fieret mercurii in barometris suspensi altitudo quam in Lunæ apogæo, & in oppositione, ac conjunctione, ubi simul conspirant vires, major esset altitudo mercurii quam in Lunæ, & Solis quadraturis. Quæ cum calculo etiam alia quavis ratione instituto semper conclusio haberi debeat, ut vix immutato pondere singularum particularum majores columnæ aereæ altitudines majoribus viribus respondeant, observationes omnes altitudinum barometricarum, quæ majorem altitudinem mediam in quadraturis Solis, & Lunæ videantur exhibere, quam in conjunctione, & oppositione, majoremque in apogæo quam in perigæo, eæ non confirmabunt jam sed evertent hypothesim sensibilis cujusvis actionis Lu-

Lunæ in atmosphæram, cum actionem omnem contrario ordine exhibeant quam esse debeat: omnes vero differentiæ hujusmodi exiguæ, quæ longa etiam observationum serie colligi, & variis Lunæ, ac Solis phasibus videantur respondere, exiguæ observationum, quæ simul omnes colliguntur, erroribus, & caussis aliis accidentalibus omnino tribuendæ erunt.

APPENDIX.

DE VARIATIONIBUS ALTITUDINIS BAROMETRICÆ, QUÆ SOLIS, AUT LUNÆ VI GIGNI POSSUNT.

Cum itaque Solis, ac Lunæ viribus adeo agitentur maria; nulla esse potest sensibilis atmosphæræ variatio, quæ ex iisdem viribus oriatur. Neque ullæ sunt satis certæ observationes, quæ pro vario Solis, ac Lunæ loco datam aliquam altitudinis columnæ aereæ, & mercurii in barometris suspensi differentiam exhibeant. Utique D. Lambertus observationibus annorum undecim Norimbergæ habitis altitudines mercurii in apogæo Lunæ majores plerumque invenit quam in perigæo, licet summam excessuum in priore casu invenerit majorem summa defectuum in casu altero. Observationibus etiam per annos 36 a celebri Poleno Patavii habitis, & post ipsius mortem per annos alios 12 continuatis, iisque inter se comparatis videtur colligi numerum excessuum altitudinis mediæ barometricæ in apogæo Lunæ ad numerum defectuum in perigæo se habuisse ut 31:17, mediam autem totius excessus quantitatem per annos omnes 48 distributam fuisse dimidiæ lineæ pedis Londinensis. Simili modo excessus altitudinis mediæ in quadraturis Lunæ cum Sole supra altitudinem mediam in conjunctionibus, oppositionibusque ex iisdem observationibus colligeretur sextæ partis unius lineæ: atque aliæ essent differentiæ altitudinum barometricarum Sole in signis borealibus, atque australibus constituto: & differentia altitudinis mediæ, dum

Sol

Sol in ſigno Cancri, aut Capricorni eſt, erueretur quartæ partis unius lineæ. At qui attente obſervationes hujuſmodi conſideret, & ſeries mediorum omnium exceſſuum, ac defectuum, ex quibus media illa exſurgit differentia, inter ſe comparet, nullo certo ordine exceſſus illos, defectuſque ſe excipere inveniet, & nihil inde certo deduci poſſe. Ita ab anno 1725 ad annum 1732 differentia altitudinis barometricæ in apogæo, & perigæo Lunæ ſepties poſitiva, & ſemel negativa prodiit, eratque negativa hæc differentia — 1.67, poſitivarum ſumma 37.49, media ex omnibus + 4.5. Ab anno autem 1741 ad annum 1748 differentia quinquies negativa fuit, ter poſitiva, erantque binæ differentiarum ſummæ — 16.23, & + 8.48, ac media ex omnibus — 0.97. Id ſatis eſt ut pateat nihil certo ex iis omnibus obſervationibus poſſe colligi. At inſuper quantitates mediæ non ſatis accurate in Polenianis experimentis determinatæ cenſeri poſſunt. Conſtat enim altitudines barometricas nonniſi ſemel diebus ſingulis a Poleno adnotatas fuiſſe: quod ad quantitates medias determinandas minime ſufficit. Pro iis enim quantitatibus recte æſtimandis primo variationes altitudinis barometricæ adnotandæ eſſent omnino omnes, atque eſſet adnotandum tempus, quo variationes ſingulæ haberentur, & pro variatione media non quidem medium ex omnibus variationibus accipiendum eſſet, ſed quod prodiret medium per ſummam temporum dividendo ſummam productorum omnium variationis cujuſque, ac temporis. Cumque undique effectus cauſſis, obſervationeſque, ac phænomena generalibus naturæ legibus reſpondeant, minime dubitandum eſt quod ſi melioribus inſtrumentis, atque hac ipſa methodo variationes diurnæ, annuæ, periodicæ explorarentur, nulla altitudinis barometricæ æquatio exſurgeret, quæ Solis, ac Lunæ influxibus tribuenda eſſet. In opuſculis philoſophicis voluminis ſubſequentis conſiderationes phyſicas proferemus, quæ popularem opinionem ab Italis quibuſdam Philoſophis renovatam nunc temporis vanam omnino eſſe oſtendunt. Hoc in loco præcipuum renovatæ opinionis fundamentum evertendum erat. Jam enim perſpicue oſtenſum eſt quod ſi quidpiam ex Patavinis iis experimentis colligi poſſet, ſi differentiæ illæ exiguæ differentiarum omnium ſimul acceptarum exiguis erroribus obſervationum, & cauſſis aliis accidentalibus

libus

libus tribuendæ non esset, atmosphæræ, & barometri variationes contrario haberentur ordine quam qui spectatis Lunæ, ac Solis viribus haberi posset.

CAPUT QUARTUM.

DE MOTIBUS TOTIUS ATMOSPHÆRÆ, ET VIBRATIONIBUS PARTICULARUM AERIS.

PROBLEMA X.

Si fluidum nucleo sphærico circumfusum aut actione viriumperturbatricium, aut impresso motu rotationis in oblongam, oblatamve sphæroidem transeat, fluidi totius motum definire.

Sit in fig. 38. QO radius sphæræ, quæ Solis, aut Lunæ actione abit in sphæroidem oblongam $ABHD$, & sit ut antea $DO = C$, $AO = C + B$, sin. $COD = t$, $CO = C + B.t^2$, & quia sphæræ soliditas $\frac{2}{3}p.QO^3$ æquari debet soliditati oblongæ sphæroidis $\frac{2}{3}pC^2.\overline{C+B}$ fiet $QO = C + \frac{1}{3}B$, & $CQ = B.\overline{\frac{1}{3} - t^2}$. Sit insuper $\frac{Cdt}{\sqrt{(1 - t^2)}}$ elementum circularis arcus Qo, $pC.\sqrt{(1 - t^2)}$ peripheria, quæ describitur a puncto C circa axem AH revoluto; & elementum solidi, quod revolutione spatii $DCQd$ gignitur, fit $pB.(\frac{1}{3} - t^2).C^2dt$, solidum vero omne $\frac{1}{3}pB.C^2(t - t^3)$. Quia ob parvitatem virium perturbatricium, & sphæræ, ac sphæroidis affinitatem, dum sphæra $abhd$ in $ABHD$ abit, censeri poterit punctum Q in q transire, & rectam QR in qr; solidum illud, quod sphæræ deficiet, æquabitur solido revolutione spatii $CRrq$, aut $QRrq$ circa axem eumdem AH genito. At vero hujusmodi solidum æquale est pyramidi truncatæ, baseos $Qq.pC\sqrt{(1 - t^2)}$, altitudinis integræ QO, & differentiæ altitudinum RO: est scilicet idem solidum $\frac{1}{3}QO.\left(1 - \frac{RO^3}{QO^3}\right).Qq.pC.\sqrt{(1 - t^2)}$. Binis itaque soli-

dis

lis inter se æquatis erruetur spatium $Qq = \frac{B.C^{2}.t\sqrt{(1-t^{2})}}{C^{2}-RO^{2}}$.

Quod si ratione diurni motus sphæra in aliam sphæroidem abeat, quæ revolutione ellipseos $ABHD$ circa minorem axem DB gignitur, cum sit oblatæ sphæroidis soliditas $\frac{2}{3}\,pC.\overline{C+B}^{2}$, & sit $QO = C + \frac{2}{3}B$, & $CQ = B.(\frac{2}{3}-t^{2})$, erit elementum solidi revolutione spatii $DCQd$ circa axem db geniti $pB.(\frac{2}{3}-t^{2}).\frac{Ctdt}{\sqrt{(1-t^{2})}}$;

& solidum omne erit $\frac{1}{3}\,pC^{2}Bt^{2}.\sqrt{(1-t^{2})}$: quod cum æquari debeat solido $\frac{1}{3}\,QO.\left(1-\frac{RO^{3}}{QO^{3}}\right).Qq.pCt$ revolutione spatii $RQrq$ circa axem eumdem genito, eruetur similiter $Qq = \frac{B.C^{2}.t\sqrt{(1-t^{2})}}{C^{2}-RO^{2}}$.

COROLLARIA.

I. Si altitudo fluidi QR vocetur A, & præ toto nuclei solidi radio sit valde exigua, & sit quam proxime $RO^{2} = C^{2} - 3C^{2}A$, fiet in casu utroque oblongæ, atque oblatæ sphæroidis $Qq = \frac{B}{C}.\frac{t.\sqrt{(1-t^{2})}}{3A}$, atque ita spatium a particulis singulis percursum in data a minore axe distantia erit directe ut semiaxium differentia, & reciproce ut fluidi altitudo. At vero in casu oblatæ sphæroidis si gravitas ad vim centrifugam sub æquatore se habeat ut $g:1$, cum juxta præcedentes formulas esse debeat in maribus terræ solidæ circumfusis $\frac{B}{C} = \frac{5}{4g}$ circiter, & in atmosphæra $\frac{B}{C} = \frac{1}{2g}$; patet eamdem semiaxium differentiam, & spatium omne Qq non amplius ita exiguum, nec satis accuratam formulam posteriorem censeri posse.

II. In casu oblongæ sphæroidis cum differentia columnæ aereæ, quæ junctis Lunæ, ac Solis viribus respondet, per Coroll.IV. Probl.IX. sit

sit pedum $2\frac{3}{4}$, & tota altitudo aeris homogenei esse debeat pedum 850×32; erit $\frac{B}{3A} = \frac{1}{29673}$, & cum $t\sqrt{(1-t^2)}$ nunquam sit major $\frac{1}{2}$, ratio $Qq:C$ nunquam major erit ratione $1:59346$, & spatium omne Qq a particulis aeris percursum, dum Sole, & Luna a loco quovis proposito declinantibus, aliisque viribus agentibus redeunt ad æquilibrium, nunquam majus erit hexapedis 55. In mari spatium hujusmodi majus erit, & quod altitudo æstuantis maris sit major pedibus $6\frac{3}{4}$, & quod media aquarum profunditas minor esse debeat altitudine aeris homogenei.

III. Patet autem quod cum particulæ aquæ, aut aeris continua perturbatricium virium actione impellentur ex Q in q, & ex R in r, ibi minime quiescent, sed motu continue retardato ultra impellentur per spatium aliud priori æquale, ac postmodum redibunt ex r in R, pluresque oscillationes concipient eundo, & redeundo, quousque ob tenacitatem, & frictionem partium singularum oscillationes semper minores fiant, ac denique particula quævis R quiescat in loco r. Et quidem oscillationes illas, quæ ex vi centrifuga diurni motus similiter oriri poterant, jamdiu desiisse oportet, cum quæ ob varias Solis, ac Lunæ vires oriuntur, diebus singulis reverti debeant.

PROBLEMA XI.

Iisdem positis definire tempus, quo fluidum ex sphæra in oblongam sphæroidem transit.

Cum positis omnibus quæ antea sit $\frac{Qq}{C} = \frac{B}{3A} . t\sqrt{(1-t^2)}$, si fluidum a superficie sphæræ da recedendo in superficiem sphæroidicam $d'a'$ abire incipiat, & differentia semiaxium Oa', Od' sit $B-b$, eruetur similiter $\frac{Qq'}{C} = \frac{B-b}{3A} . t\sqrt{(1-t^2)}$, eritque $\frac{q'q}{C} = \frac{b}{3A} . t\sqrt{(1-t^2)}$. Jam vero cum in hypothesi nuclei sphærici vis perpendicularis axi in puncto q sit $\frac{6B.t}{5C} + (1+\Delta) . \frac{3Pt}{g}$

eaque in casu æquilibrii, juxta Theor. III., ad subtangentem $2B.t$ se habere debeat in constanti ratione $1+\Delta : C$, si vis perpendicularis axi in puncto q' esset $\frac{6(B-b).t}{5C}+(1+\Delta).\frac{3Pt}{g}-\frac{b}{B}.(1+\Delta).\frac{3Pt}{g}$, quarta scilicet proportionalis ad subtangentes binas $2Bt$, $2(B-b).t$, & priorem vim $\frac{6B.t}{5C}+(1+\Delta).\frac{3Pt}{g}$; esset pariter totum fluidum $d'a'$ in æquilibrio. Quare cum vis perpendicularis sit $\frac{6}{5C}.(B-b).t+(1-\Delta).\frac{2Pt}{g}$, erit $\frac{b}{B}(1+\Delta).\frac{3Pt}{g}$ vis, qua punctum q' nitetur longius ab axe db recedere, & quæ inde orietur vis perpendicularis radio ad centrum ducto erit $\frac{b}{B}.(1+\Delta).\frac{3Pt}{g}.\sqrt{(1-t^2)}$, proportionalis scilicet spatio $q'q$

Posito autem quod vis sit proportionalis distantiæ a puncto q, per Coroll. I. Theor. III. Lib. I., tempus, quo particula Q in q fertur, æquale erit tempori, quo circularis quadrans radii Qq ob vim centripetam $(1+\Delta).\frac{3Pt}{g}.\sqrt{(1-t^2)}$ describi posset. At per Coroll. I. Theor. II. tempus, quo quadrans circuli absolvitur, est ad tempus descensus per dimidium radium $\frac{1}{2}Qq$, eadem semper agente vi acceleratrice, ut $\frac{1}{4}p:1$. Insuper tempus descensus per $\frac{1}{2}Qq$ est ad tempus, quo spatium H eadem vi absolvi potest, ut $\sqrt{\frac{1}{2}Qq}:\sqrt{H}$, atque hujusmodi tempus est ad tempus T, quo spatium idem H constanti vi gravitatis absolvi potest, ut $\sqrt{(1+\Delta)}:\sqrt{\left(1+\Delta.\frac{3Pt}{g}.\sqrt{1-t^2}\right)}$. Compositis igitur rationibus erit tempus totius transitus ex Q in $q=$ $\frac{pT.\sqrt{Qq}.(1+\Delta)}{4\sqrt{2H}.\sqrt{\left(1+\Delta.\frac{3Pt}{g}.\sqrt{1-t^2}\right)}}$, & cum sit $Qq=\frac{B.C.t.\sqrt{1-t^2}}{3A}$,

&

& $B = \frac{3P.C}{2g} \cdot \frac{1+\Delta}{\frac{2}{5}+\Delta}$, reductis terminis fiet tempus quæsitum

$$\frac{pT.C}{8\sqrt{3A.H}} \cdot \sqrt{\left(\frac{1+\Delta}{\frac{2}{5}+\Delta}\right)}.$$

COROLLARIA.

I. Tempus igitur, quo particulæ aut aquæ, aut aeris ob vires Lunæ, & Solis ex sphæra in sphæroidem oblongam abire possent, erit directe ut $\sqrt{\left(\frac{1+\Delta}{\frac{2}{5}+\Delta}\right)}$, & reciproce in ratione subduplicata altitudinis maris, aut atmosphæræ: & data altitudine, dataque ratione densitatum, etiam si vis perturbatrix P major, aut minor fiat, & alia evadat ipsius ratio ad gravitatem, semper idem manebit tempus totius transitus ex Q in q, & omnes fluidi ejusdem oscillationes erunt æquidiuturnæ: ut etiam ex eo facile colligitur quod vires acceleratrices in punctis quibuslibet Q, q' sint semper spatiis Qq, $q'q$ proportionales.

II. Si fiat $\Delta = 0$, hoc est si fluidum nucleo sphærico circumfusum sit ipsi nucleo homogeneum, erit tempus quæsitum $\frac{pT.C}{8\sqrt{\frac{6}{5}A.H}}$; & contra si fluidum sit adeo rarum ut ipsius densitas præ tota nuclei densitate negligi debeat, erit $\frac{pT.C}{8\sqrt{3A.H}}$ tempus, quo singulæ particulæ ferentur ex Q in q: integræ autem oscillationis tempus erit $\frac{pT.C}{4\sqrt{3A.H}}$: & tempora oscillationum in binis hisce hypothesibus fluidi aut homogenei, aut rarissimi inter se erunt directe ut $\sqrt{5}:\sqrt{2}$, & reciproce in ratione subduplicata altitudinis.

III. Si tempus T accipiatur minuti unius secundi, quo tempore spatium H uniformi vi gravitatis, & libero lapsu absolutum est hexapedarum $2\frac{1}{2}$ circiter, cum æquatoris terrestris ambitus assumi

possit hexaped. 20608920, & aeris homogenei altitudo A sit proxime hexap. $850 \times 5\frac{1}{3}$; tempus omne, quo aeris particulæ ferentur ex Q in q, prodibit circiter horarum quatuor. Quare si Sol, & Luna in dato semper loco consisterent, particulæ aeris alternatim excurrere inciperent in contrarias partes tempore horarum octo: & cum excursionis integræ spatium, per Coroll. II. Probl. X., nunquam sit majus hexapedis 110; velocitas hujus alterni motus, etiam initio, longe minor esse debuit velocitate illius venti, qui intra Tropicos ab oriente in occidentem continue spirat, quique 8 circiter, aut 10 pedes unius secundi tempore absolvit. Itaque ventus ille ex Solis, ac Lunæ actione repeti nequaquam poterit, ut etiam libri hujus initio ex lege variationum periodicarum orientalis ejusdem venti collegimus.

PROBLEMA XII.

Si aliquot medii elastici particulæ impulsu aliquo comprimantur primum, ac deinde se expandant, & particulas alias propiores comprimendo ad remotiores etiam eodem ordine motum transferant, & data sit medii densitas, atque elasticitas, invenire pulsuum velocitatem.

Sit BC filamentum aliquod medii elastici, fig. 44., quod impellatur utcumque in B, condenseturque usque ad C, ac se expandendo rursus eadem vi, qua fuerat compressum, succedentes alias particulas similiter in motum agat, & pulsum alterum excitet priori æqualem. Sint E, F, G tria puncta medii quiescentis ad æquales distantias EF, FG sita, Ee, Ff, Gg minima spatia, per quæ impulsu accepto trasferuntur: $\varepsilon, \varphi, \gamma$ intermedia punctorum eorumdem loca. Si elasticitas particulæ cujusque sit in ratione inversa voluminis, atque altitudo media aeris homogenei pondere suo æquipollentis naturali elasticitati vocetur A; elasticitas particulæ EF in $\varepsilon\varphi$ traductæ erit $A \cdot \frac{EF}{\varepsilon\varphi}$, & elasticitas particulæ FG traductæ in $\varphi\gamma$ erit $A \cdot \frac{FG}{\varphi\gamma} = A \cdot \frac{EF}{\varphi\gamma}$, ac vis utriusque differentia, sive vis omnis motrix particulæ EF in loco φ erit $A \cdot EF \cdot \frac{\varphi\gamma - \varepsilon\varphi}{\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi}$, vis autem accelera-

ratrix $A \cdot \frac{\varphi\gamma - \varepsilon\varphi}{\varphi\gamma \cdot \varepsilon\varphi}$. Inſuper ſi ſpatium omne $E\varepsilon$ vocetur S, & elementum ipſius $\varepsilon\varphi$ ſit dS, ac $\varphi\gamma$ ſit $dS+ddS$; erit ddS differentia duorum elementorum ſpatii $\varphi\gamma$, $\varepsilon\varphi$ ſibi invicem ſuccedentium, atque omiſſis quantitatibus aliis inferiorum ordinum erit vis eadem acceleratrix $\frac{A \cdot ddS}{dS^2}$. Sunt autem vires acceleratrices directe ut velocitates genitæ, & reciproce ut tempora, quibus gignuntur: & velocitates ſunt directe ut ſpatia uniformiter percurſa, ac rurſus reciproce ut tempora. Quod ſi igitur ſit t tempus, quo pulſus omnis transfertur ex B in C, dt elementum temporis, quo ſpatium a pulſu abſolutum quantitate ddS, ob vim acceleratricem $\frac{A \cdot ddS}{dS^2}$, augeri uniformiter intelligitur, H ſpatium, quod ob conſtantem vim gravitatis, tempore T, & motu uniformiter accelerato a quiete incipiendo abſolvi poſſet, & $2H$ ſpatium, quod eodem tempore velocitati ultimo acquiſitæ reſponderet; vis acceleratrix $\frac{A \cdot ddS}{dS^2}$ ad naturalem vim gravitatis ſe habebit ut $\frac{ddS}{dt^2} : \frac{2H}{T^2}$, & ſi gravitas ipſa exprimatur unitate fiet $\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{(2H \cdot A)}}{T}$; quæ ratio $dS{:}dt$ cum ſit conſtans, erit pulſuum velocitas $\frac{S}{t} = \frac{BC}{t} = \frac{\sqrt{(2H \cdot A)}}{T}$.

COROLLARIA.

I. Velocitas pulſuum erit in ratione ſubduplicata altitudinis fluidi homogenei pondere ſuo elaſticitati particulæ cujuſque æquipollentis, ſive etiam in ratione directa ſubduplicata elaſticitatis fluidi, & ſubduplicata reciproca denſitatis. Data autem elaſticitate, & denſitate, atque impulſus prioris quantitate utcumque aucta, vel imminuta, idem ſemper manebit tempus, quo excurret pulſus ex B in C, & particulæ EF, FG ferentur in ef, fg. Scilicet cum fluido in B compreſſo particulæ eædem accelerari primum uſque in O, ac deinde iiſdem gradibus retardari debeant; ſpatium omne EO, ſive

sive majus, sive minus sit, absolvetur semper eodem tempore: quod quidem cum esse nequeat nisi vires acceleratrices sint proportionales distantiis a medio vibrationis puncto O; pulsibus per fluidum elasticum propagatis, patet singulas fluidi particulas motu brevissimo euntes, & redeuntes accelerari, ac retardari pro lege oscillantis penduli.

II. Quia tempus T liberi descensus per altitudinem H est ad tempus descensus per $\frac{1}{2}F$ dimidiam longitudinem penduli cycloidalis secundis singulis oscillantis ut $\sqrt{H} : \sqrt{\frac{1}{2}F}$, & tempus descensus per dimidiam longitudinem penduli est ad tempus unius secundi, quo oscillatio integra absolvitur, ut $1 : \frac{1}{2}p$; erit $T = \frac{1''.\sqrt{H}}{\frac{1}{2}p.\sqrt{\frac{1}{2}F}}$, & $\frac{t}{BC} = \frac{1''}{\frac{1}{2}p.\sqrt{(A.F)}}$: ac si fiat ut $n1''$ ita spatium BC ad quartum, terminum, unius secundi tempore pulsus absolvet spatium $\frac{1}{2}p.\sqrt{(A.F)}$; ac denique cum sit $1''.\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{F}}$ tempus oscillationis penduli longitudinis A, & sit $1 : \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{F}} = \frac{1}{2}p.\sqrt{(A.F)} : \frac{1}{2}pA$, tempore unius oscillationis penduli hujusmodi pulsus absolvet spatium æquale semiperipheriæ circuli radio A descripti.

III. Si concipi posset aeris filamenta uniformiter in particulis singulis expandi, ac condensari, & puncto aliquo E in e translato, fig. 45., sit b terminus rarefactionis ex parte una, & c condensationis ex parte altera; fluidum bE in be expansum comprimi utrimque incipiet, & fluidum ec utrimque dilatari. Et cum satis exiguum sit spatium Ee, sectis be, ec bifariam in B, & C, ea erunt centra immobilia vibrationum fluidi: & si elasticitas naturalis ut antea vocetur A, erit vis fluidi compressi $A.\frac{1}{\frac{1}{2}ec}$, expansi vero $A.\frac{1}{\frac{1}{2}be}$, & differentia virium, seu vis omnis acceleratrix puncti e erit $\frac{1}{2}$

$\frac{\frac{1}{2} A . be - ec}{\frac{1}{4} be . ec}$, seu proxime, $4A . \frac{Ee}{bE^2}$, proportionalis scilicet distantiæ a puncto E. Adhuc itaque punctum e motu continue accelerato feretur ex e in E, ac deinde iisdem gradibus retardabitur usque in e', & vibrationes omnes hujusmodi ampliores, breviores que absolventur semper eodem tempore.

IV. In hac autem hypothesi tempus unius semioscillationis ex e in E æquale erit tempori, quo eadem aeris particula ob vim centripetam $4A . \frac{Ee}{bE^2}$ absolveret quadrantem circuli radio Ee descripti. Tempus hujusmodi est ad tempus descensus per dimidium radium $\frac{1}{2} Ee$ eadem vi acceleratrice geniti ut $\frac{1}{4} p : 1$. Tempus descensus ob vim $4A . \frac{Ee}{bE^2}$ est ad tempus descensus per idem spatium ob naturalem vim gravitatis ut $1 : \sqrt{\left(\frac{4A . Ee}{bE^2}\right)}$. Tempus descensus per $\frac{1}{2} Ee$ ob ipsam vim gravitatis est ad tempus descensus per $\frac{1}{2} F$ ut $\sqrt{Ee} : \sqrt{F}$, & tempus descensus per dimidiam longitudinem penduli cycloidalis est ad tempus integræ oscillationis ut $1 : \frac{1}{2} p$. Compositis igitur rationibus tempus reditus ex e in E erit ad tempus unius secundi ut $1 : \frac{4}{bE} . \sqrt{(A . F)}$: & cum fluidum utrimque æqualiter per spatia æqualia eE, ee' expandi debeat, & tempus reditus ex e in E æquale sit tempori, quo pulsus per filamentum alterum priori bE æquale propagatur; spatium uno secundo temporis absolutum erit $4 . \sqrt{(A . F)}$.

V. Si cum altitudo mercurii in barometro est pollicum Londinensium 29.5, seu Parisiensium 27.7, ratio densitatum aeris, & mercurii juxta Cotesium assumatur 1 : 11900, & sit altitudo aeris homogenei pedum Parisiensium 27469.2, longitudo autem penduli secundis singulis oscillantis assumatur pedum 3.06; juxta priorem formulam spatium uno secundo ab aeris pulsibus absolutum erit pedum

dum Parisiensium 911, & juxta posteriorem formulam pedum 1160. Cum igitur experimentis anno 1738 a D. D. de Thury, la Caille, & Maraldo institutis constet spatium uno secundo temporis a sono absolutum esse pedum 1038: & cum quæ elastico admiscentur fixi aeris particulæ, transfuso confestim motu propagationem soni celeriorem debeant efficere, quam quæ in fluido undique elastico supputaretur; phænomenis priorem formulam propius accedere censendum erit. Patet etiam posterioris formulæ hypothesim non satis medio elastico aptari posse, & in eodem filamento expanso utcumque, aut presso partes alias densiores aliis, rarioresque esse oportere, nec motum omnem perinde se habere, ac si corpus aliquod e binis elastris Be, Ce in B, & C fixis inniteretur.

APPENDIX.

DE PROPAGATIONE SONI.

IN Propos. XLVII., & IL. Lib. II. Newtonus bina theoremata proposuerat: pulsibus per medium elasticum propagatis particulas singulas accelerari, ac retardari pro lege oscillantis penduli: & spatium a sono confectum eunte, ac redeunte pendulo, cujus longitudo sit altitudo ipsa aeris homogenei, æquale esse peripheriæ circuli radio ejusdem longitudinis descripti. Prioris theorematis demostrationem suspectam habuerat Eulerus in thesibus Basileæ editis anno 1727, & Johannes Bernoullius in dissertatione, quæ anno 1736 Parisiense præmium obtinuit. Bernoullius etiam demonstrationem aliam substituit, quæ tamen motui unius corporis binis elastris utrimque innixi potius quam vibrationibus aereæ cujusvis fibræ aptari potest. Deinde anno 1740 in Commentariis ad secundum Newtoni librum Crameri animadversiones prodierunt, quibus ostenditur eamdem methodum demonstrandi, qua in priore theoremate usus fuerat Newtonus, ad falsam etiam, absurdamque conclusionem perducere. Ipsi vero Newtonianæ Philosophiæ Interpretes, Clariss. le Seur, & Jacquier, novam aliam utriusque theorematis demonstrationem, constructionemque exhibuerunt, ingeniosam undique, ac plane dignam summis Geometricis, ac Mathematicis. Eodem fe-

re

re tempore Euleri differtatio in lucem prodiit, quæ anno 1738 Parifienfe præmium retulerat, & in qua ad definiendam velocitatem pulfuum nova alia formula Newtonianæ fubftituebatur. Cl. Alembertius, Cap. IV. de Fluidis, memoratum Newtoni locum fortaffe totius operis difficiliorem, obfcurioremque effe dixit, atque in Bernoullii methodo non fatis patere animadvertit quod pulfu per datum fpatium propagato fibra alia excitari debeat priori æqualis: quod univerfim tamen ex ipfa medii elaftici conftitutione, atque indole deduci poffet, ut jam attigimus.

Hæc omnia cum primum confiderare cœpi, in Ephemeridibus Florentinis anni 1755 indicavi quod Newtonianæ demonftrationis vitium videretur. Scilicet Newtonus cum affumpfiffet particulas fingulas medii elaftici iifdem legibus agitari, quas in Propof. LII. Lib. I. pendulorum ofcillantium effe oftenderat, inveftigavit poftmodum quid ex hypothefi affumpta deberet confequi, invenitque acceleratrices vires particulæ cujuslibet diftantiis a medio vibrationis loco proportionales effe oportere: quæ cum bina fimul principia in unum recidant, cumque ofcillatio ad modum penduli haberi nequeat nifi acceleratrices vires fint fpatiis abfolvendis proportionales, ea demonftrandi ratio principii, ut vocant, petitio eft. In litteris etiam ad Illuftrem Comitem Jordanum Riccatum datis, poft editas Ephemerides, indicavi quibus aliis affumptis compreffionis, expanfionifque totius filamenti aerei hypothefibus pro abfoluta pulfuum velocitate eadem Euleri formula exfurgeret, fere ut in poftremis corollariis dictum eft. Curvam, cujus femiordinatæ fpatia a particulis aeris percurfa juxta eafdem hypothefes exprimerent, & quæ inde abfurda confequerentur, ingeniofa analyfi poftmodum expofuit Riccatus in Differt. IV, & V. Schediafmatis octavi de chordis elafticis, atque in Differtatione prima ex chordarum vibrantium analogia pro definienda velocitate aerei pulfus ipfam Newtoni formulam eruit. In differtatione autem fecunda fchediafmatis ejufdem feptimi Newtonianam demonftrationem a nota omni vindicare ftudui: vindicias autem ex eo derivavit author clariffimus quod in cafibus aliis fpatiorum fucceffive decrefcentium, & foni per fectores fphæricos effufi affumpta fimiliter hypothefi quod particulæ omnes vibrentur ad modum penduli, vires acceleratrices non prodeant

distantiæ a medio vibrationis loco proportionales, atque ita hypothesis se ipsam destruat. Non video autem quid hæc exempla, & hæ inductiones ad Newtonianam demonstrationem a dubiis omnibus exsolvendam conferant. In casu enim sectorum sphæricorum, spatiorumque decrescentium nec particulæ aeris vibrantur ad modum penduli, nec vires acceleratrices sunt spatiis percurrendis proportionales: & ubi etiam assumatur vibrationis legem in particulis ipsis, atque in pendulis oscillantibus eamdem esse, quæ aliæ problemati admiscentur conditiones vetant ne eadem eruatur ratio virium acceleratricium, & distantiarum a loco medio vibrationis. At contra in casu uniformis, & rectilineæ propagationis soni, & particulæ omnes vibrantur ad modum penduli, & vires acceleratrices sunt proportionales distantiis a loco medio: atque ad hæc duo principia demonstranda satis non est si primum assumatur loco hypotheseos, atque inde alterum colligatur.

In priore volumine Societatis Taurinensis, quod anno 1759 in lucem prodiit, Clarif. la Grange aliis adjectis in memorata Newtoni loca animadversionibus generalem, ingeniosamque theoriam exhibuit propagationis soni, vibrationisque chordarum elasticarum, & quidem conclusiones omnes, quæ legem effusionis soni respiciunt Newtonianis principiis conformes esse deprehendit, atque in volumine altero subsequente eadem adhuc theoremata haberi ostendit si ratio motuum in singulis aeris particulis alia quam Newtonus assumpserat curva exprimatur: ut generatim evenire solet quotiescumque & quod assumitur, & quod inde colligitur principium non nisi unum, atque idem est. Ego cum diu hæc omnia evolvissem, atque ordine inverso, & nulla alia assumpta vibrationum aerearum hypothesi primo inquisiissem quæ pulsuum velocitas esse debeat, deprehendi eamdem Newtoni formulam ex generalibus variabilis motus principiis directe colligi, ut in posteriore hoc problemate dictum est: ex illa autem formula manifeste colligi animadverti, quod primum Newtoni theorema erat, singulas aeris particulas ire, ac redire ad modum oscillantis penduli, ut in priore corollario problematis notatum est. Expositis autem legibus, quibus aer omnis, atque atmosphæra Solis, ac Lunæ actione in motum agitur, leges aliæ adjiciendæ erant, quibus singulæ aeris particulæ in locis suis possunt agitari.

LI-

LIBER QUARTUS.

DE THEORIA GEOMETRICA DIURNI MOTUS.

Diei solaris, sive ab ortu ad occasum, sive ab uno ad alterum occasum Solis, sive etiam a meridie supputati continuae variationes sunt, quae statis temporibus accurate redeunt, nec mediam unquam afficiunt diei totius quantitatem, quae in 24 horas divisa ad mensuram temporis assumitur: diei sidereae, quae $23^h\, 56'\, 4''$ continue absolvitur, ut jam antea notatum est, nullae unquam variationes observari ab Astronomis potuerunt, & num aliquae ob medii aetherei resistentiam, ob mutuam coelestium corporum attractionem, & physicas alias caussas induci possent a Berolinensi primum, ac deinde a Petropolitana Academia praemio proposito inquisitum est. Et primo quod ab ortu ad occasum Solis tempus elabitur, ac proprie diei habet nomen, ea de caussa protrahitur aliquantulum, quod radii Solis atmosphaeram Terrae subeuntes Terram versus deflectant a recto tramite, refrigantarque eo magis, quo densiora pervadunt atmosphaerae strata, & propiora terrestri superficiei; adhuc aliqui radii lucis ad nos perveniant dum Sol, & corpora alia coelestia infra horizontem aut vespere post occasum, aut mane ante ortum latent: & cum ex Bradley, aliorumque observationibus maximus refractionis angulus prope horizontem assumi possit minutorum 33, ac proxime quantitatem solaris diametri subtendat, fit quod totus Solis discus conspicitur mane supra horizontem quo tempore non nisi superior limbus vere pertingit ad horizontem. Ob successivam etiam lucis propagationem fit ut qui Solis, Lunae, aliorumque siderum locus videtur esse is vere non nisi ante octo minuta temporis locus fuerit, atque ita Sol octo minutis temporis oriri tardius, & tardius occidere videatur.

Qui vero ex Terrae illuminatione, atque ex claritate lucis vulgo aestimatur dies, protrahitur insuper ea de caussa, quod cum ob majorem Solis distantiam ab horizonte nulli aut directi, aut refracti ra-

radii ad oculos pervenire possunt, qui undique in atmosphætæ particulas incidendo ad oculos reflectuntur atmosphæram clariorem reddunt, & continuatam exhibent gradationem a noctis tenebris ad ad diurnam lucem. Censetur autem atmosphæræ illuminatio, quæ crepusculi habet nomen, incipere quando stellæ sexti ordinis videri desinunt mane, desinere cum apparere incipiunt stellæ quæ erant antea ob claritatem reflexi luminis inconspicuæ. Crepuscula incipere, ac desinere cum Sol 18° distat ab horizonte assumunt communiter Astronomi: Cassinus distantiam hujusmodi, quæ etiam dicitur arcus crepuscularis, graduum 15, Caillius quandoque 16° 38′, nunquam autem majorem 17° 13′ in mari libero esse invenit. Hoc autem dato ad supputandam durationem crepusculorum, pro diebus singulis, & pro latitudine quavis proposita supputandum erit quæ circuli diurni portio ab horizonte usque ad circulum alium horizonti parallelum, & gradibus 17, aut 18 inde dissitum trajiciatur: eaque portio erit major quo circulus diurni motus ad horizontem erit obliquior, ac major loci propositi distantia ab æquatore: atque ideo in locis ultra quadragesimum octavum latitudinis gradum positis circa æstivum solstitium, cum Sol plusquam gradibus duodeviginti infra horizontem minime descendit, aer habebitur semper clarescens, & crepuscula ad totam noctem protrahentur. Generatim vero ex illa circuli diurni parte supputari poterit tempus, & tabulæ durationis crepusculorum pro loco quovis proposito exhiberi poterunt.

Alias inter hujus generis investigationes celebre fuit olim Problema determinandi diem brevissimi crepusculi: quod problema ut primum a Joanne Bernoullio solutum fuerat, sola trianguli sphærici resolutione ab Hopitalio, Keillio, aliisque passim authoribus ad simplicissimam illam analogiam deductum est, quod sinus totus est ad tangentem dimidii arcus crepuscularis ut sinus latitudinis loci propositi ad sinum declinationis, quam Sol ex adversa æquatoris parte habere debet ut in loco dato brevissimum sit crepusculum: atque ita si dimidius arcus crepuscularis statuatur $8° 36 \frac{1'}{2}$, & latitudo nostra assumatur 45° 28′, ex ea analogia colligetur brevissimum crepusculum haberi Mediolani cum latitudo Australis Solis est $6° 13 \frac{1'}{2}$, cujus quidem latitudinis tempus incidit intra diem quartam, & quintam Mar-

tii

tii, atque intra octavam, & nonam Octobris. Singularis est etiam Kepleri methodus altitudinis aeris ex duratione crepusculorum metiendæ. Et quidem Kepleri calculus ex numeris antecedentibus sic posset corrigi. Nam si in fig. 46. sit centrum Terræ *C*, horizon aliquis *ABE*, et *SDBA* extremus radius, qui a Sole ad oculum in *A* pervenit; erit angulus *SBE* depressionis Solis infra horizontem æqualis angulo *ACD*, & dimidius angulus *ACB* ex Caillii observationibus assumi posset $8^\circ\, 36\frac{1'}{2}$, nisi radius *AB* a summitate atmosphæræ *A* reflexus ad Terram accedendo incurvaretur. Refractione autem fiet quod punctum quodcumque *O* ad locum *B* juxta rectam *AB* referatur, quæ semitam curvilineam radii in oculum illabentis tangit in puncto *A*, videaturque altius angulo *OLB*, qui circiter $33'$ prope horizontem assumi potest. Cum igitur angulus *OLB*, quem tangentes binæ intercipiunt, æqualis sit angulo *ACL*, erit residuus angulus *LCO* circiter $8^\circ\, 3\frac{1'}{2}$, eritque anguli secans 1.00997, & excessus secantis supra radium 997 partium centummillesimarum radii; unde si radius mediocris Terræ ut antea assumatur hexap. $3273008\frac{1}{2}$ prodibit atmosphæræ altitudo *OF* hexap. 32632, paulo scilicet major illa altitudine, in qua aer millies rarior deprehenditur, ut in Coroll. III. Probl. VII. antecedentis libri notatum est.

Verum & refractionis horizontalis quantitas non omnino accurate definiri potest, & terminus durationis crepusculorum maxime est incertus. Keillius in Lect. XX. Astronomiæ incertitudinem hujus limitis ex considerationibus physicis collegit: ex eo videlicet quod duratio crepusculorum pendeat ex altitudine, & vi reflexiva aeris, quæ dato etiam in loco continue variari debet: atque ideo fieri dixit quod cum æstate rarefactus aer sit altior, & diutius a Sole illustretur, crepuscula diutius protrahantur, quodque matutinum crepusculum brevius sit vespertino. At insuper prope extremum limitem, ubi languidior est quæ ab atmosphæra reflectitur solaris lux, nulla lucis mensura haberi potest, & ipsi, qui a diversis Astronomis, diversisque in locis observari potuerunt crepusculorum limites, adeo differunt inter se, & tanto magis incerta est vulgaris æstimatio diei, quæ a vividiore crepus-

pusculo incipit, & in crepusculum vividius desinit, plerumque semihora ante ortum Solis, & post occasum semihora altera solari diei adjecta. Idcirco quæ ad calculum crepusculorum, & tabulas extremi limitis pertinent fusius hoc in loco non explicamus. D. la Lande in priore Astronomiæ editione theoriam omnem crepusculorum ea etiam de caussa omiserat quod nullius usus in universa Astronomia esse possit. Commendari tamen præcipue, ac memorari debent qui Geometricam hujus theoriæ partem ætate hac nostra excoluerunt, atque in primis Leonardus Eulerus, qui Tom.XX. Commentariorum Petropolitanæ Academiæ simplicem, atque elegantem protulit solutionem Geometricam alterius problematis, cujus non nisi peculiarem casum exhibet Bernoullianum problema brevissimi crepusculi, in quo scilicet data latitudine alicujus loci, & propositis binis circulis horizonti parallelis, & dato intervallo dissitis a se invicem, inquiritur qua astri declinatione ab uno ad alium circulum brevissimo tempore astrum transire possit: & cum ordinariis calculi subsidiis non nisi prolixiorem haberi solutionem problematis monuerit Eulerus, altero etiam exemplo confirmavit, quod jam in scholio Cap. II. Lib. II. notatum est, synthesim sæpe sæpius & brevitate, & elegantia in resolvendis problematis analysi præstare.

Cum igitur solaris diei a matutino ad vespertinum crepusculum supputatæ adeo incerta sit æstimatio, accuratior institui potest calculus integræ diei, quæ ab uno ad alterum Solis occasum apud nos adhuc supputari solet. Et quidem ex prioribus cœlestis sphæræ notionibus manifestum est quod cum revolutio diurna absolvatur circa axem gradibus fere $66\frac{1}{2}$ inclinatum ad planum illud, in quo absolvitur revolutio annua circa Solem, & cum Sol diurno motu in circulis æquatori parallelis videatur ferri, Sole citra æquatorem posito plusquam dimidia circuli cujusvis portio, quæ arcus diurnus dicitur, supra horizontem locorum borealium eminere debet, minor hyberno tempore, & differentia diurni, ac nocturni arcus fieri debet continue major quo propius Sol ad utrumque tropicum accedit. Arcus cujusvis calculus pendet ex trianguli sphærici resolutione Nam si in fig. 47. sit dimidia horizontis pars *HSO*, meridiani *HMO*, & sit vertex loci *Z*, atque arcus semidiurnus *MS* sit parallelus æquatori

tori IN, latitudo loci ZE erit complementum diſtantiæ verticis a polo P, ductiſque aliis circulis maximis PS, ZS erit PS aſtri a polo diſtantia, ſeu complementum declinationis ME ſi & borealis locus, & declinatio borealis ſit: erit autem PS ſumma declinationis, & arcus graduum 90 ſi declinatio ſit auſtralis. Erit etiam ZS aſtri ad horizontem delati diſtantia a vertice, eaque per æquationes parallaxeos, & refractionis horizontalis debebit corrigi, quod & ratione refractionis ſideris locus appareat altior, & ratione parallaxeos, dum e ſuperficie Terræ obſervatur, humilior appareat quam ſi e centro Terræ conſpiceretur. Datis autem in triangulo rectangulo ZPS tribus lateribus innoteſcet angulus P, qui arcu ſemidiurno MS metitur, & dabitur etiam tempus, quo arcus ipſe deſcribitur, quoque Sol, vel ſidus aliud a Meridiano circulo ad horizontem pervenit.

Hac triangulorum correctione, & reſolutione conſtrui ſolent tabulæ arcuum ſemidiurnorum, & ortus, atque occaſus Solis, Lunæ, & aliorum Planetarum, & tempus occaſus Solis ad meridiem relatum differentiam horarum trium circiter cum dimidia ab hyberno ad æſtivum ſolſtitium in latitudine hac noſtra exhibet, tantaſque horologi Italici irregularitates continue gignit. Refractionis etiam ratione tempus occaſus, atque ortus Solis aliquantulum incertum eſt, nec ſiderum ad horizontem delatorum obſervationes ullæ inſtitui ſolent. Siderum per meridianum tranſeuntium accuratiores obſervationes ſunt, & licet diei Solaris ab uno ad alterum meridiem ſupputatæ adhuc aliquæ habeantur æquationes, eæ tamen & exiguæ ſunt ſingulæ, & accurate ad calculum reduci poſſunt. Æquationes hujuſmodi licet non recte Hipparchus olim determinaverit, recte indicavit tamen quibus ex cauſſis orirentur: ex quo ſcilicet cum motus diurnus Solis in circulis æquatori parallelis, annuus vero abſolvatur in plano Eclipticæ, nec æqualibus Eclipticæ partibus æquales in æquatore arcus reſpondent, nec arcus diebus ſingulis in Ecliptica percurſi æquales ſunt. Inde enim ſit quod meridiani terreſtris planum a meridie, atque a Sole digreſſum poſt quatuor angulos rectos circa axem diurnæ revolutionis abſolutos adhuc inæqualibus angulis pro varia Terræ diſtantia promoveri debeat ut Solem rurſus excipiat. Eſt autem motus medius apparens Solis in plano Eclipticæ diebus ſingulis $\frac{360^\circ}{365\frac{1}{4}} = 59'8.3''$, at-

atque in æſtivo ſolſtitio fit verus diurnus motus 57′ 11″, in ſolſtitio hyemali 1° 1′ 11″, & motuum differentia uſque ad 4′ excreſcit. Rurſus quæ differentia diurni, aut horarii motus in Ecliptica habetur, pro varia Solis, ac Terræ diſtantia ab interſectione Eclipticæ, & Æquatoris variæ arcuum differentiæ in Æquatore ipſo reſpondet: & cum anguli circa axem Terræ deſcripti Æquatoris arcubus metiantur, iique ſint proportionales temporibus ita quidem ut arcui graduum 15 unius horæ tempus reſpondeat, ex differentia arcuum æquatoris differentia temporum reverſionis Solis ad meridiani planum, & meridiei æquationes ſupputari poterunt.

Hæc in priore libri hujus problemate ſingillatim explicanda erunt quod in recentioribus etiam Aſtronomicis inſtitutionibus non ſatis perſpicue videantur explicata. Hæ vero æquationes ſunt diei ſolaris non ſidereæ, quæ 23ʰ 56′ 4″ ſemper abſolvitur: ſunt hæ variationes motus apparentis Solis circa Terram, non motus veri, quo una Terræ circa axem revolutio abſolvitur: variationeſque hujuſmodi cum aliquando poſitivæ ſint & aliquando negativæ, diverſis anni temporibus accurate ſe invicem compenſant. Inquirendum eſt igitur num cauſſa aliqua phyſica eſſe poſſit, quæ variationem aliquam gignat abſolutæ velocitatis, qua Terra circa axem volvitur, & num variatio hujuſmodi aliquando ſenſibilis eſſe poſſit. Et quidem ad internas cauſſas quod pertinet, conſiderare cœpi, quod alii authores minime attigegerant, interiores omnes telluris viciſſitudines non niſi ad accelerandum diurnum motum conferre poſſe. Corpora enim graviora, & ſolida ventorum, & aquarum vi e ſuperioribus locis avulſa, aut in cavernis ſubterraneis excuſſa, aut terræ motuum impetu ſoluta non niſi ad inferiora loca vi ponderis dilabi poſſunt, atque ab iis locis, in quibus rotationis circa axem conceptæ velocitas eſt major, tranſeundo ad loca alia centro propiora velocitatis exceſſu Terram omnem aliquo modo debebunt impellere, & circa axem ipſum accelerare. Idipſum haberi debet ſi actione corporum ponderoſiorum ſuperficiei terreſtri circumjacentium ſucceſſiva aliqua habeatur interioris nuclei compreſſio, qua totus telluris radius fiat minor. Et quidem rimæ omnes, quæ in cavernis marmoreis, & ſaxeis non ſolum, verum etiam in argilla, & terra non adhuc mota ampliſſimæ, ac frequentiſſi-

tissimæ occurrunt, quæque raro admodum obliquæ, ac fere semper perpendiculares sunt, ut D. Buffon copiose retulit Art. XVII. Historiæ Naturalis, successivam aliquam terræ solidæ compressionem, accelerationemque diurni motus videntur indicare. Fluida etiam Terræ pars dum attractione Lunæ, ac Solis in oblongam sphæroidem abit, majoremque axem, ac polum modo huc modo illuc ab æquatore ad Tropicos usque obvertit, variationem aliquam momenti, ac velocitatis rotatoriæ exhibere debet: variationis autem supputandæ principia in Probl. X., XI. Lib. II. antecedentis voluminis jam explicata sunt.

Quod si denique Terram omnem consideremus a Sole, ac Luna attrahi, & sphæroidis circa polos compressæ formam præseferre, & plano per polos ipsos, & corpus quodcumque attrahens traducto intelligamus secari Terram in binas partes orientalem, atque occidentalem inter se æquales, similes, & similiter respectu corporis attrahentis positas, patebit etiam duas partes æqualiter, & similiter in adversas partes debere impelli, ut quantum pars orientalis urgetur occidentem versus tantundem pars occidentalis orientem versus urgeatur, & nulla unquam ratione motus circa axem conceptus accelerari, aut retardari possit. Quod si etiam Terræ sphæroidicæ quamcumque massam alicubi superaddi intelligatur, cum ea æqualiter semper in adversas partes impelli debeat, dum continuato diurno motu æqualibus angulis a meridiano quovis proposito ad orientem, & occidentem distat, simili modo patebit vires in massam quamlibet, atque in terram omnem, cui plures massæ hujusmodi circumstent, exercitas integra diei periodo compensare se invicem, eamdemque revolutionis diurnæ velocitatem permanere. Cum igitur æquatoris, atque axis locum, intersectionesque æquatoris cum plano Eclipticæ, continue variari jam diu Astronomi observaverint, eumque variationum omnium hujusmodi periodum, ac quantitatem Geometræ ex theoria gravitatis collegerint, atque ex viribus a Sole, & Luna in materiam illam exercitis, quæ circa æquatorem Terræ ultra inscriptam sphæram redundat, ad velocitatem diurni motus quod pertinet dubium illud dumtaxat superesse posset num rotationis axis ab axe figuræ aliquando sensibiliter recedat, atque ad tuendam semper eamdem momenti quantitatem rotatoriæ velocitatis variationem aliquam gignat.

Antequam vero id expendamus, videamuſque quæ variationes æquatoris, & axis Terræ ex theoria gravitatis proficiſci poſſint, lectori breviter indicandæ ſunt variationes quæ Aſtronomicis obſervationibus diu innotuerunt. Referat $ANBn$, fig. 48., Terræ æquatorem, & CNn planum Eclipticæ, ac ſit communis duorum planorum interſectio, ſive nodorum linea Nn. Fiat motus apparens Solis juxta ordinem ſignorum ex N in A, & n: denotet N punctum æquinoctii verni, ſive aſcendentem nodum æquatoris, quo ſcilicet emenſo Sol ab æquatore boream verſus declinat: & ſit n punctum æquinoctii autumnalis, ſeu nodus deſcendens quo emenſo Sol latitudinem auſtralem habet. Obſervatum eſt puncta hujuſmodi æquinoctialia N, n contraria directione regredi in N', n': qui motus dicitur præceſſionis æquinoctiorum, quod ita Sol a punctis C, aut B viſus digredi ad puncta æquinoctialia citius revertitur, quam ſi eadem ſemper maneret eclipticæ, & æquatoris interſectio Nn. Regreſſionem mediam punctorum æquinoctialium in plano Eclipticæ Caillius, aliique Aſtronomi ſtatuerunt 50.3″: unde cum tempus reverſionis Solis ad eamdem fixam, ſive annus ſidereus ſit $365^d\,6^h\,9'\,13''$ ſatis proxime, & arcus 50.3″ abſolvatur tempore $20'\,25''$, ſit tempus reverſionis Solis ad æquinoctium, ſive annus æquinoctialis $365^d\,5^h\,48'\,48''$, ut prioris libri initio notatum eſt.

Ita vero regredientibus punctis æquinoctialibus, dataque inclinatione media eclipticæ ad æquatorem, manifeſtum eſt æquatoris axem circa axem eclipticæ duas conicas ſuperficies ſibi invicem in centro obverſas deſcribere, & æquatoris polum P, fig. 49., circa polum E eclipticæ 50.3″ annis ſingulis promoveri oportere ab oriente in occidentem: quo poſito ſtellæ fixæ in circulis ad eclipticam parallelis contrario ordine progedi videbuntur 50.3″ annis ſingulis, & longitudinem, quæ a prima interſectione eclipticæ, & æquatoris ſupputatur, majorem ſemper acquirere, atque integram revolutionem annis circiter $25663\,\frac{1}{3}$ abſolvere. Id ab Hipparchi uſque temporibus innotuit. Bradlejus Aſtronomorum noſtræ ætatis maximus, continuatis 20 annorum obſervationibus, æquationem quamdam apparentis fixarum motus detexit, quam nutationem poli, & axis Terræ appellavit, quam-

que

que 9″ circuli unius maximi maxima sui quantitate exæquare invenit, & eamdem periodum habere, qua revolutio nodorum lunaris orbitæ in plano eclipticæ absolvitur, scilicet annorum 18, ac circiter 7 mensium. Phænomenon hujusmodi Bradlejus in litteris ad Macclesfieldum datis anno 1747 descripsit. Machinius vero deprehendit qua hypothesi intra errorem 2″ variationibus omnibus phænomeni satisfiat. Centro *P*, quod locum medium poli æquatoris referat, & radio *PA*, qui exæquet 9″ circuli unius maximi, describatur circulus *ABCD*, intelligaturque is a vero æquatoris polo describi motu retrogrado, & regressioni nodorum lunaris orbitæ sic analogo, ut si *PF* sit colurus solstitiorum, *PL* vero colurus æquinoctiorum, æquatoris polus sit in *A* quando nodus ascendens lunaris orbitæ reperitur in primis arietis punctis *L*, ac deinde *B* sit polus quando ad prima Capricorni puncta *H* nodus pervenit, atque ita ille ad *C*, & *D* transeat dum iste fertur ad prima Libræ, & Cancri puncta *G*, & *F*. Animadvertit autem Bradlejus observationibus satisfieri accuratius si circulo *ABCD* substituatur ellipsis, cujus major axis *AC* in plano coluri solstitiorum jaceat, & sit 18″ circuli unius maximi, alter vero axis *BD* in plano coluri æquinoctiorum positus sit tantum 16″. Hæc omnia ex theoria gravitatis colligi, ac supputari debent.

CAPUT PRIMUM.

DE VELOCITATE ROTATIONIS TERRÆ.

PROBLEMA I.

Data variatione motus elliptici in plano eclipticæ definire æquationes solaris diei ab uno ad alterum meridiem supputati. Referat in fig. 50. arcus *AC* longitudinem, *AB* ascensionem rectam, *CB* declinationem Solis ab æquatore, & concipiamus triangulo sphærico *ABC* aliud triangulum *ADE* succedere, & binis arcubus

cubus CB, ED circulorum maximorum concurrentibus in polo æquatoris H concipiamus esse CF arcum circuli alterius maximi per C traducti perpendiculariter ad HCB. Erit BD arcus exiguus, qui in æquatore respondebit variationi exiguæ CE longitudinis AC. Jam vero cum arcus exigui BD, CF pro lineis rectis assumi possint, quæ ad axem Terræ subtendant æquales angulos, erit $BD:CF = 1:\text{sin.}\ HC = 1:\text{cos.}\ BC$. Tum per priores triangulorum sphæricorum, rectangulorumque analogias debebit esse

$\text{sin.}\ CE : \text{sin.}\ CF = 1 : \text{sin.}\ CEF = 1 : \text{sin.}\ ACB$

$1 : \text{sin.}\ ACB = \text{cos.}\ BC : \text{cos.}\ A$, adeoque erit

$\text{sin.}\ CE : \text{sin.}\ CF : = CE : CF = CE : BD . \text{cos.}\ BC = \text{cos.}\ BC : \text{cos.}\ A$.

Inde autem eruetur $BD . \text{cos.}\ BC^2 = CE . \text{cos.}\ A$, & si arcus BD, CE spectentur tanquam differentialia arcuum AB, AC erit $d.AB = \frac{d.AC.\text{cos.}\ A.}{\text{cos.}\ BC^2}$

COROLLARIA.

I. Ita igitur simplici trianguli sphærici consideratione demonstratum est, quod alii ex generalibus formulis differentialium sphæricorum solent colligere, quanam ratione scilicet variationes ascensionis rectæ ex variationibus longitudinis supputari possint, variationem ducendo in cosinum obliquitatis eclipticæ, & per quadratum cosinus declinationis Solis dividendo: & cum juxta Coroll. IV. Probl. V. Lib. I. æquatio centri Solis pro quolibet Solis loco in Ecliptica, atque ad diem quamlibet supputari possit, differentiam dierum duorum proxime se consequentium reducendo ad arcus æquatoris, eamque in tempus convertendo habebitur differentia medii, & veri temporis. Hisce principiis supputatæ jam, atque in singulis ephemeridibus evulgatæ sunt tabulæ æquationum, correctionumque omnium, quarum ratio in horologiis ad meridiem compositis haberi debet.

II. Quod si omnis æquatio temporis dividatur in binas partes, quarum una inæqualitati motus elliptici, altera inæqualitati reductionis arcuum eclipticæ, & æquatoris respondeat, cum maxima æquatio centri in apogæo, & perigæo habeatur Sole ad initium Cancri, & Capricorni delatis, ubi & longitudo simul, & ascensio recta est $90°$, si maxima æquatio centri statuatur $1° 55'$, eaque sic in tempus conver-

at-

tatur ut 15°una hora respondeat, erit hæc pars prior æquationis temporis 7′42″. Pars autem altera fiet maxima cum erit cof. BC^2 = cof. A, scilicet cum declinatio Solis erit 16° 43′, & longitudo circiter $46\frac{1°}{4}$: unde cum in triangulo ACB esse debeat 1 : cof. A = tang. AC : tang. AB, differentia arcuum AC, AB conversa in tempus exhibebit æquationem temporis 9′ 53.7″. Binæ hujusmodi æquationes unica tabula complecti solent, quam etiam D. la Lande exhibuit §. 980. Astronomiæ.

III. At conversione arcuum in tempus accurate facta animadvertendum est insuper quod cum motus medius apparens Solis diebus singulis sit 59′ 8.3″, & media Solis revolutio ab uno ad alterum meridiem sit 360° 59′ 8.3, si reversionis totius tempus in 24 horas dividatur, uni horæ non jam gradus 15 respondebunt, sed 15° 2′ 8″, quæ ratio horæ solaris mediæ in gradus convertendæ a Caillio primum proposita in tabulis solaribus anno 1758 editis, ab aliis fere omnibus astronomis recepta est, & ad extremas medii, ac veri temporis reductiones non prætereunda videtur esse. Quæ aliæ medii motus Terræ æquationes ex Jovis potissimum, ac Veneris actione ortæ inferius ad calculum deducentur æquationes alias exiguas mediæ solaris diei simili modo exhibere poterunt, posito semper
$d.AB.\text{cof.}BC^2 = d.AC.\text{cof.}A$.

PROBLEMA II.

Invenire variationes velocitatis diurni motus, quæ pendent ex oblonga fluidæ terræ forma, & ex varia majoris axis positione.

Sit in fig. 42. oblongæ sphæroidis sectio $RIrK$, & sit major axis IK, ac dum circa axem minorem Dd rotatur in æquatore sphæræ inscriptæ sit c velocitas rotationis, sit autem C velocitas dum rotatur circa axem quemcumque alium Rr. Positis omnibus quæ in Probl. X. Lib. II. voluminis secundi statuta sunt, si sphæræ inscriptæ radius sit 1, & b sit differentia semiaxis majoris, & minoris, ac sinus, anguli DOR, sive EOI vocetur m, universim erit $\frac{C-c}{c} = bm^2$. Quod si igitur oblonga sphærois ea sit, in quam Solis, ac Lunæ actione abit fluida telluris portio, & sit c motus horarius circa axem dum Sole, ac Luna positis sub æquatore minor sphæroidis axis

axis est ipse axis rotationis, sit autem C motus horarius dum Sole; ac Luna ab æquatore declinantibus angulo aliquo anguli sinus sit m; erit motus horarius mediocris circa centrum ad accelerationem horariam diurni motus in ea Solis, ac Lunæ declinatione ut $1 : bm^2$. Jam vero si π sit sinus inclinationis eclipticæ ad æquatorem, ζ sinus distantiæ Solis, & Lunæ a punctis æquinoctialibus, erit $1 : \pi = \zeta : m$. Itaque in transitu ab æquinoctiis ad solstitia acceleratio omnis diurni motus erit ad summam motuum omnium medioerium horariorum ut summa omnium $b\pi^2 \zeta^2$, quæ in toto quadrante circuli possunt accipi, ad summam totidem quadratorum radii, sive ut $b\pi^2 : 2$.

COROLLARIA.

I. Cum igitur sinus inclinationis eclipticæ ad æquatorem sit circiter $\frac{2}{5}$ radii, & radius mediocris Terræ assumi possit pedum 19638051, ubi insuper assumamus maria ob vim Solis elevari pedibus 2 sub æquatore, erit in Solis transitu ab æquinoctiis ad solstitia variatio omnis diurni motus $\dfrac{365 \frac{1^d}{4}}{25 \times 19638051} = 3''' \; 51^{iv}$: & si statuamus vi Lunæ maria ad pedes 6 elevari erit diurni motus variatio $\dfrac{29^d \, 12^h \, 43' \times 3}{25 \times 19638051}$, seu circiter minuti unius tertii. Clariss. Walmesley in Transact. Philos. anni 1758 dimidiam fere quantitatem variationis utriusque invenit quod in motu rotationis eamdem semper quantitatem motus servari assumpserit, cum eadem servari debeat quantitas momentorum, ut in corollario Problematis ejusdem decimi Lib. II. Vol. II. notatum est.

II. Hac autem ratione dum oblongæ sphæroidis culmen a plano æquatoris ad solstitialem circulum transibit quæ fluida est Terræ pars in solidas alias partes excurrendo orientem versus, ad eamdem servandam semper quantitatem momentorum diurni motus accelerationem aliquam gignet $3''' \; 51^{iv}$ ob vim Solis, & $1'''$ ob vim Lunæ: ac deinde ad æquatoris planum redeundo, excurrendoque occidentem versus contraria ratione accelerationem illam Terræ adimet, velocitatemque diurnæ revolutionis in gradum pristinum restituet. Quæ igitur variationes ex oblongæ sphæroidis forma oriri poterunt, eæ singu-

lis

lis Lunæ, & Solis ſemirevolutionibus redibunt; & poſt quartam revolutionis cujuſque partem, cum fient maximæ, nunquam ſenſibiles evadent. Antequam inquiramus num ex oblatæ ſphæroidis forma oriri poſſit variatio aliqua diurni motus examinandum erit quæ variationes in Terra etiam ſphærica ob ſolam materiæ quantitatem, quæ a locis ſuperioribus ad inferiora devehitur, proficiſcantur: atque ad ampliorem novi hujus problematis reſolutionem alia etiam problemata analoga hoc in loco expendenda erunt.

PROBLEMA III.

Si ſphæra ſolida circa aliquam diametrum revolvatur, & data diametro, dataque materiæ quantitate varietur denſitas in data aliqua ratione diſtantiæ ſtrati cujuſvis ſphærici a centro, invenire variationem velocitatis, qua circa diametrum eamdem revolvi perget.

Si uniformis denſitas ſphæræ exprimatur unitate, & velocitas rotationis ſub æquatore vocetur C, ac radius ſphæræ ſit R, iſque ad peripheriam ſe habeat ut $1:p$, juxta formulam Probl. IX. Lib. II. Vol. II. erit momentum ſphæræ integræ $\frac{4}{15}pR^4C$, atque idcirco momentum nuclei ſphærici radio z deſcripti circa centrum debebit eſſe $\frac{4}{15}pz^4.\frac{Cz}{R}$, & momentum ſtrati ſphærici altitudinis dz erit $\frac{4}{3}pz^3.\frac{Cdz}{R}$, æqualis ſcilicet quantitati materiæ $p2z^2dz$ ductæ in velocitatem maximam $\frac{Cz}{R}$, atque in duas tertias partes diſtantiæ z a centro. Simili modo ſi denſitas in exteriore ſuperficie evadat ω, & c velocitas rotationis ſub æquatore, atque in alia quavis diſtantia z a centro ſit denſitas $\frac{\omega z^n}{R^n}$, velocitas vero $\frac{cz}{R}$, invenietur momentum ſtrati cujuſvis ſphærici $\frac{4pc\omega z^{n+4}dz}{3R^{n+1}}$, momentum totius nuclei $\frac{4pc\omega z^{n+5}}{3.\overline{n+5}.R^{n+1}}$; momentum ſphæræ integræ $\frac{4pc\omega R^4}{3.\overline{n+5}}$: quod cum æquari debeat momento

to $\frac{4}{15}pR^4 C$ fiet $\frac{c}{C} = \frac{n+5}{5\omega}$. Jam vero cum in hypothesi eadem densitatis in strato quovis materiæ quantitas esse debeat ut volumen strati $2p\zeta^2 d\zeta$ ductum in densitatem $\frac{\omega\zeta^n}{R^n}$, erit in nucleo sphærico materiæ quantitas $\frac{2p\omega\zeta^{n+3}}{\overline{n+3}.R^n}$, atque in sphæra integra $\frac{2p\omega R^3}{n+3}$. Cum itaque, hæc eadem esse debeat massa $\frac{2}{3}pR^3$ sphæræ uniformiter densæ, fiet $\omega = 1+\frac{1}{3}n$, adeoque etiam

$$\frac{c}{C} = \frac{3.\overline{5+n}}{5.\overline{3+n}}, \ \& \ \frac{C-c}{C} = \frac{2n}{15+5n}.$$

COROLLARIUM.

Primo igitur si exponens n positivus sit, hoc est si densitas accedendo ad centrum minuatur, erit $C > c$, & velocitas rotationis minor erit quam quæ eadem vi imprimi posset sphæræ uniformiter densæ, æqualis massæ, & ejusdem radii. Deinde si exponens n negative accipiatur, & sit $n < 3$, hoc est si varietur densitas in ratione minore quam reciproca triplicata distantiæ, rotationis velocitas augebitur, ac fiet $\frac{c-C}{C} = \frac{2n}{5.\overline{3-n}}$. Posito autem $n = -3$ fiet $\frac{c-C}{C} = \frac{1}{0}$, & $\omega = 1+\frac{1}{3}n = 0$: scilicet materies omnis concipienda erit tamquam si in centrum coalesceret, & velocitas rotationis, quæ data vi excitari posset, maxima evaderet. Contra si n sit quantitas valde exigua censeri poterit $\frac{c-C}{C} = \frac{2}{15}n$, & variatio velocitatis erit ejusdem ordinis.

PROBLEMA IV.

Si strata singula sphæræ homogeneæ velocitatem datam circa diametrum aliquam conceperint, atque immutata lege densitatis data

data materiæ quantitas ab extima ſuperficie in locum ſtrati alterius tranſeat, invenire variationem velocitatis.

Si denſitas ſphæræ homogeneæ ut antea vocetur 1, & immutata lege denſitatis fiat ipſa in ſuperficie ſphæræ ω, & in diſtantia qualibet z a centro $\frac{\omega z^n}{R^n}$, erit denſitatis variatio $\frac{\omega z^n}{R^n} - 1$. Et ſi rotationis velocitas in æquatore ſphæræ homogeneæ vocetur C, atque ad diſtantiam z tota velocitas ſit $\frac{Cz}{R}$, & differentia velocitatis $C - \frac{Cz}{R}$, perinde erit ac ſi ſphæra omnis circa axem uniformiter revolvens, evaneſcente ad extimam ſuperficiem data materiæ quantitate, ad diſtantiam z a centro impellatur quantitate materiæ $\frac{\omega z^n}{R^n} - 1$, & velocitate $C - \frac{Cz}{R}$. At vero momentum ſtrati, cujus radius ſit z, volumen $2 p z^2 dz$, denſitas $\frac{\omega z^n}{R^n} - 1$, velocitas $C - \frac{Cz}{R}$ eodem quo antea modo invenietur

$$\tfrac{4}{3} p\, C dz \left(\frac{\omega z^{n+3}}{R^n} - \frac{\omega z^{n+4}}{R^{n+1}} + \frac{z^4}{R} - z^3 \right),$$

ſummiſque acceptis, ac poſito $z = R$ fiet ſumma momentorum omnium hujuſmodi in tota ſphæra $\tfrac{4}{3} p\, C R^4 . \left(\frac{\omega}{\overline{n+4} . \overline{n+5}} - \tfrac{1}{20} \right)$.

Quod ſi igitur ſit $C - c$ differentia velocitatis, quæ ob ictus hoſce omnes velociorum particularum unicuique ſtrato advenientium in æquatore ſphæræ induceretur, & juxta ſuperius Problema ſit $\frac{4}{3 . \overline{n+5}} p \omega R^4 . \overline{C - c}$ momentum ſphæræ totius, in qua velocitas ſub æquatore fiat $C - c$, & lex denſitatis $\frac{\omega z^n}{R^n}$; quia ſumma

momentorum omnium rotationis æquari debet momentis virium impressarum, exæquatis terminis fiet $\frac{C-c}{C} = \frac{1}{n+4} - \left(\frac{n+5}{20\omega}\right)$: atque, ob æqualem semper materiæ quantitatem, posito ut antea $\omega = \frac{n+3}{3}$, eruetur denique $\frac{C-c}{C} = \frac{-7n-3n^2}{20.\overline{n+3}.\overline{n+4}}$.

COROLLARIUM.

Quod si igitur exponens n satis parvus intelligatur, in primis censeri poterit $\frac{C-c}{C} = \frac{-7n}{20.\overline{12+7n}}$, ac deinde etiam $\frac{C-c}{C} = \frac{-7n}{240}$, & variationes velocitatis in hac hypothesi, & in hypothesi alia problematis antecedentis inter se erunt ut $7:32$. In hac etiam hypothesi, impresso jam rotationis motu, atque addensatis postmodum stratis omnibus inferioribus accessione particularum a superiore strato advenientium, posito utcumque exponente n positivo, aliqua semper habebitur acceleratio rotationis circa datam diametrum conceptæ.

PROBLEMA V.

Si sphæra omnis ad datam usque distantiam subsidat, comprimaturque, invenire variationem velocitatis, qua circa eamdem diametrum rotari perget.

Sit radius sphæræ R, radius nuclei invariabilis r, differentia utriusque a, eaque ad altitudinem b ita reduci intelligatur, ut radius strati cujuslibet intermedii $r + x$ subsidendo fiat $r + \frac{bx}{a}$. Sit etiam prior velocitas sub æquatore ad distantiam R a centro $= C$, ad distantiam $r + x = \left(\frac{r+x}{r+a}\right) C$, ad distantiam $r + \frac{bx}{a} = \frac{\left(r+\frac{bx}{a}\right)}{r+a} C$; & differentia utriusque fit $\frac{a-b}{r+a}.\frac{x}{a} C$. Hæc eadem erit velocitas, qua stratum quodlibet $2p.(r+x)^2.dx$ a distantia $r + \frac{x}{a}$

a centro ad diſtantiam $r+bx$ deveniendo ſphæram omnem urgebit: atque erit momentum ictus

$2p(r+x)^2 . dx . \frac{2}{3}\left(r + \frac{bx}{a}\right) . \frac{a-b}{r+a} . \frac{x}{a} . C$: acceptiſque de more ſummis, & a pro x ſubſtituta, evadet momentum ſtratorum omnium

$$\frac{4}{3} p . \frac{a-b}{r+a} . C . \left(\frac{1}{2} r^3 a + \frac{2}{3} r^2 a^2 + \frac{1}{4} r a^3 + \frac{1}{3} b r^2 a + \frac{1}{2} b r a^2 + \frac{1}{5} b a^3\right).$$

ac denique ſi $a-b$ ſit adeo exigua ut poſſit negligi ipſius productum in differentias alias altitudinum a, & b, fiet momentum omne $\frac{4}{3} pa\, C . \frac{a-b}{r+a} . \left(\frac{1}{2} r^3 + r^2 a + \frac{3}{4} r a^2 + \frac{1}{5} a^3\right)$. Hoc autem momentum cum exæquari debeat momento ſphæræ $\frac{4}{15} p . (r+b)^5 . \overline{c-C}$, neglectis pariter differentiis momentorum, quæ ex differentiis denſitatis in ſphæra ipſa ad modicam altitudinem compreſſa oriri poſſunt, & loco $r+a$, ſive etiam loco $r+b$ ſcribendo R, ac deinde poſito $a = R - r$, eruetur

$$\frac{c-C}{C} = 5a . \frac{a-b}{R^5} . \left(\frac{1}{2} r^3 + r^2 a + \frac{3}{4} r a^2 + \frac{1}{5} a^3\right)$$

$$= a . \frac{a-b}{R^5} . \left(R^2 . \overline{R + \frac{3}{4} r} + \frac{1}{2} r^2 . \overline{R + \frac{1}{2} r}\right).$$

COROLLARIA.

I. Si ſphæram omnem intelligamus eadem lege in ſtratis ſingulis comprimi ad centrum uſque, & in priore æquatione fiat $R = a$, & $r = 0$, prodibit $\frac{c-C}{C} = \frac{R-b}{R}$: quod ex ſe etiam manifeſtum eſt. Ubi enim ſingula ſphæræ ſtrata coarctentur, atque in data ſemper ratione propius accedant centro, manente in particulis omnibus abſoluta rotationis velocitate, atque ob proportionalitatem diſtantiarum motibus ſingulis ſe invicem non impedientibus, angularis velocitas augebitur in ratione inverſa radiorum.

II. Quod ſi e contra ſtatuamus ſphæram ab extima ſuperficie ad

eam usque altitudinem comprimi, quæ præ toto sphæræ radio exigua sit, atque in posteriore æquatione statui possit $R = r$, fiet $\frac{c - C}{C} = 5a \cdot \frac{a - b}{2R^2}$, atque ita si data sit ratio $c - C : C$ inveniri poterit per quam aliam altitudinem exiguam a superiora sphæræ alicujus strata ad altitudinem $a - b$ compressione reduci debeant ut habeatur proposita motus rotatorii acceleratio. Peculiares alios casus ex generali problematis hujus formula, atque ex formulis aliis duorum problematum præcedentium attentus lector facile colliget.

PROBLEMA VI.

Si stratum aliquod superius sphæræ homogeneæ, & circa diametrum aliquam revolutæ in locum aliquem inferiorem transeat, invenire variationem velocitatis.

Si stratum aliquod densitatis ω, altitudinis ϖ, & quantitatis materiæ $2pR^2 \omega\varpi$ ab extima superficie demptum ad distantiam z a centro transferri intelligatur, incurret in sphæram omnem velocitate $C - \frac{Cz}{R}$, & momento $\frac{4}{3} pR^2 \omega \varpi z \cdot \frac{R - z}{R} \cdot C$. Jam vero si terra quasi constricta, aut abrasa, fig. 51., stratum ACB in abc, & punctum quodvis F in f abire intelligatur, perinde erit ac si dempta ad extimam superficiem data materiæ quantitate, terra omnis ad distantiam Of, seu z a centro impelleretur momento $\frac{4}{3} pR^2 \omega\varpi z \cdot \frac{R - z}{R} \cdot C$, atque hac ipsa quantitate momentum omne rotationis augebitur. Quia igitur motu circa axem AB concepto rotationis velocitas in F, & f debet esse proportionalis distantiis OF, Of a centro O, si novæ rotationis velocitas in æquatore vocetur c, erit differentia momentorum sphæræ homogeneæ $\frac{4}{15} pR^5 \cdot \overline{c - C}$: cui si addatur momentum $\frac{4}{3} pR^2 \omega\varpi \cdot \frac{z^2 c}{R}$ strati $2pR^2 \omega\varpi$ ad distantiam z a centro advenientis, subducaturque momentum $\frac{4}{3} pR^2 \omega\varpi\, c$ strati ejusdem, quod in extima superficie sphæræ homogeneæ demitur, erit differentia omnis momento-

totum utriusque rotationis

$$\tfrac{4}{15}pR^5\,\overline{c - C} + \tfrac{4}{3}pR\omega\varpi\zeta^2 c - \tfrac{4}{3}pR^3\omega\varpi c = \tfrac{4}{3}pR^2\omega\varpi\zeta\,.\,\frac{R - \zeta}{R}\,.\,C,$$

atque inde eruetur $R^3 C + 5\omega\varpi\zeta\,.\,\overline{R - \zeta}\,.\,C = R^3 c - 5\omega\varpi\,\overline{R^2 - \zeta^2}\,.\,c$,

ac fiet $\frac{c - C}{C} = 5\omega\varpi\,.\left(\frac{R^2 + R\zeta - 2\zeta^2}{R^3 - 5\omega\varpi\,.\,\overline{R^2 - \zeta^2}}\right)$.

COROLLARIA.

I. Si fiat insuper $\zeta = R - b$, & differentia b distantiarum præ radio sphæræ R tam sit exigua, ut possint negligi altiores potestates ejusdem differentiæ, reductis terminis prodibit $\frac{c - C}{C} = \frac{5\omega\varpi b\,.\,\overline{3R - 2b}}{R^3 - 5\omega\varpi b\,.\,\overline{2R - b}}$, seu proxime $\frac{15\omega\varpi b}{R^2}$. Hac autem formula manifestum fiet ex iis omnibus variationibus, quæ in terrestri superficie observari solent, montium, & collium abrasione, dilapsu corporum ponderosiorum in inferiores telluris sinus, nullam oriri posse variationem sensibilem diurni motus. Nam si statuamus data aliqua annorum periodo terrestrem superficiem ad duos usque pedes abradi undique, eam vero materiæ quantitatem ad profunditatem pedum 1000 dilabi; erit omne, quod inde orietur incrementum velocitatis diurni motus $\frac{30000}{(19638051)^2}$.

II. Generatim autem cum solida, & ponderosiora corpora a superficie Terræ, atque a stratis superioribus ad inferiora centrum versus labendo diurnum motum aliqua semper ratione accelerent, cumque alia ejusdem generis corpora gradatim altius nequeant assurgere, quæ vero fluida aut compressione totius Terræ, aut accumulatione materiæ in fundo maris, ad altiorem libellam se se componere intelligantur, velocitatis diurnæ defectu excurrendo primum ad littora occidentalia, ac deinde ad orientalia refluendo, atque ictus hosce reciprocos continuando quousque ad æquilibrium redeant, diurnum motum nequeant afficere; patet interiores omnes globi vicissitudines non nisi ad augendam diurni motus velocitatem aliquo modo conferre

ferre posse. Hoc autem dato cum vis centrifuga augeri debeat in ratione duplicata velocitatis, cumque differentia semiaxium sphæroidis oblatæ, in quam fluida omnia terrestria ob diurnum motum, atque attractionem partium conformari debent, juxta formulam Probl. XI. Lib. II. sit vi centrifugæ proportionalis; non nisi altius circa æquatorem elevari maria, & circa polos successu temporis ad inferiorem libellam componi poterunt.

III. Cum igitur materie omni, quæ ab aquis fluentibus e devexa telluris superficie in fundum maris devehitur, depleri fundum, & marium superficiem se efferre altius necesse sit, duplicem jam caussam, ac rationem physicam habebimus altitudinis marium circa æquatorem continue auctæ: & cum maria septentrionalia ad inferiorem potius libellam successu temporis deprimi compertum sit, qui hæc omnia simul phænomena explicare velit, in primis considerare poterit num aliqua sit hypothesis superficiei terrestris a vetustissimis usque temporibus ad ætatem hanc usque nostram adeo abrasæ, aut totius terrestris globi adeo compressi, ut ob auctam velocitatem diurni motus, & vim centrifugam, ac differentiam semiaxium circa polos magis deprimatur marium superficies quam ob depletionem fundi elevari debeat. Et cum vis centrifuga, ac differentia semiaxium in majore ratione augeatur quam velocitas diurni motus, variatio altitudinis marium in iis etiam hypothesibus sensibilis esse poterit, quæ nullam omnino exhibeant variationem sensibilem diurni motus.

APPENDIX.

DE AUCTA, ET IMMINUTA MARIUM ALTITUDINE.

GEnerali littorum, maris potissimum Hadriatici, perlustratione innotuit mare alicubi patere latius quam antea, alicubi a littoribus recedere, ubique vero efferre se altius superficie. Ita, quæ Augusti temporibus urbs maritima, & Romanorum portus erat Ravenna, nunc tribus fere milliariis a mari distat: atque, ut ferunt

ferunt Zendrini observationes, littus omne Ravenna Anconam usque, longe etiam ab ostiis fluminum, in mare longius semper protendi pergit. Ex adverso autem Dalmatiæ littore quæ olim erant loca maritima nunc aquis maris alte insidentibus obruuntur. In toto Hetruriæ littore, ad Nili ostia, in Batavia omni, ac circa sinum Balticum continentis terræ prolatio in primis magna, & undique satis nota est. Oritur id non ex turbidis tantum fluminibus, quæ limum, & ponderosiora alia corpora hinc inde dejiciunt prope ostium, verum etiam ex ventorum directione, & tempestatum vi, quæ materiam avulsam e fundo maris alicubi ad littora devolvunt, quæque alicubi e contra abrasis littoribus undas sinunt latius excurrere.

Bina hæc phænomena cum eodem tempore diversis in locis haberi possint, cumque diversis temporibus eodem etiam in loco possint sibi invicem succedere, ut variationes totius maris inquirerent Manfredius, & Zendrinus maris superficiem ad loca quædam fixa, & immobilia referre cœperunt, collatisque observationibus deprehenderunt Hadriaticum mare se se altius efferre successu temporis, nec a quibusdam littoribus recedere nisi quia plus peculiares caussæ ad elationem eorum littorum quam generales ad elationem maris conducunt. Zendrinus observationem protulit Veneti fori, & porticus antiquissimæ, ubi ad arcendas æstuantes aquas pavimentum omne altius efferre oportuit, quam cum primo extructum fuerat: addiditque insuper subterraneum solum D. Marci extillantibus circum parietibus derelictum modo esse, cum nono sæculo publicis hominum conventibus patuerit. Manfredius absoluta libellatione pavimenta trium Ecclesiarum, quæ duodecim fere ab hinc sæculis Ravennæ extructa sunt, infra æstuantis maris superficiem ita deprimi agnovit, ut si adhuc mare urbem illam allueret, & aquæ maris, & pluviæ, nisi aggeribus inde arcerentur, undique illabi, & fœdare deberent omnia.

Hæc cum Manfredius in Commentariis Bononiensibus proposuisset, Hartsoekerus in cursu Physico edito Hagæ Comitum anno 1730, conjecturas quasdam adjecit, quæ Batavum mare, & Germanicum superficie similiter altius se se efferre indicarent. Primo enim visum est Hartsoekero præaltos aggeres, quibus mare a boreali, atque orientali Bataviæ parte coercetur, primum extrui in ipso maris undique effusi

susi sinu minime potuisse, nisi mare olim depressius superficie; quæ modo excisis aggeribus exundaret littora, non attigisset. Cumque insuper Hartsoekerus considerasset antiquos aggeres verticaliter erectos declivitate omni carere, conjecit ipsos non totos uno tempore, sed per partes, & temporum intervalla exstructos esse, prout elevatio superficiei maris per gradus singulos aucta est. Denique idem author eamdem attigit quam Manfredius rationem physicam altitudinis maris perpetuo auctæ, terram videlicet, & ponderosa alia corpora, quæ torrentes, ac flumina in mare perpetuo inferunt, & quibus subsidentibus maris fundum, adeoque etiam superficiem efferri altius necesse est. Et quidem Manfredius positis aliquot hypothesibus, ut quod marium superficies sit minor quam dupla superficies omnis terrarum, quod tertia fere pars aquæ e cœlo decidentis, & pollices 18 annis singulis exæquantis in mare ex alveis fluminum devehatur, quod aquæ fluentes partem circiter $\frac{1}{174}$ terræ admixtam habeant, invenit elationem maris pollicum quinque annis 348 censeri posse, & majorem adhuc evadere si glareæ, saxorumque a fluminibus provolutorum habeatur ratio. Eos elationis limites Manfredius observationi illi conformes deprehendit, qua retulit Zendrinus scabellum marmoreum, prope curiam D. Marci Venetiis, ineunte sæculo decimo sexto, navicularioruin frequentissime insilientium commodo extructum, nunc fere dimidio pede infra æstuantis maris superficiem jacere. Cum ibi ergo, & in amplioribus ædibus omnibus, quas memoravimus, nec disrupta alicubi pavimenta, nec ullum aliud vestigium sit, quod solum omne subsedisse indicet, toto eo tempore superficiei maris elatio dimidii, aut integri pedis censeri poterit ubi statuamus scabellum aut mari æstuanti, aut cimbarum lateribus, quæ dimido circiter pede supra aquam assurgunt, initio par fuisse.

Post illud tempus quæ in toto Mediterraneo mari adjectæ sunt observationes, in littoribus quibuscumque abrasis, protractisque, certam, ac generalem aquarum elevationem undique confirmarunt. Nam in Lucensi portu, & Comacli, & Romæ, atque in littore, & insulis Dalmatiæ deprehensum est ædium veterum pavimenta infra libellam maris consistere : quod in Spalatrensi æde Diocletiani, atque in ædibus

bus

bus aliis Tiberii in Caprensi insula observatorum curiositatem potissimum exercere solet. Huc etiam redeunt observationes, quas D. Maillet Alexandriæ, & Carthagine antea instituerat. Observationum omnium hujusmodi analogia, & ratio etiam limi, saxorumque maris fundo continue advenientium, in maribus undique communicantibus, & jam diu ad mediam æquilibrii libellam compositis, uniformem superficiei totius elationem indicare viderentur. At vero conjecturæ illæ, quas Hartsoekerus ex altitudine, & forma aggerum deprompserat, Baltici etiam, & Germanici maris elationem non satis indicant. In primis enim cum maximi aggeres mari ad boream objecti pedes 14, aut 15 altitudine exæquent, coercendis maximis æstibus præcipue inserviunt, & nunc etiam refluente mari, si exciderent, refici, ac rursus e continente terra excitari possent. Deinde cum ii aggeres interius saxis grandioribus insistant, satis ostendunt non eo consilio primum (veterum scilicet Romanorum temporibus) extructos fuisse ut multo minori æstuantis maris altitudini pares fierent, nec fuisse postmodum per gradus, & intervalla temporum ad eam, quam habent, molem deductos. Denique quod in aggeribus nonnullis, West-Frisiæ potissimum, crepidines superficiei maris fere ad angulos rectos insistant, id priorum hominum inscitiæ tribuit D. van Bleiswyk in sua de aggeribus dissertatione §. LXXXI. Ipse etiam diligens author cum memoravit quæ in ea regione, quæque in aliis Holandiæ, & Zelandiæ locis præcipue in pago *Ter Eeyde* ad aggeres reficiendos, muniendosque consilia capta sint, indicavit tamen aggeres intra antiquos altitudinis limites consistere. Quæstionem omnem in priore Harlemensis Academiæ volumine diremit D. Lulofs, cum accuratioribus præteriti, & præsentis sæculi libellationibus, aliisque 166 observationibus inter se collatis copiose ostendit maria Batavorum oras alluentia posterioribus saltem annis 80 se se altius non extulisse. Quibus si addamus Tacitum, Eumenem, Scriptores alios, quos nuper D. Vander Aa litteris humanissime ad me datis recensuit, palustres adeo, humilesque oras ipsas descripsisse, ut vix amplius nunc temporis dici possit; concludendum erit profecto, quod licet in globi totius primordiis, prioribusque revolutionibus aliæ fuerint marium subsidentium, vel altius assurgentium vicissitudines, ut ex concretionibus terrestribus, stratorum-

que ſupra, & infra mediam telluris ſuperficiem diſpoſitione, & indole colligunt Authores varii; maris Batavi tamen, ac Germanici ſuperficies ab aliquot jam ſæculis, ut in Mediterraneo mari, ſe ſe altius nequaquam extulit.

Singulare phænomenon Celſius Philoſophorum examini objecit eum Bononia, atque e Manfredii ſocietate in Sueciam redux, eadem methodo uſus, Oceano quidem prope urbem Bahus, mari autem Baltico undequaque ad ſigna quædam fixa, & ſtabilia ſimiliter relato, invenit mediam aquæ libellam, poſterioribus ſaltem ſæculis, humiliorem quàm antea factam eſſe. Eo enim mari, & ſinu præſertim Botnico perluſtrato obſervavit patere ſcopulos, quibus olim ſubtus aquas demerſis nautæ periclitabantur: quæ olim piſcatoria erant loca tam alte modo eminere ut non amplius piſcationis commodo inſerviant: atque inprimis ſcopulum quemdam, quo marini canes ad annum uſque 1680 abducebantur, anno poſtmodum 1731 digitis Suecicis 20 $\frac{1}{2}$ ſuperficie maris altiorem inventum eſſe. Loca etiam, quæ eodem anno prope urbem Gefle in ipſa maris libella Celſius diligentiſſime ſignaverat, annis 1745, & 1746 recognita D. Dalin partibus fere 0. 625 pedis unius Suecici elatiora evaſiſſe retulit. Quæ tamen quantitas & nimiam argueret aquarum depreſſionem, integri ſcilicet pedis pro ſingulis annis 24, & ex ſe adeo exigua eſt ut difficultati mediæ libellæ maris ſignandæ tribui aliqua ex parte poſſit. Minor aquarum omnium depreſſio colligeretur ex inſcriptione quadam prope Aſpò in lacu Meler, qui cum Baltico mari communicat, poſita, ut putant, quinque ab hinc ſæculis, & modo pedibus Suecicis fere 13 ſupra libellam maris elata. Minorem adhuc depreſſionem invenit D. Gadolin ex attenta, & multiplici Arcis Abo obſervatione. Suecicas omnes obſervationes ab anno uſque 1764 mecum per litteras D. Ferner communicaverat, qui omnes poſtmodum eleganter, ac fuſe expoſuit in ſermone ad Holmienſem Academiam conſcripto. Inde tam certo Baltici, & Bothnici in primis ſinus depreſſio colligitur, ac maris Hadriatici, & Mediterranei totius libellam elevari exploratum ſit. Pariter obſervationes aliæ, quæ ad boreales oras, extra ſinus eoſdem inſtitutæ

tæ sunt, totius etiam Oceani Borealis depressionem aliquam indicare viderentur. Qui ad hæc omnia explicanda integram Scandinaviam supra mare Balticum subterranei ignis vi altius elatam esse censuerunt viri clarissimi, minime consideraruut tam ampli tractus, tot urbium, tantorum montium elevationem sine maximo terræmotu, ac diutissimo, cujus vestigium nullum invenimus, fieri non potuisse, ac igne postmodum subterraneo aut per apertas telluris rimas, aut in marinis vorticibus exhalante, solum omne inæqualiter subsidere, & alicubi potius disjici oportuisse. Qui vero Oresundicum, & Gaditanum fretum Baltici, & Mediterranei maris veluti amplissimorum fluminum ostia ingeniose, ac subtiliter spectarunt, quibus varie obstructis, aut profundius effossis successu temporis aquarum omnium effluxus in oceanum diversimode pateret, & objecta veluti cataracta diversi generis aquæ ipsæ aut turgescerent, aut ad libellam inferiorem se se componerent, hypothesim protulerunt nec Geographiæ, nec Physicæ satis consonam. Gaditanum enim fretum, ubi est angustius, navibus etiam amplissimis per quinque millia passuum a veteri usque hominum memoria patuit: & qui sectionem freti Oresundici, binorumque aliorum sinuum, quibus intra insulas Daniæ mare Balticum cum Germanico libere communicat, cum iis omnibus fluminibus comparaverit, quæ ex Germania, & Scandinavia in Balticum mare decurrunt, facile intelliget neque anteacto tempore plus aquæ inde advenisse quam quæ e Baltico mari in Germanicum effundi poterat, neque unquam duorum marium communicationem non omnino liberam fuisse. Cum igitur maria inter se libere communicantia ad alicujus curvæ continuæ formam, atque ad libellam omnia componi debeant: cumque insuper sola fundi depletio generalem superficiei totius elevationem gignat, aquæ autem in terram conversio, ac imminutio voluminis, si quæ sit, non nisi exigua esse possit, nec nisi generalem marium depressionem possit exhibere; inquirenda erat ratio, ac caussa aliqua, quæ ad polos quidem depressionem aliquam ferat, in minoribus autem distantiis ab æquatore majorem potius altitudinem marium expostulet. Quod in problematis posterioribus explicavimus accelerati motus principium sensibilem aliquam depressionem ad polos in ea etiam hypothesi exhibere posset, in qua diurni motus acceleratio non adhuc evaderet

sensibilis: & licet terræ totius compressio, vel abrasio a vetustissimis temporibus ad ætatem hanc usque nostram minor fortasse videri possit quam quæ ad physicam explicationem phænomeni sufficiat, tradenda tamen erat Geometrica theoria accelerationis motus, quæ ex condensiatione sphæræ circa diametrum aliquam revolutæ consequitur.

CAPUT SECUNDUM.

DE AXE DIURNÆ ROTATIONIS.

PROBLEMA VII.

Si particulæ omnes sphæroidis solidæ $PBpb$, fig. 52., circa polos P, p compressæ, & accedentis proxime ad sphæram attrahantur a corpore alio satis dissito in productione rectæ ST posito, atque idcirco impellantur viribus proportionalibus distantiæ a plano Qq, quod transit per centrum T, & est rectæ ST perpendiculare; invenire momentum inde ortum ad sphæroidem omnem rotandam circa centrum T.

Designet IK planum circuli perpendiculariter ad axem minorem PTp secti, atque in ipsius perimetro accipiantur duæ particulæ L, l a plano STP æque dissitæ, ut si PTp designet planum aliud normale sit $LX = lX$. Ex L, & l in planum Qq demittantur perpendicula LM, lm, & sit P vis attractrix longinqui corporis in ea a plano distantia, quæ exprimatur unitate, & cum juxta Coroll. I. Probl. V. Lib. II. vis attractrix ad quamcumque aliam a plano distantiam esse debeat distantiæ LM proportionalis; sint $P.LM.MT$, & $P.lm.mT$ momenta duarum particularum L, l ad sphæroidem omnem in contrarias partes volvendam circa centrum T. Agatur per punctum X recta NXn plano Qq parallela, & in planum idem demittatur perpendiculum XY. Erit $LM.MT = LN.MT + MN.MT$, & $lm.mT = ln.mT - mn.mT$: & momentum duarum particularum ad sphæroidem omnem rotandam erit $P.LN.mM - P.MN.\overline{MT+mT}$ $= 2P.LN.XN - 2P.XY.YT$. Sint jam m sinus, & n cosinus

nus anguli pTq, five anguli STB, quem recta ST cum æquatore fphæroidis Bb efficit. Erit $XY = m.TX$, $TY = n.TX$, $XN = m.LX$, $LN = n.LX$, & fiet momentum idem $= 2mn.P.\overline{LX^2 - TX^2}$. His pofitis fi fit Ii latitudo annuli, quo fectio fphæroidis IK fectionem ik fphæræ infcriptæ fuperat, & fphærois ad fphæram ipfam proxime accedat, ita ut momentum particularum omnium I, i proxime idem cenferi poffit; elementum momenti circularis annuli habebitur momentum particularum per earumdem numerum multiplicando; five multiplicando $2mnP.Ii.\overline{LX^2 - TX^2}$ per elementum circularis peripheriæ. Eft vero fumma quadratorum omnium LX^2 ex finubus rectis in integro femicirculo confectorum $= \frac{1}{4}p.Xi^3$, & fumma totidem TX^2, five productum quadrati TX^2 in femiperipheriam circuli eft $= \frac{1}{2}p.Xi.TX^2$. Erit igitur momentum particularum omnium L, l, per totum circularem annulum extra fphæram fphæroidi infcriptam difpofitarum $= 2mnP.Ii.Xi.p\left(\frac{1}{4}Xi^2 - \frac{1}{2}TX^2\right)$, & fi fit ut antea $TA = C$, $BA = B$, $TX = x$, $Ii = \frac{B}{C}.Xi$, & $Xi^2 = C^2 - x^2$, evadet momentum annuli $mnP.\frac{B}{C}.p$

$$(C^2 - x^2)\left(\frac{1}{2}C^2 - \frac{3}{2}x^2\right) = mnP.\frac{B}{2C}.p\,(C^4 - 4C^2x^2 + 3x^4),$$

& momentum hemifphæroidis $= mnP.\frac{B}{2C}.p\left(C^5 - \frac{4}{3}C^5 + \frac{3}{5}C^5\right)$,

ac fphæroidis totius momentum $= \frac{4}{15}mnPB.C^4$.

COROLLARIA.

I. Quia fphæroidis oblatæ, & fphæræ infcriptæ foliditates funt inter fe ut $BT^2 : AT^2$, & foliditas fphæræ eft $\frac{2}{3}pC^3$; erit $\frac{2}{3}pC^3.\frac{\overline{BT^2 - AT^2}}{AT^2}$, feu $\frac{4}{3}pB.C^2$ materia omnis, qua fphærois

fphæ-

sphæram inscriptam superat, & momentum particularum totidem sitarum in loco B erit $= \frac{4}{3} p B . C^4 . P . B Z . Z T = \frac{4}{3} m n P p B . C^4$, quintuplo scilicet majus erit quam momentum earumdem particularum in locis suis circa sphæram sphæroidi inscriptam dispositarum.

II. Et quia summa omnium $BZ.ZT$, sive $m n . BZ^2$ per totum æquatoris Bb circuitum dimidia est quantitatum totidem maximarum; erit $\frac{2}{3} m n P p B . C^4$ momentum particularum earumdem omnium per totum æquatoris Bb circuitum ad modum annuli uniformiter dispositarum; atque ad momentum particularum in locis suis intra sphæræ, & sphæroidis superficies jacentium se habebit ut $2 : 5$, quod est secundum lemma a Newtono præmissum calculo præcessionis æquinoctiorum, quæ ex Solis, ac Lunæ actione in oblatam terram exercita oriri potest. Modo eamdem methodum, qua Newtonus pro supputandis momentis virium a corpore aliquo satis dissito in oblatam sphæroidem exercitarum usus fuerat, ad casum sphæroidis alterius oblongæ breviter traducemus.

PROBLEMA VIII.

Si proponatur sphærois revolutione ellipseos $BPpb$ circa majorem axem Bb genita, ac maneant reliqua omnia quæ antea, momentum virium in sphæroidem ipsam agentium determinare.

Sit STB planum, quod per centra utriusque corporis, attracti, attrahentisque, & per majorem semiaxem BT transit, ac perpendiculariter ad hoc planum ducatur planum QTq, quod sit etiam rectæ ST perpendiculare, ac designent Bb, IK ellipses binas in sphæroide proposita perpendiculariter ad planum STB, atque ad minorem axem PTp sectas. Si in perimetro ellipseos IK accipiantur binæ particulæ L, l, a plano STB æque dissitæ, ac manentibus omnibus quæ antea designet jam PTp planum per minorem axem traductum, & pariter plano STB perpendiculare, erit momentum particulæ utriusque $2 m n P . \overline{LX^2 - TX^2}$. Jam vero in ellipsi qualibet IRK, fig. 42. differentia IIL radii cujusvis HO, & minoris semiaxis æquatur differentiæ semiaxium ductæ in quadratum cosinus distantiæ radii ejusdem a majore semiaxe. Momentum igitur particularum omnium in L, & l, fig. 52.,

fig.

extra sphæram sphæroidi inscriptam jacentium erit ut summa omnium $2mnP . Ii . \frac{LX^2}{Xi^2} . \overline{LX^2 - TX^2}$, quæ in tota semiperipheria possunt accipi: & cum summa omnium LX^2 sit $\frac{3}{16} p . Xi^3$, & summa omnium $LX^2 . TX^2$ sit $\frac{1}{4} p . Xi^2 TX^2$, fiet momentum idem $mnP . Ii . p (\frac{3}{8} Xi^4 - \frac{1}{2} Xi . TX^2)$. Posito igitur ut antea $Ii = \frac{Xi . B}{TA}$, $TX = x$, $Xi^2 = C^2 - x^2$, momentum hemisphæroidis erit ut summa omnium

$mn . P . B . p (\frac{3}{8} . \overline{C^2 - x^2}^2 - \frac{1}{2} . \overline{C^2 - x^2} . x^2)$, sive $\frac{2}{15} mn . P . p . B . C^4$,

& momentum sphæroidis integræ $\frac{4}{15} mn . P . p . B . C^4$.

COROLLARIA.

I. Neglectis igitur ob parvitatem quadratricis differentiæ B potestatibus, momentum virium in oblongam sphæroidem agentium idem erit quam quod in oblatam iisdem semiaxibus descriptam exercetur: quod scilicet cum momentum idem sit maximum ubi semirectus sit angulus STB, quæ ex differentia latitudinis circularis annuli in sphæroide oblata secti, & annuli elliptici secti in sphæroide oblonga, in majoribus a vertice distantiis, ubi vires perturbatrices minores fiunt, haberetur momentorum differentia ad quantitates inferiorum ordinum pertineat. Qui simul formulas comparare velit duplo majus deprehendet esse oblongæ sphæroidis momentum quam ab Alembertio statutum sit Par. II. de Mundi Systemate §. 360.

II. Si oblata simul, & oblonga sit sphærois, scilicet si meridianum simul & æquatorem, sectionemque alteram per polos factam, & meridiani plano normalem habeat ellipticam, & sit sphæroidis semiaxis minor $= C$, major $C + B + D$, & semiaxis tertius duobus prioribus normalis $= C + B$, & sphærois accedat proxime ad sphæram, erit momentum omne $\frac{4}{15} pmn . P . C^4 . \overline{B + D}$. Ductis enim planis quibuslibet minori axi perpendicularibus, extra circulum in sphæra inscripta sectum, circularis, & ellipticus annulus supererunt, quorum momenta, ob sphæræ, & sphæroidis totius affinitatem, eodem modo supputari poterunt, ac singillatim in oblata, atque oblonga sphæroide supputarentur.

PRO-

PROBLEMA IX.

Si Terra diurno motu circa axem ſuum revolvatur, & Solis actione inclinetur circa diametrum aliquam æquatoris, invenire axem totius compoſitæ rotationis.

Sit NAn, fig. 48., planum terreſtris æquatoris, NCn planum eclipticæ, Nn duorum planorum interſectio, SAT planum circuli declinationis Solis, $Z\zeta$ interſectio æquatoris, & plani alterius, cui perpendiculariter inſiſtat recta ST a Sole ducta ad centrum telluris T. Si maſſa Solis vocetur M, major ſemiaxis Terræ A, minor C, differentia utriuſque B, & ſint m, n ſinus, & coſinus declinationis Solis ab æquatore, ſive inclinationis axis diurni motus ad planum $Z\zeta$; erit $\frac{3M}{ST^3}$ vis omnis acceleratrix, qua particula quævis Terræ a plano $Z\zeta$ diſtrahetur in ea diſtantia, quæ exprimitur unitate, & juxta Probl. VII. erit $\frac{4}{15}mn.pBC^4.\frac{3M}{ST^3}$ momentum virium acceleratricium, quibus Terra inclinabitur a Sole circa aliquam æquatoris diametrum $Z\zeta$. Et quia vis acceleratrix ducta in elementum temporis æquatur velocitati genitæ eodem tempore, ſi periodicum tempus Terræ circa Solem vocetur t, erit $\frac{4}{5}mn.pB.C^4.\frac{Mdt}{ST^3}$ momentum velocitatis rotationis circa diametrum ipſam conceptæ. Inſuper ſi velocitas hujuſmodi rotationis in maxima æquatoris diſtantia a diametro $Z\zeta$ vocetur v, juxta Coroll. III. Probl. IX. Lib. II. Vol. II. erit momentum totius rotationis $\frac{4}{15}pA^4.C^4.v$: quod cum juxta Theor. IV. ejuſdem libri æquari debeat priori momento, fiet $v = \frac{3M.mn.B}{ST^3}\frac{C^4.dt}{A^4}$. Denique ſi ſit ds angulus ATr, quem punctum æquatoris A circa centrum T, & circa axem diurni motus abſolvit elemento temporis dt, adeoque ſit $A.ds$ ſpatium Ar, & $\frac{A.ds}{dt}$ velocitas diurni motus; juxta Theor. II. citati libri compoſitis rotationibus Ter-

ra omnis neque circa axem figuræ, & diurni motus; neque circa diametrum $Z\zeta$ volvetur, sed circa axem tertium, qui jaceat in plano per diametrum $Z\zeta$, & figuræ axem traducto, atque ab axe figuræ declinet angulo, cujus tangens sit $\frac{3M.mn}{ST^3}.\frac{B.C^2.dt^2}{A^2.ds}$.

COROLLARIA.

I. Quia rotationis cujusque axis, & æquator sunt semper ad rectos angulos, & æqualibus semper angulis bini æquatores, & bini axes duarum rotationum a se invicem recedunt, si fiat $Ar:Ac$ ut diurni motus volocitas Ads ad velocitatem $\frac{3M.mn.}{ST^3}\frac{B.C^2.dt}{A^2}$, aut proxime $\frac{3M.mn.B.dt}{ST^3}$ alterius rotationis, quæ ob vires Solis circa diametrum $Z\zeta$ a puncto A in plano circuli declinationis singillatim conciperetur, compleaturque rectangulum $Armc$, & per puncta A, T, m traducatur planum $N'Amn'$, erit idem planum æquator novæ rotationis ex binis prioribus compositæ.

II. Erunt etiam N', n' intersectiones novi æquatoris cum plano eclipticæ post elementum temporis dt, & puncta m, N' jacebunt in adversas partes prioris æquatoris NAn, & cum motus diurnus Terræ, & motus annuus apparens Solis fiant ab occidente in orientem juxta ordinem signorum, nodi æquatoris N, n, transeundo in N', n' regredientur contrario ordine in plano eclipticæ: quo dato Sol a nodo N digressus, citius perveniet ad nodum n', & æquinoctium citius habebitur, quam si Terra circa figuræ axem semper invariabiliter revolveretur: regredientibus autem punctis æquinoctialibus fixarum longitudo, quæ supputatur a prima eclipticæ, & æquatoris intersectione, semper augebitur.

III. Id ergo minime fiet quod pristinus Terræ æquator Arn circa radium AT nutando in locum Acn' transeat, ut in orbita Lunæ, aut Planetæ alterius ex A in r circa centrum T moti, itidemque extraneis viribus abrepti ex A in c fieri oporteret; sed quod particulæ N, r, n in priore æquatore acceptæ extra planum novi æquatoris jaceant: atque ita pariter non quod figuræ, ac rotationis axis

angulo $\frac{3M}{ST^3} \cdot mn \cdot \frac{B \cdot dt^2}{A^2 \cdot ds}$ inclinetur circa æquatoris diametrum $Z\zeta$, sed quod Terra omnis, atque idem axis circa axem novum rotari incipiat, qui angulo $\frac{3M}{ST^3} \cdot mn \cdot \frac{B \cdot dt^2}{A^2 \cdot ds}$ diſtat a priore axe.

IV. Falſum eſt igitur quod Newtonus in Propoſ. XXXIX. Lib. III., Simpſonius in Miſcellaneis, S. Jacques de Sylvabelle in Collectionibus Maſſilienſibus, atque in Tranſactionibus Londinenſibus anni 1756 aſſumpſerant principium, & quod deinde ſecuti ſunt qui Newtoni, ac Simpſonii methodum exornarunt authores alii: particulam quamvis æquatoris A diurno motu ex A in r, & Solis, ac Lunæ actione ex A in c latam compoſitis motibus ſic ferri in directione Am ut æquator circa radium AT nutando in locum $N'A\acute{n}$ tranſeat. Ad accuratam horum problematum ſolutionem demonſtrandum eſt primo abductiones haſce omnes axis, & æquatoris ſe ſe invicem compenſare, nec unquam rotationis axem ab axe figuræ ſenſibiliter recedere, ac perinde ſe habere omnia, ac ſi regredientibus punctis æquinoctialibus æquator, axis, ac terra omnis vere nutaret circa radium quemcumque AT: quod cum a D. D. Alembert, Euler, la Grange jam demonſtratum ſit, breviter modo ex principiis antecedentibus colligemus.

THEOREMA.

Rotationis diurnæ axem, & æquatorem ab axe, & æquatore figuræ ſenſibiliter non recedere, & medium rotationis axem, & æquatorem ſemper eſſe axem, & æquatorem ipſum figuræ.

Sit in fig. 53. $ZP\zeta p$ Terræ totius ſectio per æquatoris diametrum $Z\zeta$, & figuræ axem Pp traducta, ac regredientibus punctis æquinoctialibus ut antea ſit compoſitæ rotationis axis Ll. Manifeſtum eſt diurno motu circa axem Ll continuato, & viribus attractricibus Lunæ, ac Solis continue agentibus eadem ratione novum rotationis axem QTq exſurgere oportere, & adhuc interſectionem Eclipticæ, & æquatoris ferri in partem adverſam illi, in quam diurnus motus dirigitur: & cum elapſis horis duodecim, ſi nulla eſſet axis LTl variatio, recta PTp ita in QTq ferri debeat ut æquales ſint anguli PTL, LTQ, & ſint rectæ omnes PTp, LTl, QTq in eodem plano; ma-

manifestum est axem diurnæ rotationis LTl in QTq transeundo adhuc in ipsum figuræ axem recidere. Quod cum de singulis novi axis a priore axe abductionibus semper valeat, cumque post unam semirevolutionem singulæ fiant in adversas partes, ac se invicem compensent, motus quidem punctorum æquinoctialium fiet semper contra ordinem signorum, axis vero, & polus rotationis a polo figuræ abducetur, reduceturque alternis vicibus, atque idem semper erit in Terra æquator, & axis medius figuræ simul, ac rotationis.

Idipsum ex eo colligitur facile quod si dato Solis loco S, fig. 48., cum diametri Aa vertex superior A obvertetur Soli, punctum N supra planum tabulæ assurgere intelligatur, ac deprimi punctum n, novosque haberi nodos N', n'; cum vertex a Soli obvertetur, & continuato diurno motu nodus n' abibit in locum N', nec nodus n' supra idem planum assurgere, nec N' deprimi adhuc poterit, & simul utrumque regredi in plano eclipticæ, nisi utrumque ad prioris æquatoris locum revertatur.

COROLLARIUM.

Quod si igitur in sphæroide oblata impresso motu rotationis idem diametri vertex A motum attrahentis corporis S sequeretur, aut inde tantum exiguis aberrationibus recederet, nec unquam transiret in locum a, nulli haberentur inter se contrarii motus axis, & polus rotationis a polo figuræ continuatis vicibus recederet: quod idem in sphæroide oblonga contingeret, in qua idem vertex majoris axis sit semper e plaga corporis attrahentis S. Nec ullus jam esset finis aberrationum omnium hujusmodi nisi major ipse axis dirigatur ad corpus S, & rotationis motus fiat circa illam diametrum, quæ perpendicularis est plano semitæ a corpore S descriptæ. Hic casus Lunæ ad Terram attractæ videtur esse. In Terra autem attracta a Luna, & Sole idem semper manebit axis medius rotationis, & de medio æquatore accipienda erunt quæ authores jam memorati de æquatore vero assumpserunt. Hoc autem dato manifestum erit, quod initio libri hujus diximus, attractrices vires ad motum diurnum accelerandum, vel retardandum agere semper æqualiter in adversas partes, neque ullam inde variationem motus oriri posse.

APPENDIX.

DE UNIFORMITATE DIURNI MOTUS.

QUæ igitur diurni motus variatio ex attractricibus Solis, ac Lunæ viribus in oblongam Terram exercitis oriri posset, & quam ope Probl. X. Lib. II. Vol. II. ad calculum revocavimus, singulis Lunæ, ac Solis semirevolutionibus circa Terram, & quæ ex viribus exercitis in Terram oblatam oritur singulis Terræ ipsius semirevolutionibus circa axem proprium, restituto semper in locum priorem axe, evanescit, ac tam brevi periodo velocitas diurni motus restituitur semper in gradum pristinum. Ita quæ potior causa est variationum earum omnium, quæ in toto Planetario systemate, atque in annuo Telluris motu observantur; diurnum motum eumdem semper continuatis revolutionibus esse sinit. Quæ aliæ variationes ex fluidi ætherei resistentia, atque ex lapsu corporum ponderosiorum, & aliqua totius Terræ condensatione oriri possunt, eæ & exiguæ sunt singulæ, & agunt contrario sensu, & resistentia ætheris ad retardandum, interiores omnes vicissitudines terrestris globi potius ad accelerandum diurnum motum conducunt. Quæ ad ætheris resistentiam pertinent in Cap. VII. Lib. I., quæ ad alias strarorum terrestrium variationes in priore libri hujus capite explicata, atque ex principio illo eruta sunt singula, quod in motu rotationis eadem semper momenti quantitas invariabiliter servari debeat. Inde etiam colligi posset quæ haberi debuisset jam retardatio diurni motus si initio Terra atmosphæram omnem secum rapuisset, atque ad eamdem angularis motus rationem debuisset comparare. Nam si Terræ solidæ radius vocetur r, & radius totius atmosphæræ ad centrum usque sit R, & prior rotationis velocitas in æquatore Terræ sit V, eaque aere omni in motum acto fiat U, ratio autem densitatis aeris ad mediam Terræ densitatem sit $1 : D$, & aer omnis per altitudinem $R - r$ tanquam homogeneus spectetur, ob momentorum conservationem debebit

bebit esse $\frac{4}{15} pVr^5 = \frac{4}{15} pUr^5 + \frac{4p}{15D} . \overline{R^5 . \frac{RU}{r} - r^5 U}$, atque inde eruetur $\frac{V - U}{V} = \frac{R^5 - r^5}{Dr^5}$. At cum jam diu communis motus angularis, atque eadem rotationis diurnæ ratio esse debuerit in Terra; atque in circumposita omni atmosphæra ad eam usque altitudinem, in qua aeris particulæ aliquo adhuc tenacitatis vinculo cohærent inter se, cumque motus alii omnes in Terra utcumque excitati nisibus in adversas partes exercitis nihil ad motum communem accelerandum, vel retardandum conferant; jam tuto concludi poterit, quod coram Berolinensi primum, ac deinde Petropolitana Academia dissérueram, eamdem fuisse semper Terræ circa axem motæ rapiditatem, eamdem mensuram temporis, eamdem ævi hujus, & sæculorum præteritorum rationem. Ostendetur etiam suo loco neque annui Telluris motus variationem ullam haberi posse, quæ periodicum Tempus a vetustissimis temporibus ad nos usque brevius, vel diuturnius effecerit. Modo expendendæ sunt variationes aliæ diurni motus, unde exsurgunt phænomena nutationis terrestris axis, & præcessionis æquinoctiorum.

CAPUT TERTIUM.

DE PRÆCESSIONE ÆQUINOCTIORUM.

PROBLEMA X.

Positis omnibus, quæ antea, invenire præcessionem æquinoctiorum, quæ a Sole, proposito quovis tempore, proficiscitur. Ducatur AG ex A, fig. 48., nodorum lineæ Nn prependuclaris, atque insuper ex N in planum novi æquatoris $N'A$ ducatur perpendiculum NN'', ac pariter sit NQ syzigiarum lineæ AB perpendicularis. Erit $NQ : NN'' = AG : NN'' = Ar : mr$, & cum juxta denominationes Probl. IX. sit $Ar = A . ds$, & $mr = v, dt = \frac{3M . mn . BC^2 . dt^2}{ST^3 \cdot A^2}$, seu proxime $= \frac{3M . mn . Bdt^2}{ST^3}$, erit

erit etiam $N N'' = \frac{3 M . mn}{ST} . \frac{AG . B . dt}{A . ds}$. Insuper si π sit sinus anguli ANC, sive $AN'C$, quo æquator ad planum eclipticæ inclinatur, ob $NN'' : NN' = \pi : 1$, arcus NN', quo retrocedet nodorum linea, erit $= \frac{3 M . mn . AG}{ST^3} . \frac{B . dt}{\pi . A . ds}$, & angularis nodorum eorumdem motus evadet $\frac{3 M . mn . AG}{ST^3} . \frac{B . dt}{\pi . A^2 . ds}$. Jam vero juxta elementa Trigonometriæ sphæricæ in triangulo sphærico rectangulo ACN est tangens $\frac{\pi}{\sqrt{(1 - \pi^2)}}$ anguli ANC eclipticæ, & æquatoris ad tangentem $\frac{m}{n}$ arcus AC declinationis Solis ab æquatore ut sinus totus ad sinum arcus AN, sive ut $A : AG$, atque insuper in eodem triangulo est sinus anguli ANC ad sinum totum ut sinus arcus AC ad CH sinum arcus CN. Ex priore itaque analogia eruetur $AG = \frac{m . A . \sqrt{(1 - \pi^2)}}{\pi . n}$, ex altera vero $m = \frac{\pi . CH}{A}$, atque hisce factis substitutionibus erit angularis nodorum eorumdem motus $\frac{3 M . \sqrt{(1 - \pi^2)} . CH^2 . B . dt}{ST^3 . A^3 . ds}$. Denique si sit dz angulus elemento temporis dt a Sole percursus circa Terram, t vero integrum tempus, & g velocitas revolutionis annuæ, erit $ds = t . dz$, & $dt = \frac{ST . dz}{g}$: & vim centripetam Terræ in Solem $\frac{M}{ST^2}$ duplo sinu verso exprimendo, seu duplo quadrato arcus per diametrum diviso, aut quadrato velocitatis diviso per semidiametrum, erit $\frac{M}{ST^2} = \frac{g^2}{ST}$. Factis itaque hisce aliis substitutionibus erit angularis motus nodorum, sive præcessio æquinoctiorum dato elemento temporis vi Solis genita $\frac{3\sqrt{(1 - \pi^2)} . CH^2 . g^2 . ST^2 . B . dz}{A^3 . t . dz \; . \; ST^2 \; . \; g^2} = \frac{3\sqrt{(1 - \pi^2)} . CH^2 . B . dz}{A^3 . t}$: & quia elementum circularis arcus $A . dz$ æquatur elemento abscissæ TH ducto in radium A, & per semiordinatam CH diviso; to-

tota præceſſio æquinoctiorum, quo tempore a Sole percurretur angulus NTC, æquabitur areæ NHC ductæ in $3\sqrt{(1-\pi^2)}.\frac{B}{A^2.t}$.

COROLLARIA.

I. Iiſdem etiam ſubſtitutionibus eum vis centrifuga in orbe annuo prodeat $\frac{g^2}{ST}=\frac{M}{ST^2}$, eaque ad vim centrifugam diurni motus ſub æquatore ſe habere debeat ut $\frac{ST}{t^2}:1$, vis perturbatrix Solis in puncto æquatoris A, ſive $\frac{3M.mn}{ST^3}$, ad vim centrifugam diurni motus ſe habebit ut $3\,mn:t^2$. Pariter in Probl. IX. fiet deviatio axis compoſitæ rotationis a figuræ axe $\frac{3\pi\sqrt{(1-\pi^2)}.CH^2.B.dz}{A^2.t.AG}=\frac{3n\pi.CH.Bdz}{A^2.t}$. Scilicet ſi ſit $CH=0$, hoc eſt ſi Sol reperiatur in punctis æquinoctialibus, puncta eadem, & Terræ axis variationem nullam ſubibunt. Si Sol extra æquinoctia conſtituatur in loco C, ipſius actione continua habebitur æquatoris, axis, lineæ nodorum a priore loco aberratio: & quidem dato elemento temporis deviatio axis rotationis erit in ratione ſimplici, angularis autem nodorum regreſſio erit in duplicata ratione ſinus diſtantiæ Solis ab æquinoctiis.

II. Si pro CH^2 accipiamus valorem medium $\frac{1}{2}A^2$, motus medius nodorum, quo ſcilicet uniformiter continuato eadem annui motus ſumma conficeretur, æqualis erit angulo NTC ducto in $3\sqrt{(1-\pi^2)}.\frac{B}{2tA}$, ſive erit motus medius hujuſmodi $3\sqrt{(1-\pi^2)}\frac{Bz}{2tA}$. Dato igitur quocumque tempore differentia medii, & veri motus præceſſionis erit ad motum verum, ut triangulum CTH ad ſegmentum CNH: ad medium autem præceſſionis motum ſe habebit eadem differentia ut triangulum CTH ad ſectorem CTN. In octantibus, cum ſit $CH=HT$, diffe-

ren-

rentia omnis evadet maxima, & ad motum totalem medium præcessionis se habebit ut dimidium quadratum radii ad duplum octantem areæ circularis, sive ut dupla diameter ad peripheriam.

III. Cum inclinatio eclipticæ, & æquatoris sit circiter $23^\circ\ 28\frac{1'}{3}$ adeoque sit $\sqrt{(1-\pi^2)}=0.91725$ circiter, pro z scribendo 360°, & $365\frac{1}{4}$ pro t, ac posito $B:A=1:231$, in hypothesi Terræ totius solidæ, & homogeneæ erit præcessio annua æquinoctiorum ex Sole genita $=21\frac{1}{4}''$. In eadem hypothesi si fiat $B:A=1:178$ evadet præcessio annua $27''\ 25'''$, atque erit dumtaxat $24\frac{1''}{3}$ si sit $B:A=1:201$. Unde cum tota æquinoctiorum præcessio, quæ ex viribus conjunctis Solis, & Lunæ proficiscitur, sit annis singulis $50.3''$; in eadem hypothesi Terræ totius solidæ, & homogeneæ, dempto quod haberetur ob Solis vim, tantumdem fere superesset, quod Lunæ vi posset tribui. Eosdem numeros pro singulis differentiæ semiaxium hypothesibus invenerunt qui primi accuratam problematis solutionem tradiderunt Alembert, Euler, ac etiam Simpson.

IV. Si Terra nucleum sphæricum in centro haberet, ac differentia densitatis nuclei, & materiæ circumpositæ esset Δ, & radius nuclei c; esset momentum totius Terræ circa æquatoris diametrum aliquam ut antea revolutæ $=\frac{4}{15}pA^3C v+\frac{4}{15}p\Delta.\frac{c^5 v}{A}$, adeoque in Probl. III. velocitas rotationis illius puncti, quod maxime a diametro eadem distat, sive v, esset $=\frac{3M}{ST^2}.\frac{mnB.A.C\,dt}{A^3C+\Delta c^5}$. Hoc autem posito erueretur deviatio axis totius compositæ rotationis $\frac{3M}{ST^2}.\frac{mnB.C}{A^3C+\Delta c^5}.\frac{dt^2}{ds}$, atque esset medius nodorum motus $\frac{3\sqrt{(1-\pi^2)}\,B.C\,dz}{2t.(A^3C+\Delta c^5)}$, seu proxime $\frac{3\sqrt{(1-\pi^2)}.B\,dz.}{2tA.\left(1+\frac{\Delta c^5}{A^5}\right)}$

V.

V. Si sit $A:c = 5:3$, & $1 + \Delta : 1 = 10:1$, ac $B:A = 1:201$, fiet ob vim Solis annua æquinoctiorum præcessio

$$= 24\frac{1}{3}'' \cdot \frac{1}{1 + \frac{2187}{3125}} = 14\frac{1}{3}''$$

: quam hypothesim assumpserat Eulerus in Probl. VII. Dissertationis de præcessione æquinoctiorum, quæ in Actis Berolinensibus anni 1749 legitur. Quod si vero ea assumatur hypothesis, quæ phænomenis ponderum accedendo ad polos crescentium satisfacit, quæque in Coroll. I. Probl. XII. Lib. II. simplicior visa est, ac fiat $\frac{\Delta c'}{A'} = \frac{1}{5\frac{1}{2}}$, & $\frac{B}{A} = \frac{1}{231}$, erit annua præcessio vi Solis genita $\frac{11}{13} \times 21\frac{1}{4}''$, seu proxime $18''$.

PROBLEMA XI.

Definire motum poli terrestris, & qui circa lineam nodorum, & qui circa eclipticæ axem absolvitur.

Quia regredientibus semper nodis, per Theorema antecedens, figuræ, & rotationis axes, æquatoresque continuis aberrationibus a se invicem sensibiliter non recedunt, sit angularis nodorum motus dy, adeoque sit Ady arcus NN', fig. 48., quo nodi regrediuntur in plano eclipticæ, $A\pi dy$ perpendiculum NN'' ex puncto prioris nodi N demissum in planum novi æquatoris $N'An'$, & $\frac{A\pi dy}{NQ}$, sive $\frac{A\pi dy}{AG}$ angulus, quem Æquator NAn, & axis Terræ, ipsi æquatori insistens ad rectos angulos, circa syzigiarum lineam AB simul describunt. Erit $\frac{A \cdot C\pi dy}{AG}$ arcus Pp, fig. 54., descriptus a polo telluris P: & quia medius poli motus ex P in p fit circa lineam AB, & in plano, quod per rectam $T\zeta$ traducitur; si totus poli motus secundum rectam parallelam ipsi $T\zeta$ resolvatur in duos alios secundum TQ perpendicularem, & $Q\zeta$ parallelam lineæ Nn nodorum; erit prior motus $\frac{TQ \cdot C\pi dy}{AG}$, alter

vero $\frac{Q\zeta . C\pi\, dy}{AG}$, & ob æquales angulos $QT\zeta$, GTA, & $AG = Q\zeta$, ac $TG = TQ$, evadet ille quidem $= \frac{TG . C\pi\, dy}{AG}$, hic vero $= C\pi\, dy$. Itaque polus Terræ binos motus præseferet, quorum unus parallele ad rectam TQ, & circa lineam nodorum Nn fiet, inclinationemque eclipticæ, & æquatoris variabit angulo $\frac{TG . \pi\, dy}{AG}$: alter vero, qui parallelus erit rectæ $Q\zeta$, efficiet ut polus ipse circa axem eclipticæ TK describat angulum $\frac{C\pi\, dy}{KP} = dy$, æqualem scilicet angulari nodorum eorumdem motui: atque erit nodorum motus ad variationem inclinationis ut $AG : \pi . TG$, sive ut $\sqrt{(1 - \pi^2)} . CH : \pi . TH$, fig. 48. Est enim in triangulo sphærico ANC cosinus $\sqrt{(1 - \pi^2)}$ anguli ANC ad sinum totum, ut cotangens arcus CN, sive $\frac{TH}{CH}$, ad cotangentem $\frac{TG}{AG}$ arcus AN, adeoque est $\frac{TG}{AG} = \frac{TH}{\sqrt{(1 - \pi^2)} . CH}$

COROLLARIA.

I. Præcessio æquinoctiorum erit ad variationem inclinationis eclipticæ, & æquatoris habitam eodem tempore ut $\frac{AG}{TG} : \pi = \frac{CH}{TH} : \frac{\pi}{\sqrt{(1 - \pi^2)}} = \frac{\sqrt{(1 - \pi^2)}}{\pi} : \frac{TH}{CH}$, sive ut tangens rectæ ascensionis Solis ad sinum inclinationis eclipticæ, & æquatoris, vel etiam ut tangens distantiæ Solis a punctis æquinoctialibus ad tangentem obliquitatis eclipticæ, sive denique ut cotangens obliquitatis eclipticæ ad tangentem distantiæ Solis a punctis solstitialibus.

II. In quadrantibus NTL, nTl, seu Sole ab æquinoctiis ad solstitia transeunte, augebitur inclinatio eclipticæ, & æquatoris: Sole autem redeunte a solstitiis ad æquinoctia, in quadrante LTn ob TH negativum, & ob CH negativum in quadrante lTN, inclinatio minuetur iisdem gradibus, quibus antea augebatur, & singulis

lis ſemirevolutionibus Solis reſtituetur eclipticæ obliquitas in gradum priſtinum. In octantibus variatio inclinationis fiet maxima, & ad præceſſionis motum ſe habebit ut $\pi : \sqrt{(1 - \pi^2)}$.

III. Si negligatur æquatoris motus qui ſolam inclinationem afficit, & qui ſe ipſum compenſat ſingulis Solis, aut Lunæ circa Terram ſemirevolutionibus; manifeſtum eſt motis nodis, & per totam æquatoris peripheriam decurrentibus, axem Terræ circa axem eclipticæ duas conicas ſuperficies ſibi invicem in centro obverſas deſcribere, & polos Terræ circa polos eclipticæ duos circulos: atque hic motus cum contra ordinem ſignorum, ſive ab oriente in occidentem fiat; ſtellæ fixæ ab occidente in orientem juxta ſignorum ordinem videbuntur circa axem eclipticæ revolvi.

PROBLEMA XII.

Iiſdem poſitis invenire variationem omnem inclinationis eclipticæ, & æquatoris.

Juxta corollarium primum antecedentis problematis præceſſio æquinoctiorum ad variationem inclinationis eclipticæ, & æquatoris dato quocumque elemento temporis ſe habet ut $1 : \frac{\pi . TH}{\sqrt{(1 - \pi^2)} . CH}$, & juxta Probl. X. quo tempote Sol circa Terram deſcribit angulum $d\zeta$ æquinoctiorum præceſſio eſt $3\sqrt{(1 - \pi^2)} . CH^2 . \frac{B . d\zeta}{A^2 . t}$.

Erit ergo variatio inclinationis dato elemento temporis $\frac{3\pi . CH , TH . d\zeta}{A^2 . t}$. Quare ſi pro angulo ipſo $d\zeta$ ſubſtituamus elementum coſinus TH diviſum per ſinum rectum CH, ſummamque elementorum omnium accipiamus; quia poſito Sole in punctis æquinoctialibus, cum TH æquatur radio æquatoris A, variatio inclinationis nulla eſſe poteſt, quantitatem conſtantem debite addendo, toto eo tempore, quo Sol a punctis æquinoctialibus recedet angulo NTC, erit variatio inclinationis Eclipticæ, & Æquatoris $\frac{3\pi . B}{2A^2 . t} . \overline{A^2 - TH^2} = \frac{3\pi . B . CH^2}{2A^2 . t}$. Eſt autem tota æquinoctiorum præceſſio habita eodem tempore $3\sqrt{(1 - \pi^2)} . \frac{B . HCN}{A^2 . t}$.

Tota igitur æquinoctiorum præceſſio erit ad variationem inclinationis habitam eodem tempore ut $2\sqrt{(1-\pi^2)}\,.\,HCN : \pi\,.\,CH^2$.

COROLLARIA.

I. Dato elemento temporis variabitur inclinatio in ratione compoſita ſinus, & coſinus diſtantiæ Solis ab æquinoctiis, ſive in ratione ſimplici ſinus diſtantiæ bis acceptæ, & in octantibus elementaris variatio fiet maxima. Summa autem elementorum omnium hujuſmodi, ſeu tota inclinationis variatio augebitur in duplicata ratione ſinus diſtantiæ a punctis æquinoctialibus, & fiet maxima cum Sol ad ſolſtitialia puncta perveniet: & tota hæc variatio in ſolſtitiis dupla erit, quam quæ octantibus reſpondet.

II. Et cum media æquinoctiorum præceſſio æquetur quantitati $\frac{3\sqrt{(1-\pi^2)}\,.\,B}{2A.t}$ ductæ in angulum NTC, cum is fiet quadranti æqualis, ſcilicet in Solis tranſitu a punctis æquinoctialibus ad ſolſtitialia erit tota æquinoctiorum præceſſio ad variationem inclinationis ut $\sqrt{(1-\pi^2)}\,.\,\frac{1}{4}p : \pi$, ſive ut arcus quadrantis circuli $\frac{1}{4}p$ ad tangentem $\frac{\pi}{\sqrt{(1-\pi^2)}}$ inclinationis mediocris eclipticæ, & æquatoris. Tota vero inclinationis variatio habita eodem tempore æqualis erit quantitati $\frac{6\pi\,.\,B\,.\,90^\circ}{pA\,.\,t}$.

III. Erit etiam tota eadem variatio quarta proportionalis ad $\frac{1}{4}p$, $\frac{3\sqrt{(1-\pi^2)}\,.\,B\,.\,90^\circ}{2A\,.\,t}$, & $\frac{\pi}{\sqrt{(1-\pi^2)}}$: ſcilicet motus Solis erit ad motum præceſſionis æquinoctiorum vi Solis genitæ ut tangens inclinationis mediocris eclipticæ, & æquatoris ad tangentem variationis totius ejuſdem inclinationis. Si fiat $\pi = \frac{2}{5}$ circiter, & $\frac{B}{A} = \frac{1}{231}$, in hypotheſi ſcilicet Terræ totius ſolidæ, & homogeneæ erit maxima inclinationis variatio circiter $1\frac{1}{2}''$.

PRO-

PROBLEMA XIII.

Si Terra omnis exterior ad annulum solidum reducatur æquatori sphæræ inscriptæ circumpositum, invenire nodorum motum.

Cum terræ exterioris quantitas sit $\frac{4}{3} pC^{2} B$, juxta Cor. I. & II. Probl. VII. si ea omnis consisteret in loco A, fig. 48., atque esset vix acceleratrix Solis $\frac{3M . mn . C}{ST^{3}}$, & $\frac{3M . mn . C^{2} . dt}{ST^{3}}$ momentum velocitatis particulæ uniuscujusque; esset etiam $\frac{3 M . mn . \frac{4}{3} pC^{4} . B . dt}{ST^{3}}$ momentum materiæ ejusdem exterioris ad totam Terram inclinandam circa æquatoris diametrum $Z\zeta$, ac fieret momentum omne $\frac{2 M . mn . pC^{4} B . dt}{ST^{3}}$ si materies ipsa per totum æquatoris circuitum disponeretur ad modum annuli. Quia vero in circulari annulo circa diametrum aliquam nutante velocitas particulæ uniuscujusque debet esse distantiæ simplici, & momentum quadrato distantiæ a diametro, quæ est axis motus, proportionalis: summa autem quadratorum omnium hujusmodi dimidia est summæ totidem quadratorum radii; si maxima nutationis velocitas vocetur v, erit totum momentum annuli $\frac{4}{3} p C^{2} B . \frac{C^{2} v}{2C}$. Momentis igitur ut antea exæquatis fiet $v = \frac{3M . mn . C . dt}{ST^{3}}$: & velocitatem hujusmodi dividendo per velocitatem diurni motus $\frac{C . ds}{dt}$ fiet tangens deviationis axis compositæ rotationis $\frac{3M . mn . dt^{2}}{ST^{3} . ds}$. Tum vero iisdem reassumptis decimi problematis substitutionibus fiet angularis motus nodorum annuli $\frac{3M . mn . AG . dt^{2}}{ST^{3} . \pi . A . ds} = \frac{3\surd(1 - \pi^{2}) . CH^{2} . d\zeta}{C^{2} . t}$, & motus medius erit $\frac{3\surd(1 - \pi^{2}) . d\zeta}{2t}$.

CO-

COROLLARIA.

I. Cum itaque motus maximus nodorum Lunæ, quæ diurno motu in æquatore Terræ revolvatur, & quæ quadrante integro a nodis cum Sole distet, esse debeat $\frac{3}{t}\sqrt{(1-\pi^2)}.d\zeta$: & motus medius singulis Lunæ hujus revolutionibus pro data Solis distantia a nodis debeat esse $3\sqrt{(1-\pi^2)}.\frac{CH^2.d\zeta}{2C^2.t}$: & motus medius annuus pro quovis Lunæ, Solis, nodorumque aspectu sit $\frac{3}{4t}\sqrt{(1-\pi^2)}.d\zeta$, ut in subsequente libro ostendemus perspicue, motus medius nodorum annuli duplo major erit motu medio nodorum Lunæ, quæ in ipso annuli, & æquatoris terrestris plano circa Terram diurno motu revolvi intelligatur. Idem etiam annuli motus $\frac{3}{2t}\sqrt{(1-\pi^2)}.d\zeta$ ad præcessionem mediam æquinoctiorum $\frac{3}{2t}\sqrt{(1-\pi^2)}.\frac{Bd\zeta}{A}$ se habebit ut major semiaxis Terræ ad semiaxium differentiam.

II. Cum sit $\frac{4}{3}pB.C^4.\frac{ds}{dt}$ momentum quantitatis materiæ $\frac{4}{3}pB.C^2$ circa æquatoris circulum uniformiter distributæ, & velocitate $\frac{C.ds}{dt}$ revolutæ circa axem Terræ, est etiam $\frac{3M.mn.}{ST^3}\frac{2}{3}pB.C^4.dt$ momentum annuli ob vires Solis circa diametrum aliquam nutantis. Quod si igitur in fig. 48. esset $Ar : rm$ ut momentum prius ad momentum hujusmodi posterius, esset deviatio axis compositæ rotationis $\frac{\frac{3M.mn.}{ST^3}\frac{2}{3}pB.C^4.dt^2}{\frac{4}{3}pB.C^4.ds}$, factisque iisdem substitutionibus, quæ antea, angularis nodorum motus evaderet $3\sqrt{(1-\pi^2)}.\frac{CH^2.d\zeta}{2C^2.t}$, & motus medius $\frac{3}{4t}\sqrt{(1-\pi^2)}.d\zeta$.

III.

III. Jam vero in Theor. IV. Lib. II. Vol. II. demonſtratum eſt non quidem momenta, ſed velocitates duarum rotationum componi inter ſe invicem, ſicuti etiam in motibus liberis non virium, & momentorum, ſed velocitatis, & motus eſt compoſitio: nec componuntur vires niſi cum vires ipſæ ſunt velocitatibus genitis proportionales. Cum de Terra omni agitur, ad inveniendam deviationem axis, & æquatoris perinde eſt aut momenta, aut velocitates utriuſque rotationis circa axem, & circa diametrum aliquam æquatoris conceptæ inter ſe componere: ob Terram enim proxime ſphæricam momenta ſunt proportionalia quamproxime velocitatibus angularibus duarum rotationum. At alia penitus annuli ratio eſt, ut etiam Simpſonius ad calcem ſuæ diſſertationis adnotaverat. Angularis enim velocitas, quam particulæ ſingulæ circa aliquam diametrum annuli concipiunt, duplo major eſt angulari velocitate, quæ eadem vi gigni poſſet circa axem plano annuli perpendiculariter in centro eductum. Quo poſito ſi motus medius nodorum annuli aſſumatur $\frac{3}{4t}\surd(1-\pi^2).dz$, ducaturque in $\frac{2}{5}$, quæ juxta Coroll. II. Probl. VII. eſt ratio virium in æquatore, & tota terrra exteriore agentium, imminuaturque in ratione quantitatis motus annuli ad ſummam quantitatum motus annuli, & globi incluſi, proxime eadem præceſſio habebitur, quam in Coroll. III. Probl. X. ſupputavimus: & ſi $\frac{3}{4t}\surd(1-\pi^2).dz$ minuatur in ratione quantitatis momenti annuli ad ſummam momentorum annuli, & globi eadem præceſſio habebitur, quæ iiſdem calculis ſuperioribus reſpondet.

APPENDIX.

DE ALIIS PROBLEMATIS EJUSDEM SOLUTIONIBUS, ET CORRECTIONIBUS.

NEwtonus in Propoſ. XXXIX Lib. III. Princip., non adhuc agnita nutatione terreſtris axis, motum præceſſionis æquinoctiorum, ex attractione Solis, ac Lunæ in Terram derivare, atque ad calculum revocare cœpit. Cum enim ipſe in Propoſ. XXX, mo-

motum horarium nodorum Lunæ in circulari orbita Solis actione genitum supputasset, collegit inde qui motus medius deberet esse nodorum Lunæ alterius, quæ in plano ipso æquatoris Terræ, eodemque periodico tempore simul cum Terra circa centrum revolveretur. Omnia huc redeunt quod si $1 : t$ sit ratio temporum diurnæ, & annuæ revolutionis Terræ, & sinus inclinationis æquatoris ad planum eclipticæ vocetur π, esset $\frac{3}{4t} \surd(1 - \pi^2) . 360^\circ$ motus annuus nodorum Lunæ alicujus fictitiæ in ipso æquatoris plano diebus singulis revolutæ. Deinde hypotheseos loco assumpsit Newtonus quod si plures Lunæ in eodem plano æquatoris, eodemque periodico tempore circa Terram revolverentur, singillatim acceptæ singulæ, aut simul junctæ ad annulum solidum componendum circa æquatorem, eumdem adhuc haberent medium, & annuum nodorum motum: quodque adeo si materies omnis, quæ in Terra extra inscriptam sphæram redundat, ad annulum solidum reduceretur æquatori ipsius sphæræ circumpositum, & diurno motu circumvolutum, adhuc motus nodorum annuus esset $\frac{3}{4t} \surd(1 - \pi^2) . 360^\circ$.

Positis hisce omnibus demonstravit Newtonus, ut etiam in Probl. VII. dictum est, perturbatrices vires a Sole in exteriorem terram exercitas, esse ad vires, quæ in eamdem materiam agerent, si tota in annulum illum solidum facesseret, ut $2 : 5$. Unde cum motus omnis nodorum imminui debeat in eadem ratione virium perturbatricium, esset $\frac{3}{10t} \surd(1 - \pi^2) . 360^\circ$ motus annuus nodorum, sive annua æquinoctiorum præcessio, quæ ob vires Solis in exteriorem terram exercitas gigni posset: & si inclinatio eclipticæ, & æquatoris assumatur $23^\circ \; 28\frac{1}{3}'$, & sit $\surd(1 - \pi^2) = 0.91725$, ac fiat $t = 365\frac{1}{4}$, esset motus omnis hujusmodi $9''\,76\frac{2}{5}$. At cum a terra exteriore ad sphæram inscriptam motus transire debeat, & tanto minor in terra eadem superesse, ut investigaret Newtonus quanam rationem distributio omnis fieret, alterius hypotheseos loco assumpsit quantitatem absolutam motus sic conservari, ut qui exterioris terræ an-

antea erat, communicatione facta, totus superſit in tota terra. Deinde oſtendit quantitatem motus ſphæræ eſſe ad quantitatem motus annuli alicujus poſiti circa æquatorem, & circa aliquam æquatoris diametrum ſimul cum ſphæra revoluti, ut quantitas materiæ in ſphæra ad quantitatem materiæ in annulo, & tria quadrata ex quarta peripheriæ parte ad duo quadrata ex diametro conjunctim.

Et quidem ratio quantitatis motus, & quantitatis etiam momenti in ſphæra, & annulo facile admodum definiri poteſt. Nam ſi in fig. 55. ſtatuamus circulum radii LG circa axem TB revolvi, velocitas in particulis ſingulis proportionalis erit diſtantiæ ad axe ipſo, eritque in elemento Mm motus quantitas $PM.\,Mm = LG.\,Pp$, atque in toto circulo erit $4\,LG^2$, auctaque in annulo quantitate materiæ in ratione $N : 1$ motus quantitas in eadem ratione augebitur. Quantitas autem momenti, quæ ex maſſa, velocitate rotantium particularum, & diſtantia ab axe motus æſtimatur, in elemento Mm erit $PM^2.\,Mm = LG.\,PM.\,Pp$, &, poſito ut antea radio ad peripheriam ut $1 : p$, erit in toto annulo $\frac{1}{2}p.\,LG^2.\,N$. Erit etiam $p.\,PM.\,LG.\,Pp$ motus quantitas in circulari zona, quæ revolutione elementi arcus Mm circa axem TB gignitur, & quantitas motus in ſuperficie ſphærica radio LG deſcripta erit $\frac{1}{4}p^2.\,LG^3$, atque in radii ejuſdem ſphæra erit $\frac{1}{16}p^2.\,LG^4$. Quare cum quantitas materiæ in ſphæra ſit $\frac{2}{3}p.\,LG^3$, atque in annulo $p.\,LG.\,N$, erit ratio quantitatum motus in ſphæra, & annulo $\frac{2}{3}p.\,LG^3.\,\frac{3}{16}p^2 : 8\,p.\,LG.\,N$. Quantitas momenti in ſphæra radio LG deſcripta cum juxta Probl. IX. Lib. II. Vol. II. ſit $\frac{4}{15}p.\,LG^5$, erit ratio quantitatum totius momenti in ſphæra, & annulo circa æquatorem poſito $\frac{2}{3}p.\,LG^5 : p.\,LG.\,N.\,\frac{5}{4}$, ſive in ratione quadrupli materiæ in ſphæra ad quintuplum materiæ in annulo.

Cum radius circuli ad peripheriam ſe habeat ut 50000 : 314159, erit ratio tripli quadrati ex quadrante circuli ad duplum quadra-

tum ex diametro, sive $\frac{3}{16}p^4 : 8 = 925274 : 1000050$. Et si in Terra sphæroidica semiaxis minor, qui per polos transit, vocetur C, & sit A æquatoris radius, ac fiat $A : C = 231 : 230$, in hypothesi homogeneitatis erit quantitas materiæ totius terrestris ad quantitatem materiæ in sphæra inscripta ut $A^4 : C^4$, & quantitas materiæ in sphæra ipsa erit ad quantitatem materiæ exterius redundantis ut $C^4 : A^4 - C^4 = 52900 : 461$. Compositis igitur rationibus erit quantitas motus sphæræ ad quantitatem motus annuli ut $106 . 17 : 1$, & summa quantitatum motus annuli, & sphæræ erit ad quantitatem motus solius annuli ut $107 . 17 : 1$: & si quantitas motus totius Terræ eadem esse debeat, quæ in terra exterius ad modum annuli redundantis ob vires perturbatrices Solis gigneretur, $976\frac{2}{5}''$ minuendo in ratione $1 : 107 . 17$, fieret $9'' \; 7'''$ circiter annuus motus nodorum eclipticæ, & æquatoris, sive annua æquinoctiorum præcessio vi Solis genita. Newtonus elementis calculi paululum variatis motum hujusmodi ex Sole ortum constituit $9'' \; 7''' \; 20^{iv}$, & reliquum $40'' \; 52''' \; 52^{iv}$ Lunæ actioni tribuit ut simul conjunctis viribus motus annuus præcessionis $50'' 12^{iv}$ circiter haberi posset: atque inde eamdem eruit proportionem virium Solis, & Lunæ $1 : 4 . 4815$, quam ex phænomenis marini æstus antea collegerat.

At vero in corporibus simul rotantibus, aut oscillantibus non eadem quidem quantitas motus, ut in corporibus libere impulsis, sed eadem momenti quantitas conservari debet, quemadmodum in Theor. IV. Lib. II. Vol. II. demonstratum est. Quare cum quantitates momentorum in sphæra, & annulo, assumptis iisdem numeris qui antea, esse debeant ut $91 . 8 : 1$, motum omnem $976\frac{2}{5}''$ minuendo in ratione $1 : 92 . 8$ fieret $10'' \; 27'''$ annuæ præcessionis motus, qui ex Solis viribus in Terra omni oriri posset. Hæc fere eadem ratio est, qua motum undique distribui, & ab annulo ad terram omnem transire oportere ostenderat D. Alembert §. 143. de præcessione æquinoctiorum. Quod si igitur accurate verum esset principium, quod ipse quidem author clarissimus §. 141. demonstratione indigere existimaverat, & quod tamen §. 130. ex generali, ac directa solutione proble-

blematis ſibi viſus erat collegiſſe, ſcilicet ſi motus medius nodorum idem eſſet in lunulis, aut ſingillatim diurno motu circa æquatorem revolutis, aut ſimul junctis ad modum annuli æquatorem ipſum circumambientis, ut etiam Eques Clariſſimus d'Arcy in Actis Pariſienſis Academiæ anni 1759 aſſumpſerat; annua æquinoctiorum præceſſio vi Solis genita in hypotheſi homogeneitatis Terræ, & poſita differentia ſemiaxium $\frac{1}{231}$ vere eſſet 10″ 27‴. Oſtendimus autem in Probl. XII. motum nodorum annuli duplo majorem eſſe quam Newtonus aſſumpſerat, atque hoc principio emendato eadem Newtoni methodo qui ſubinde inſtitueretur præceſſionis calculus non tantum elegans, & ingenioſus eſſet, verum etiam accuratus.

In opere Coſmographico minime prætereundum erat quo ingenio ſolutionem problematis difficillimi tentaverit Newtonus, nec quo alio tramite authores alii celeberrimi ad ſolutionem veram acceſſerint, aut pervenerint. In Tranſactionibus Philoſophicis ſolutiones binæ prodierunt, quæ in eoſdem fere numeros Newtoni recidunt: altera a D. Sylvabelle anno 1754, altera biennio poſt a D. Walmesley exhibita. Et quidem Walmeslejus binas Newtoni hypotheſes retinuit: & quod in terra omni eadem manere debeat motus quantitas, quæ in ſola exteriore terra a viribus perturbatricibus gigneretur: & quod motus nodorum annuli æquatorem circumambientis idem eſſe debeat qui in Luna eodem periodico tempore in æquatore ipſo revoluta, ſcilicet $\frac{3 \surd}{4 t} (- \pi^2) . 360^\circ$. Animadvertit vero in Lem. III. non eodem modo eamdem quantitatem motus per terram omnem diſtribui ſi terra exterior ad ſolidum æquatoris annulum reducatur, ut Newtonus jam intellexerat, ac ſi maneat in locis ſuis: atque idcirco Terram ſphæroidicam conſiderando, & poſito æquatoris radio A, & differentia ſemiaxium B, invenit ipſe quantitatem motus totius ſphæroidis ad differentiam quantitatum motus ſphæroidis, & ſphæræ inſcriptæ ſe habere circiter $2A : 5B$. Quare motum ipſum $\frac{3 \surd}{4 t} (1 - \pi^2) . 360^\circ$ minuendo primum in ratione $2 : 5$, quæ eſt ratio virium agentium in exteriore terra prout ma-

manere omnis in locis suis, aut ad solidum æquatoris annulum reduci intelligitur, ac deinde ob motus communicationem minuendo rursus in ratione $5 B : 2 A$, motum præcessionis annuum in priore problemate constituit $\frac{3}{4t} \cdot \frac{B}{A} \cdot \sqrt{(1-\pi^2)} \cdot 360°$. In problematis aliis subsequentibus eamdem methodum ad æquationes præcessionis mediæ, & nutationem terrestris axis determinandam traduxit Walmeslejus, & elegantia theoremata exhibuit, quæ leges præcessionis, & nutationis axis definiunt: & in altera dissertationis ejusdem parte motum nodorum terrestris orbitæ, & variationem obliquitatis eclipticæ ex Planetarum aliorum actione ortam singulari pariter elegantia supputavit.

Ratio autem quantitatum motus sphæroidis, ac sphæræ inscriptæ determinari facile poterit. Cum enim quantitas momenti circulorum in eodem plano circa centrum se se volventium sint in ratione quadruplicata radiorum, ut in Lib. II. Vol. II. toties jam dictum est, quantitas motus debebit esse in ratione radiorum triplicata. Insuper ductis quotcumque planis ad diametrum aliquam æquatoris sphæroidis perpendicularibus manifestum erit quantitatem motus in singulis sphæroidis sectionibus eamdem assumi posse, quæ in circulis ejusdem areæ, seu quorum radii ad radios circulorum in sphæra circumscripta similiter sectorum se habeant ut $\sqrt{A . C} : A$. Itaque quantitates motus in singulis sectionibus sphæroidis, & sphæræ circumscriptæ, & in tota etiam sphæroide, & sphæra circa eamdem diametrum revoluta inter se erunt ut $A^{\frac{3}{2}} . C^{\frac{3}{2}} : A^4$, sive ut $C^{\frac{3}{2}} : A^{\frac{3}{2}}$. Et cum quantitates motus in sphæra circumscripta, & inscripta esse debeant ut $A^4 : C^4$, erit quantitas motus sphæroidis ad quantitatem motus inscriptæ sphæræ ut $A^{\frac{5}{4}} : C^{\frac{5}{2}}$, & quantitas motus sphæroidis erit ad differentiam motuum sphæroidis, & sphæræ ut $A^{\frac{5}{2}} : A^{\frac{5}{2}} - C^{\frac{5}{2}}$, seu proxime ut $A : \frac{5}{2} B$. Juxta Probl. IX. Lib. II. Vol. II. quantitates momentorum in sphæroide, & sphæra circumscripta esse debent ut $C^4 : A^4$: in sphæra circumscripta, & inscripta ut $A^4 : C^4$: in sphæroide, & sphæra inscripta

inscripta ut $A^2 : C^2$: adeoque momenti quantitas in sphæroide ad differentiam quantitatis momentorum sphæroidis, & sphæræ inscriptæ se habebit proxime ut $A : 3\,B$.

Sylvabellius in dissertatione, quam ab anno usque 1752 Societati Londinensi obtulerat, & quæ anno 1756 prodiit in Transactionibus Philosophicis, quæque tertiam partem constituit totius tractatus de variationibus Planetarum editi eodem anno in collectionibus Massiliensibus, censuit quidem æqualem esse motum nodorum annuli, & motum mediocrem nodorum Lunæ in plano æquatoris æquali tampore revolutæ, ut legitur Cap. IV. Par. III. dissertationis Massiliensis; eam vero hypothesim ad solutionem problematis minime adhibuit. Primo enim cum vires perturbatrices, & quantitatem momentorum in Terra sphæroidica supputasset, eadem fere ratione, qua sæpius jam usi sumus, definivit velocitatem, qua ob vires ipsas circa aliquam æquatoris diametrum Terra omnis deberet inclinari. Subinde vero hujusmodi velocitatem cum velocitate diurni motus ita componi censuit, ut si in fig. 48. velocitates binæ sint Ac, & Ar, particula æquatoris A moveatur per Am, & totum æquatoris planum $NAna$ abeat in locum $N'An'$, & plano eclipticæ NCn post datum tempus occurrat in N', & n': quo modo Lunæ ex A in r projectæ orbita ob vires perturbatrices Solis circa vectorem radium AT nutaret. Denique analyticas formulas diversa ratione ad numeros deduxit author clarissimus. Etenim in dissertatione Londinensi Sect. IV. §. XXVI. vim centripetam æqualem statuit quadrato velocitatis per diametrum circuli diviso, & positis prioribus denominationibus præcessionem annuam ex Solis actione ortam invenit $\frac{3}{4t} \cdot \frac{B}{A} \cdot \sqrt{(1 - \pi^2)} \cdot 360^\circ$. In Massiliensi vero dissertatione cum §. 33. & 150. vim centripetam, ac centrifugam in circulari orbita æqualem statuisset quadrato velocitatis per radium diviso, eamdem præcessionis annuæ quantitatem $\frac{3}{4t} \cdot \frac{B}{A} \cdot \sqrt{(1 - \pi^2)} \cdot 360^\circ$, in ea tantum hypothesi obtinuit §. 101., & 178, quod terra exterior media sui parte sit fluida, & Solis vires ad directionem diurni motus variandam duplo minores sint, quam quæ in massam undique solidam exercerentur.

Et

Et quidem si plures vires continue agentes comparentur inter se invicem, perinde erit aut bis, aut semel accepti spatii rationem assumere, dummodo eadem semper assumatur ratio. Ideo Simpsonius cum in secundo Lemmate de præcessione æquinoctiorum vim centripetam corporum terrestrium sub æquatore ex simplici sinu verso dati arcus æstimasset, sive ex quadrato arcus per diametrum diviso, & cum pariter spatium, quod dato tempore perpendiculariter ad planum æquatoris ob vires perturbatrices absolvi posset, æstimasset ex ipsis viribus perturbatricibus, justam proportionem virium, eamdemque præcessionis annuæ quantitatem exhibuit, quam Alembertius §. 46., & 140. de Præcessione supputaverat vim centripetam æstimando ex duplo sinu verso, sive ex quadrato arcus diviso per solum radium. Eadem etiam ratione Eulerus in Actis Berolinensibus anni 1749 eamdem præcessionis quantitatem obtinuit cum in Probl. III. §. 26 tangentem deviationis terrestris axis duplo minorem, & §. 31. vim centripetam pariter duplo minorem statuisset, quam in calculis subsequentibus assumemus. Ubi vero aut singillatim consideranda esset vis aliqua continue agens, aut comparanda tantum cum alia vi, quæ semel alicui corpori impressa datam velocitatem produxerit, ut si vis projectionis, & vis centripeta terrestrium corporum comparari deberent inter se; æstimandæ essent vires, ut toties jam dictum est, ex velocitatibus, quas generant dato tempore, vis projectionis ex spatio simplici, vis centripeta ex duplo spatio, quod eodem tempore velocitati genitæ responderet. Idcirco in binis Sylvabellii dissertationibus cum recte jam determinata esset velocitas rotationis, quæ ob vires perturbatrices circa aliquam æquatoris diametrum gigni posset, & cum velocitas motus diurni, & annui quantitate alia exprimenda esset, quæ expressionem vis centripetæ involveret, sinus versus non semel, sed bis debebat accipi, & quadratum arcus non per diametrum, sed tantum per radium dividi.

In ea problematis solutione quam exhibuit Simpsonius in Miscellaneis, & quam etiam D. la Lande in utraque Astronomiæ suæ editione secutus est, illud tantum deficere mihi visum est quod Simpsonius censuerit particulam æquatoris *A*, fig. 48., diurno motu ex

A

A in r, & Solis, aut Lunæ actione ex A in c latam compositis motibus sic ferri in directione Am, ut æquator NAn circa radium AT nutando in locum $N'An'$ transeat, cum vere novus compositi motus axis exsurgat, novusque æquator $N'An'$ aliam Terræ sectionem referat quam NAn: & licet singulis semirevolutionibus æquator totius compositæ rotationis $N'An'$ in æquatorem figuræ NAn recidat, ut in præmisso Theoremate demonstratum est, ac regredientibus semper nodis, neglectaque exigua variatione inclinationis assumi possit continuato motu æquatorem circa omnes radios AT inclinari, & axem diurni motus circa axem eclipticæ duas conicas superficies sibi invicem in centro obversas describere, ut in Probl. XI. dictum est; id tamen nec valet pro singulis elementis temporis, nec sine demonstratione assumi poterat. Quod si quis demonstrationem hujus theorematis ex principiis aliis antecedentibus in lemmate Simpsonii supplere velit, atque insuper in Sylvabellii solutione vis centripetæ expressionem corrigat, in priore autem Newtoni, & Walmesley methodo bina simul principia corrigat, & quod motum nodorum annuli, & quod motus distributionem respicit; simul jam conciliata habebit omnia, quæ ab authoribus celebrioribus hacce in re exarata sunt, eosdemque obtinebit numeros, quos ex theorematis compositionis motuum rotationis, conservationisque summæ omnium momentorum facile collegimus. Accuratam, ac generalem solutionem problematis ex aliis Mechanicæ principiis Alembertus primo eruit in præclaro opere, quod anno 1749 in lucem prodiit, atque alia deinde methodo tradiderunt Eulerus in Actis Berolinensibus anni ejusdem, & D. la Grange in Dissertatione de Libratione Lunæ, quæ anno 1769 a Parisiensi Academia præmium retulit. Cum autem ipse Alembertus in præfatione ejusdem operis de præcessione æquinoctiorum solutionem suam prolixam valde, ac complicatam esse dixerit, ac specimen etiam simplicioris solutionis adjecerit, operæ pretium visum est solutionem adhuc simpliciorem ex nostris aliis Mechanicis principiis derivare.

CA.

CAPUT QUARTUM.

DE PRÆCESSIONIS MEDIÆ ÆQUATIONE.

PROBLEMA XIV.

Dato motu nodorum æquatoris terrestris in plano lunaris orbitæ invenire nodorum motum in plano eclipticæ.

Sint N, n, fig. 56. duo puncta in quibus æquator Terræ $ANBn$ secat eclipticam CNn: M, m puncta, in quibus secat ecliptica lunarem orbitam DMm: O, o interfectiones lunaris orbitæ, & æquatoris, ac denotet N punctum æquinoctii verni, M nodum ascendentem Lunæ. Si Dh, Ag sint perpendiculares ex D, & A ductæ in lineam Oo, & per M ducatur arcus circuli maximi MP plano æquatoris perpendicularis, & vis perturbatrix Solis ad vim perturbatricem Lunæ se habeat ut $1:Q$, erit juxta Probl. X. angularis motus nodorum æquatoris terrestris in plano lunaris orbitæ $\frac{3Q \cdot \text{cos. } AOD \cdot Dh^2 \cdot Bdz}{tA^3}$, & arcus, quo nodus O regredietur, erit $\frac{3Q \cdot \text{cos. } AOD \cdot Dh^2 \cdot Bdz}{tA^2}$. Erit vero arcus ipse ad arcum, quem punctum O circa æquatoris radium AT regrediente nodo describet, ut sinus totus ad sinum anguli POM, sive AOD. Rursus similes arcus, quos puncta æquatoris O, & N circa eumdem radium AT describent, proportionales erunt sinubus angulorum OTA, NTA, sive perpendiculis Ag, AG. Denique arcus ita descriptus a puncto N erit ad arcum, quo nodus N regredietur in plano eclipticæ CNn ut $\pi:1$. Quare compositis rationibus erit arcus, quo nodus æquatoris N regredietur in plano eclipticæ ob vim Lunæ $\frac{3Q \cdot \text{sin. } AOD \cdot \text{cos. } AOD \cdot Dh^2 \cdot AG \cdot Bdz}{\pi t \cdot Ag \cdot A^3}$: quam quantitatem dividendo per radium A, & pro Dh^2 substituendo valorem medium $\frac{1}{2}A^2$, fiet

fiet motus medius angularis ipsius nodi $\frac{3Q.\text{fin.}AOD.\text{cof.}AOD.AG.Bd\zeta}{2\pi t.Ag.A}$.

COROLLARIA.

I. Cum fit $\frac{AG}{AT} = \text{fin.}\overline{AO \mp NO} = \text{fin.}AO.\text{cof.}NO \mp \text{cof.}AO.\text{fin.}NO$, & posteriore termino omisso, qui ambiguitate signi in integra circulari peripheria debet destrui, fiat $AG = Ag.\text{cof.}NO$; evadet motus medius nodorum æquatoris terrestris in plano eclipticæ vi Lunæ genitus $\frac{3Q.\text{fin.}AOD.\text{cof.}AOD.\text{cof.}NO.BD\zeta}{2\pi t A}$.

II. Cumque insuper in triangulo sphærico obliquangulo MON sit fin. MON: fin. OMN = fin. MN : fin. NO, si cosinus arcus MN fiat $= \pm q$, & sinus $= \sqrt{(1 - q^2)}$, ac sinus inclinationis OMN lunaris orbitæ ad eclipticam vocetur l, erit fin. $NO = l.\frac{\sqrt{(1 - q^2)}}{\text{fin.}AOD}$,

& cof. $NO = \sqrt{\left(1 - l^2.\frac{\overline{1 - q^2}}{\text{fin.}AOD^2}\right)}$, & ob exiguam lunaris orbitæ inclinationem negligendo quadratum sinus l, fiet cosinus arcus NO proxime æqualis radio, & medius nodorum eorumdem motus in plano eclipticæ evadet $\frac{3Q.\text{fin}AOD.\text{cof.}AOD.Bd\zeta}{2\pi t A}$.

PROBLEMA XV.

Data distantia nodi ascendentis lunaris orbitæ a puncto æquinoctii verni invenire præcessionem æquinoctiorum.

Quia angulus OMP est differentia duorum angulorum NMP, NMO, erit fin. OMP = fin. NMP.cof. NMO — cof. NMP. fin. NMO. Insuper ex doctrina sphæricorum in triangulo sphærico rectangulo MNP erit fin. NMP : cof. MNP = fin. OMP : cof. MOP, adeoque erit cof. MOP = cof. AOD = $\frac{\text{fin. }OMP.\text{ cof. }MNP}{\text{fin. }NMP}$ =

cof. NMO. cof. MNP — $\frac{\text{fin. }NMO.\text{cof. }MNP.\text{cof. }NMP}{\text{fin. }NMP}$. Erit denique ex sphæricis cosinus arcus NM ad sinum totum ut tangens

complementi anguli MNP, ſive $\frac{\text{coſ. } MNP}{\text{ſin. } MNP}$, ad tangentem anguli NMP, ſive $\frac{\text{ſin. } NMP}{\text{coſ. } NMP}$, adeoque erit $\frac{\text{coſ. } NMP}{\text{ſin. } NMP} = \text{coſ. } MN . \frac{\text{ſin. } MNP}{\text{coſ. } MNP}$. Quare erit coſ. $AOD =$ coſ. NMO. coſ. $MNP -$ ſin. NMO. ſin. MNP. coſ. $MN = \surd(1 - \pi^2) . \surd(1 - l^2) \mp \pi l q$, & neglecto rurſus quadrato l^2 fiet coſ. $AOD = \surd(1 - \pi^2) \mp \pi l q$, & ſin. $AOD = \surd(1 - 1 + \pi^2 \pm 2\pi l q \surd(1 - \pi^2) - \pi^2 l^2 q^2) = \pi \pm l q \surd(1 - \pi^2)$, ac ſin. AOD. coſ. $AOD = \pi \surd(1 - \pi^2) \pm lq . (1 - 2\pi^2)$: & valore hujuſmodi in formula Corollarii antecedentis ſubſtituto evadet motus medius nodorum vi Lunæ genitus

$$\frac{3Q . (\pi \surd \overline{1 - \pi^2} \pm lq . \overline{1 - 2\pi^2}) . B d\zeta}{2\pi \iota A}.$$

COROLLARIUM.

I. Formulæ hujuſmodi pars prior $\frac{3 Q . \surd(1 - \pi^2) . B d\zeta}{2 \iota A}$ exprimet præceſſionem mediam æquinoctiorum vi Lunæ genitam pro loco quolibet nodi aſcendentis lunaris orbitæ. Pars vero altera $\pm \frac{3 Q . lq (1 - 2\pi^2) . B d\zeta}{2 \pi \iota A}$ exprimet præceſſionis mediæ æquationem, quæ pendet ex vario nodi ipſius aſcendentis loco.

II. Atque erit æquatio eadem ut coſinus diſtantiæ MN nodi aſcendentis M lunaris orbitæ a puncto æquinoctii N, aut n: & quia nodi etiam lunaris orbitæ feruntur contra ordinem ſignorum, in regreſſu nodi ipſius aſcendentis ab æſtivo ſolſtitio F ad æquinoctium vernum N, & inde ad ſolſtitium hyemale f poſitivus manebit coſinus arcus MN, & motus verus præceſſionis major erit medio: & contra nodo ab hyemali ſolſtitio ad æſtivum redeunte, coſinus ipſe evadet negat vus, & verus præceſſionis motus minuetur iiſdem gradibus, quibus antea augebatur.

III. Nodo aſcendente in punctis æquinoctialibus conſtituto, ac poſito $q = 1$, fiet maxima præceſſionis æquatio $\pm \frac{3Q . l . (1 - 2\pi^2) . B d\zeta}{2\pi \iota A}$, & ad motum medium præceſſionis

$\frac{3Q.\sqrt{(1-\pi^2)}.Bd\zeta}{2tA}$ se habebit ut $\pm l.(1-2\pi^2):\pi\sqrt{(1-\pi^2)}$.

Quapropter si media æquinoctiorum præcessio ex viribus Lunæ orta vocetur P, & nodus ascendens lunaris orbitæ jaceat in puncto æquinoctii verni, vel autumnalis, differentia mediæ præcessionis, & præcessionis maximæ, vel minimæ erit $\frac{\pm P.l.(1-2\pi^2)}{\pi\sqrt{(1-\pi^2)}}$.

IV. Est vero $1-2\pi^2 = 2(1-\pi^2)-1$, qui est cosinus duplæ inclinationis eclipticæ, & æquatoris, atque est $\pi\sqrt{(1-\pi^2)}$ dimidius sinus ejusdem duplæ inclinationis, adeoque est $\frac{\pi\sqrt{(1-\pi^2)}}{1-2\pi^2}$ dimidia duplæ inclinationis tangens. Itaque tangens duplæ inclinationis eclipticæ, & æquatoris erit ad sinum duplæ inclinationis eclipticæ, & orbitæ lunaris ut media æquinoctiorum præcessio vi Lunæ genita ad differentiam præcessionis mediæ, & præcessionis maximæ, vel minimæ.

PROBLEMA XVI.

Data æquatione maxima præcessionis invenire æquationem omnem, quæ dato tempori, & dato loco nodorum lunaris orbitæ respondet.

Summa motuum omnium mediocrium præcessionis erit ad totam præcessionis æquationem, quo tempore nodus ascendens M lunaris orbitæ ab æquinoctio verno N regredietur per arcum quemcumque MN, ut summa omnium $\pi\sqrt{(1-\pi^2)}$ in integro eodem arcu acceptorum ad summam totidem $\pm lq.(1-2\pi^2)$. Et quia summa omnium q, sive cosinuum arcus MN, est sinus rectus ipsius arcus; motus medius præcessionis erit ad totam medii motus æquationem in transitu nodi ascendentis lunaris orbitæ ex N in M ut $\pi\sqrt{(1-\pi^2)}.MN:\pm l.(1-2\pi^2)$. Sin. MN: scilicet erunt quantitates hujusmodi inter se in ratione composita tangentis duplæ inclinationis eclipticæ, & æquatoris ad sinum duplæ inclinationis lunaris orbitæ, & arcus distantiæ a punctis æquinoctialibus ad ejus sinum. Quare dum nodus ipsius orbitæ a punctis æquinoctialibus recedet quadrante integro, tota præcessio æquinoctiorum se habebit

ad æquationem maximam ut $\frac{1}{4} p \pi \surd (1 - \pi^2) : \pm l . (1 - 2 \pi^2)$, & si æquatio hæc maxima vocetur R, pro eo tempore, quo distantia MN nodi a punctis æquinoctialibus arcu quocumque c augebitur, erit æquatio omnis $R . (\text{fin.} \overline{MN + c} - \text{fin.} MN)$.

COROLLARIA.

I. Cum sit 19° 21′ regressio annua nodi ascendentis lunaris orbitæ in plano eclipticæ, si insuper sit MN distantia nodi ascendentis a punctis æquinoctialibus dimidio anno quovis proposito, adeoque ineunte anno sit $MN - 9\frac{2}{3}°$, & anno labente $MN + 9\frac{2}{3}°$, æquatio mediæ præcessionis erit pro anno eodem integro

$$= R . (\text{fin.} \overline{MN + 9\tfrac{2°}{3}} - \text{fin.} \overline{MN - 9\tfrac{2°}{3}}) = 2R . \text{cof.} MN . \text{fin.} 9\tfrac{2°}{3},$$

proportionalis scilicet cosinui distantiæ nodi ascendentis a punctis æquinoctialibus.

II. Æquatio hæc annua præcessionis mediocris æquinoctiorum eamdem habebit legem, quam in Coroll. II. Probl. X. esse diximus differentiæ medii, & veri motus præcessionis. Scilicet in regressu nodi ascendentis ab æstivo solstitio ad hyemale æquatio eadem annua præcessionem mediam augebit, totamque præcessionem annuam efficiet maximam nodo ipso ad æquinoctium vernum delato. In semirevolutione nodi altera contrarium accidet, & annua præcessio minima habebitur nodo ascendente in puncto æquinoctii autumnalis constituto.

III. Tota autem præcessionis æquatio, quæ habebitur dum nodus idem regredietur ex N in M, proportionalis erit sinui arcus MN: & quia sinus ipse positive accipi debet dum nodus ascendens lunaris orbitæ a puncto æquinoctii verni N regredi incipit ad hyemale solstitium f; tota ipsa æquatio præcessioni mediæ addenda erit in signis meridionalibus, ac in signis borealibus subtrahenda, & tum demum fiet maxima cum nodus ascendens perveniet ad puncta solstitialia, & sinus arcus NN fiet æqualis radio.

PROBLEMA XVII.

Iisdem positis invenire æquationem eamdem maximam.

Quia per superius problema præcessio media æquinoctiorum eo tem-

tempore habita, quo nodus aſcendens lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus tranſit ad ſolſtitialia, ſe habet ad totam æquationem maximam ut $\frac{1}{4} p \pi \surd (1 - \pi^2) : \pm l. (1 - 2\pi^2)$, ſi motus medius nodi aſcendentis lunaris orbitæ ad motum medium præceſſionis æquinoctiorum vi Lunæ genitum ſe habeat ut $n : m$, ſitque adeo $n - m : m$ ut media nodi regreſſio a punctis æquinoctialibus ad motum medium punctorum eorumdem, & ſit $\frac{m}{m-n} . 90°$ motus medius præceſſionis, quo tempore aſcendens nodus a punctis æquinoctialibus recedit quadrante integro; erit

$$\frac{\pm (1 - 2\pi^2) . m l . 90°}{\frac{1}{4} p \pi (n - m) \surd (1 - \pi^2)}$$ maxima differentia mediæ, ac veræ præceſſionis æquinoctiorum. Eſt autem radius ad peripheriam ut 50000 : 314159, adeoque eſt $\frac{90°}{\frac{1}{4}p} = 57 . 29578°$. Erit itaque

æquatio maxima totius mediæ præceſſionis æquinoctiorum

$$\frac{\pm m l (1 - 2\pi^2) 57 . 29578°.}{\pi (n - m) \surd (1 - \pi^2)}$$

COROLLARIUM.

Motus medius præceſſionis $\frac{m}{m-n} . 90°$ ad totam præceſſionis æquationem habitam in tranſitu nodi aſcendentis lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus ad ſolſtitialia ſe habebit in ratione compoſita quadrantis $\frac{1}{4} p$ ad radium, & tangentis $\frac{2 \pi \surd (1 - \pi^2)}{1 - 2\pi^2}$ duplæ inclinationis eclipticæ, & æquatoris ad $2 l$ duplum ſinum inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam.

SCHOLION.

Æquationes has medii motus præceſſionis æquinoctiorum ſua ſinguli methodo tradiderunt qui poſt Newtonum reſolvendo problemati dederunt operam, Alembert, Eulerus, Simpſonius, Walmeslejus, Sylvabellius. Elegantia theoremata, quæ recenſentur in co-

corollariis Probl. XV., & XVII., mihi humanissime communicavit cum Pisis esset Clariss. Walmeslejus, ac deinde publici juris fecit in Prob. II., & III. memoratæ dissertationis. Et quidem si ob parvitatem minime negligeretur quadratum sinus inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam aliis adhuc theorematis esset locus. Supputato enim quadrato l^2 evaderet cos. $AOD = \sqrt{(1-\pi^2)}\sqrt{(1-l^2)} \mp \pi l q$, & sin. $AOD = \pi\sqrt{(1-l^2)} \pm lq\sqrt{(1-\pi^2)}$, ac fieret æquinoctiorum præcessio vi Lunæ genita $= \frac{3Q}{2\pi t A}.(\pi\sqrt{(1-\pi^2)}$ $(1-l^2) \pm lq.(1-2\pi^2)\sqrt{(1-l^2)} - \pi l^2 q^2 \sqrt{})(1-\pi^2))).Bdz$. Hoc autem dato cum terminus $\pm\, lq$ una revolutione nodi ascendentis lunaris orbitæ destruatur oppositione signi, cumque $\frac{3Q\sqrt{(1-\pi^2)}.Bdz}{2tA}$ sit media præcessio, quam Luna gigneret si in plano eclipticæ revolveretur; erit præcessio ipsa in hypothesi Lunæ revolutæ in plano eclipticæ ad præcessionem veram ut $1 : 1 - l^2 - l^2 q^2$. Quare pro q^2 substituendo valorem medium $\frac{1}{2}$, erit tota præcessio media in hypothesi Lunæ revolutæ in ecliptica ad præcessionem mediam in hypothesi Lunæ in orbe suo revolutæ ut $1 : 1 - \frac{3}{2} l^2$, & motus medius præcessionis in priore hypothesi erit ad differentiam duorum motuum ut duplum quadratum radii ad triplum quadratum sinus inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam. Ex eadem formula accuratius etiam colligitur quæ medii, & veri motus præcessionis differentia dato loco nodorum lunaris orbitæ respondeat, & quæ nodis per datum angulum in plano eclipticæ regredientibus habeatur medii motus totius æquatio: quæ duo in dissertatione Lucæ edita præstitimus. Modo unitatem scribendo pro $\sqrt{(1-l^2)}$, & negligendo quadrata l^2 solutionem problematum effecimus breviorem, quod ob exiguam lunaris orbitæ ad planum eclipticæ inclinationem nihil inde emergere possit quod sit sensibile.

CA-

CAPUT QUINTUM.

DE NUTATIONE TERRESTRIS AXIS.

PROBLEMA XVIII.

INvenire variationem inclinationis eclipticæ, & æquatoris vi Lunæ genitam.

Juxta problematis decimi quarti formulas est

$\frac{3\,Q.\,\text{cof.}\,AOD.\,Dh^2.\,Bd\zeta}{t\,A^3}$ arcus, quo nodus O terrestris æquatoris in plano DOo, fig. 56., lunaris orbitæ regreditur. Patet autem hujusmodi arcum se habere ad arcum alium, quem punctum idem æquatoris O circa radium AT regrediente nodo describet, ut sinus totus ad sinum anguli AOD. Erit itaque

$\frac{3\,Q.\,\text{fin.}\,AOD.\,\text{cof.}\,AOD.\,Dh^2.\,Bd\zeta}{t\,A^3}$ arcus, &

$\frac{3\,Q.\,\text{fin.}\,AOD.\,\text{cof.}\,AOD.\,Dh^2.\,Bd\zeta}{t\,A^3.\,Ag}$ angulus, quem punctum æquatoris O, adeoque etiam æquatoris axis, & polus Terræ circa lineam AT describet. Quod si hic poli terrestris motus circa lineam AT, & secundum lineam ipsi $T\zeta$ parallelam, fig. 54., ut antea resolvatur in duos alios, quorum unus sit lineæ Nn nodorum parallelus, alter vero sit priori perpendicularis; fiet

$\frac{3\,Q.\,\text{fin}\,AOD.\,\text{cof.}\,AOD.\,Dh^2.\,TG.\,Bd\zeta}{t\,A^3.\,Ag}$ angulus, quem polus, & axis Terræ describet circa interfectionem planorum æquatoris terrestris, & eclipticæ, quoque variabitur inclinatio eclipticæ ad æquatorem. At insuper, in fig. 56., est $TG = Ag.\,\text{fin.}\,NO + Tg.\,\text{cof.}\,NO$, atque ex Doctrina sphæricorum est $\frac{Tg}{Ag} = \frac{Th}{Dh.\,\text{cof.}\,AOD}$.

Itaque erit variatio eadem inclinationis axis, & æquatoris Terræ ad axem, & planum eclipticæ vi Lunæ genita $=$

$\frac{3Q.\,\text{fin}\,AOD}{t\,A^3}.(Dh^2.\,\text{cof.}\,AOD.\,\text{fin.}\,NO + Dh.\,Th.\,\text{cof.}\,NO).\,Bd\zeta.$

CO-

COROLLARIA.

I. Variationis hujus binæ erunt partes, quarum posterior $\frac{3\,Q.\ \text{fin.}\ AOD.\ Dh.\ Th.\ \text{cof.}\ NO.\ Bd\zeta}{t\,A^2}$ singulis Lunæ semirevolutionibus oppositione figni rectangulorum omnium $Dh.\ Th$ in adversis quadrantibus destruetur, prior vero $\frac{3\,Q.\ \text{fin.}\ AOD.\ \text{cof.}\ AOD.}{t\,A^2}$ fin. $NO.\ Dh^2.\ Bd\zeta$, ob quadratum Dh^2 semper positivum minime destruetur una semirevolutione Lunæ, atque exprimet variationem inclinationis, quæ pendebit ex loco nodi ascendentis lunaris orbitæ

II. Cum summam quadratorum omnium Dh^2, & rectangulorum $Dh.\ Th$ in integro quadrante acceptorum per quartam partem peripheriæ dividendo fit $\frac{1}{2}A^2$ valor medius quadrati Dh^2, & $\frac{2\,A^2}{p}$ valor medius rectanguli $Dh.\ Th$, substitutionibus hisce factis variatio media inclinationis æquatoris terrestris ad eclipticam vi Lunæ genita evadet $= \frac{3\,Q.\ \text{fin.}\ AOD.}{t\,A}\ (\frac{1}{2}\text{cof.}AOD.\ \text{fin.}\ NO + 2.\text{cof.}\ NO).Bd\zeta$.

PROBLEMA XIX.

Dato motu nodorum lunaris orbitæ invenire variationem omnem inclinationis eclipticæ, & æquatoris.

Cum dato nodorum loco fit $\frac{3Q}{2\,t\,A}$. fin. AOD. cof. AOD. fin. $NO.\ Bd\zeta$ variatio media inclinationis eclipticæ, & æquatoris, revolutionibus fingulis Lunæ genita, & per Coroll. II. Probl. XIV. fit fin. $NO = \frac{l.\ \sqrt{(1-q^2)}}{\text{fin.}\ AOD}$, ac denique juxta Probl. XV. fit cof. $AOD = \sqrt{(1-\pi^2)} \mp \pi\,l\,q$. aut accuratius juxta antecedens Scholion $= \sqrt{(1-\pi^2)}\sqrt{(1-l^2)} \mp \pi\,l\,q$; neglecto posteriore termino, qui in regressu nodi ascendentis ab æquinoctio verno ad autumnale ambiguitate figni destruitur, fiet variatio eadem media $= \frac{3\,Q.\,l.\sqrt{(1-\pi^2)}\sqrt{(1-l^2)}\sqrt{(1-q^2)}.\ Bd\zeta}{2\,t\,A}$, & ad præcessionem mediam æquinoctiorum in hypothesi Lunæ in plano ecli-

clip-

ptieæ revolutæ ſe habebit ut $l.\surd(1-l^2)\surd(1-q^2):1$. Quare dum nodus aſcendens lunaris orbitæ a puncto æquinoctii verni N per arcum NM regredietur, erit tota variatio inclinationis ad præceſſionem totam habitam eodem tempore ut ſumma omnium $l\surd(1-l^2)$. ſin. MN ad ſummam totidem radiorum: & quia ſumma omnium ſinuum rectorum eſt ſinui verſo æqualis, in regreſſu nodi aſcendentis ex N in M variatio inclinationis æquatoris terreſtris cum plano eclipticæ erit ad præceſſionem mediam æquinoctiorum habitam eodem tempore ut $l.\ \surd(1-l^2)\ (1\pm q)$ ad arcum MN.

COROLLARIA.

I. Dum nodus aſcendens M a puncto æquinoctii verni N regredietur ad hyemale ſolſtitium f, & inde ad autumnale æquinoctium n, ſinus arcus MN poſitivus erit, atque imminui incipiet vi Lunæ æquatoris inclinatio ad eclipticam, imminueturque ipſa quouſque nodus aſcendens lunaris orbitæ ad autumnale æquinoctium pervenerit: deinde nodo ab æquinoctio autumnali redeunte ad vernum fiet negativus ſinus diſtantiæ ab æquinoctio, & æquatoris inclinatio augebitur iiſdem gradibus, quibus antea imminuebatur.

II. Maxima igitur inclinatio æquatoris terreſtris ad eclipticæ planum habebitur dum nodus aſcendens lunaris orbitæ erit in loco æquinoctii verni, minima in autumnali æquinoctio, & in utroque ſolſtitio inclinationis variatio dimidia erit variationis maximæ, ac tota æquatoris inclinatio erit media. In regreſſu nodi aſcendentis a ſolſtitiis ad æquinoctia erit differentia mediæ, & maximæ variationis ad differentiam variationis habitæ dato tempore ut $1:\pm q$. Scilicet variatio inclinationis ſingulis revolutionibus Lunæ habita proportionalis erit ſinui recto diſtantiæ nodi aſcendentis a punctis æquinoctialibus: tota inclinationis variatio habita dum idem nodus dato quocumque angulo ab iiſdem punctis regredietur, erit ut ſinus verſus totius anguli: & differentia mediæ, & veræ inclinationis erit ut anguli ipſius coſinus.

III. Dum nodus aſcendens lunaris orbitæ a ſolſtitiis dato arcu ad æquinoctia regredietur, præceſſio media æquinoctiorum habita eodem tempore ſe habebit ad differentiam variationis mediæ, cum nodus idem erat in punctis ſolſtitialibus, & variationis habitæ in fine tem-

poris propositi, sive ad variationem totius inclinationis mediæ æquatoris terrestris, & eclipticæ, ut arcus omnis in regressu nodi percursus, & a solstitio supputatus ad $\pm ql . \surd (1 - l^2)$: & valebit superius signum in regressu nodi ascendentis a solstitio æstivo ad hybernum; inferius autem in reditu ad solstitium æstivum.

PROBLEMA XX.

Data ratione motuum nodi ascendentis lunaris orbitæ, & punctorum æquinoctialium invenire nutationem terrestris axis.

Positis aliis Probl. XVII. denominationibus, si sit $\frac{m}{n-m} . 90°$ motus medius præcessionis æquinoctiorum genitæ ob vim Lunæ eo tempore, quo nodus ascendens lunaris orbitæ quadrante integro regreditur, & si juxta posterius corollarium regrediente nodo a solstitiis ad æquinoctia motus idem medius præcessionis ad variationem inclinationis mediæ se habeat ut $\frac{1}{4}p : \pm ql . \surd (1 - l^2)$; erit $\pm \frac{ml}{n-m} . \surd (1 - l^2) . \frac{360°}{p}$ differentia omnis inclinationis mediæ eclipticæ, & æquatoris, & inclinationis maximæ, sive minimæ. Patet autem æqualibus angulis æquatorem, & axem Terræ inclinari circa intersectionem ipsius æquatoris cum plano eclipticæ. Quare si pro $\frac{360°}{p}$ denuo scribamus $57 . 29578°$, erit $\pm \frac{ml}{n-m} . \surd (1 - l^2) . 57 . 29578°$ angulus omnis, quo axis Terræ circa lineam nodorum æquatoris, & eclipticæ nutabit: & differentia duorum angulorum, quos bini axes æquatoris terrestris, & eclipticæ inter se efficient, nodo ascendente lunaris orbitæ posito in punctis æquinoctii verni, & autumnalis erit $\frac{2ml}{n-m} . \surd (1 - l^2) . 57 . 29578°$.

COROLLARIA.

I. Posito $n = m$, idem esset motus nodi ascendentis lunaris orbitæ, & punctorum æquinoctialium in plano eclipticæ, & nodus idem ab iisdem punctis nullo unquam tempore longius posset regredi, nutationisque totius formulis amplius non esset locus. Reassumendo

autem

autem formulam Coroll. I. Probl. XVIII. manifeſtum erit, quod ſi nodus aſcendens in punctis æquinoctialibus maneret, poſito ſin. $NO = 0$, inclinatio etiam eclipticæ, & æquatoris maneret eadem: nodo autem ubilibet conſtituto, dataque ſemper ipſius diſtantia a punctis æquinoctialibus inclinatio eclipticæ, & æquatoris minueretur ſemper, vel augeretur prout ſinus arcus NO poſitivum, vel negativum valorem obtineret.

II. Si loco $\sqrt{(1 - l^2)}$ ſcribamus unitatem, æquatio maxima inclinationis axis æquatoris terreſtris, & eclipticæ, in tranſitu nodi aſcendentis lunaris orbitæ a ſolſtitiis ad æquinoctia, erit ad æquationem maximam præceſſionis æquinoctiorum $\frac{\pm ml.(1 - 2\pi^2).57.29578^\circ}{\pi.(n - m)\sqrt{(1 - \pi^2)}}$, habitam in nodi tranſitu ab æquinoctiis ad ſolſtitia, ut $\pi\sqrt{(1 - \pi^2)} : 1 - 2\pi^2$, ſive ut dimidius ſinus ad coſinum duplæ inclinationis eclipticæ, & æquatoris.

PROBLEMA XXI.

Data quantitate præceſſionis mediæ æquinoctiotum invenire quantitatem nutationis.

Cum media æquinoctiorum præceſſio, quæ ex viribus Lunæ oritur, ſit annis ſingulis $\frac{3Q}{2tA}.\sqrt{(1 - \pi^2)}.B.360^\circ$, & revolutio nodorum lunaris orbitæ in plano eclipticæ abſolvatur diebus circiter 6803, ſive annis circiter 18.6; erit $\frac{3Q.}{8tA}\sqrt{(1 - \pi^2)}.B.18\frac{3}{5}.360^\circ$ præceſſio media, quæ haberi poterit in tranſitu nodi aſcendentis a ſolſtitiis ad æquinoctia. Ea vero eſſe debet ad variationem inclinationis mediæ æquatoris terreſtris cum plano eclipticæ habitam eodem tempore ut $p : \pm 4l.\sqrt{(1 - l^2)}$, quemadmodum jam dictum eſt. Itaque erit $\frac{\pm 3}{2p}\frac{Q.}{tA}l.\sqrt{(1 - l^2)}.\sqrt{(1 - \pi^2)}.B.18\frac{3}{5}.360^\circ$ angulus, quo axis Terræ ad eclipticæ axem nutabit: ſcilicet dum nodus aſcendens lunaris orbitæ erit in primis punctis Arietis, juxta Coroll. III. Probl. XIX. polus Terræ prioribus Cancri punctis accedet propius angulo

$\frac{3Q}{2ptA} . l . \surd(1 - l^2) . \surd(1 - \pi^2) . B . 18\frac{3}{5} . 360°$: eodemque angulo inde abibit longius dum nodus idem aſcendens ad primæ Libræ puncta perveniet: & tota obliquitatis eclipticæ variatio, ſeu nutationis quantitas in tota nodi revolutione erit

$$\frac{3Q}{ptA} . l . \surd(1 - l^2) . \surd(1 - \pi^2), B . 18\frac{3}{5} . 360°.$$

COROLLARIA.

I. Hæc igitur cum ſit omnis nutatio terreſtris axis vi Lunæ genita, ac ſit præceſſio media æquinoctiorum vi Solis, ac Lunæ genita annis ſingulis $\frac{3}{2tA}(1 + Q) . \surd(1 - \pi^2) . B . 360°$, cumque & illa 19″, & iſta 50.3″ eſſe debeat juxta recentiores obſervationes; erit $2Ql . \surd(1 - l^2) . 18\frac{3}{5} : p(1 + Q) = 19 : 50.3$.

Jam vero lunaris orbitæ inclinatio ad Eclipticam aſſumi poteſt 5°9′, ut in Inſtitutionibus Aſtronomicis Monnierii, & in priore editione tabularum a Majero ſtatuta eſt, & ſinus inclinationis eſt circiter $0.0898 = l$, coſinus $0.99596 = \surd(1 - l^2)$. Hiſce igitur numeris aſſumptis, & poſito $1 : p = 5 : 31.4159$, fiet $1 + Q : Q = 83675663 : 59690210$, & $1 : Q = 1 : 2.4886$, & vires Solis, ac Lunæ erunt quam proxime inter ſe ut $2 : 5$.

II. Quia vires Solis, ac Lunæ ſunt inter ſe ut materiæ quantitates directe, & reciproce ut cubi diſtantiarum a Terra, ſive ut denſitates ſimul, & cubi diametrorum directe, ac reciproce ut cubi diſtantiarum, vel denique directe ut denſitates, & cubi diametrorum apparentium conjunctim; denſitas Solis ad denſitatem Lunæ ſe habebit ut $1 : 2.4886$, & cubus diametri apparentis Lunæ ad cubum diametri Solis: ac poſita Solis diametro 32′ 12″, Lunæ 31′ $16\frac{1}{2}''$, erit denſitatum ratio $1 : 2.716$. Denique cum Terræ denſitas, juxta Coroll. II. Probl. I. Lib. I., ad denſitatem Solis ſe habeat ut $3.9889 : 1$, erit denſitas Terræ ad denſitatem Lunæ ut $39889 : 27160$: & cum veræ diametri Terræ, & Lunæ ſint inter ſe ut $365 : 100$, & quantitates,

ma-

materiæ ſint ut denſitates, & cubi verarum diametrorum conjunctim, erunt quantitates materiæ in Terra, & Luna ut 71.338:1.

III. Si annuæ præceſſionis quantitas 50. 3″ dividatur in ratione 2.49:1 fiet 35. 88″ media præceſſio annua æquinoctiorum, quæ ex Luna, & 14. 42″ quæ ex Sole orietur. Tota etiam præceſſio media, quæ ex Luna orietur, quarta parte revolutionis nodi aſcendentis erit 166. 8″ circiter: eaque cum juxta formulas Probl. XVII. eſſe debeat ad differentiam veræ, & mediæ preceſſionis in nodi tranſitu a punctis æquinoctialibus ad ſolſtitialia ut $p\pi . \surd(1-\pi^2) : 4l.(1-2\pi^2)$, ſubſtitutis ut antea numeris prodibit circiter 18″ æquatio maxima; quæ toti præceſſioni mediæ addenda erit dum nodus aſcendens ab æquinoctio verno regredietur ad hyemale ſolſtitium, detrahenda vero dum ab autumnali æquinoctio regredietur ad ſolſtitium æſtivum.

IV. Quod ſi in formula Coroll. I. Probl. XVI. ſcribamus 18″ loco R, erit æquatio præceſſionis annuæ 36″. coſ. MN. ſin. $9\frac{2}{3}{}^{\circ}$ = 6″. coſ. MN, & maxima æquatio annua erit 6″, eaque præceſſioni mediæ addenda erit cum nodus aſcendens lunaris orbitæ ad æquinoctium vernum perveniet, detrahenda vero cum nodus ipſe ad autumnale æquinoctium tranſibit, atque univerſim minuetur in ſimplici ratione coſinus diſtantiæ nodi aſcendentis a punctis æquinoctialibus. Ita cum exeunte Octobri anni 1773 nodus ad prima Libræ puncta pervenerit, pro anno illo minima æquinoctiorum præceſſio cenſeri poterit 44 $\frac{1''}{3}$. Vera autem præceſſio in mediam 50 $\frac{1''}{3}$ recidit anno 1778, ac facta eſt maxima anno 1783, ſcilicet $56\frac{1''}{3}$, ac pro anno quovis propoſito ex dato loco nodi aſcendentis præceſſio ad tabulas reduci poterit.

V. Si fiat ut ſinus totus ad ſinum diſtantiæ nodi aſcendentis lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus; ita 18″ ad quartum, habebitur tota æquatio, quæ dato nodi ipſius aſcendentis loco toti præceſſioni mediæ addenda erit, aut detrahenda. Quare erit 36″ differentia omnis maximæ, & minimæ præceſſionis, ſive differentia angulorum a polo Terræ una nodi aſcendentis revolutione circa polum eclipticæ deſcriptorum. At vero arcus a polo Terræ in hac omni aberratione deſcriptus circa polum, eclipticæ, ad centrum Terræ minorem ſub-

te-

tendet angulum in ratione sinus inclinationis axium Terræ, & eclipticæ ad sinum totum; ut ex se patet. Quare in hac ipsa ratione minuendo angulum 36″, ac deinde dimidium accipiendo fiet 7″ angulus, quo axis Terræ in plano coluri æquinoctiorum una nodi ascendenti revolutione hinc inde aberrabit a loco medio.

VI. Et cum nutatio omnis terrestris axis una nodi ascendentis revolutione sit 19″, erit $9\frac{1''}{2}$ angulus quo axis Terræ in plano coluri solstitiorum eodem tempore aberrabit hinc inde a loco medio. Quod si fiat ut sinus totus ad cosinum distantiæ nodi ascendentis lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus ita hæc dimidia nutatio, sive variatio dimidia inclinationis eclipticæ, & æquatoris ad differentiam inter variationem dimidiam, & variationem habitam dato tempore, per Coroll. II. Probl. XIX. habebitur tota nutatio, quæ dato nodi ascendentis loco respondebit. Ita si nodus ascendens Lunæ integro signo distet a punctis æquinoctialibus, erit nutatio $8\frac{1''}{4}$: si vero inde distet uno signo, atque insuper 10°, 15°, 25°, 30° nutatio erit $7\frac{1''}{3}$, $6\frac{2''}{3}$, $5\frac{1''}{2}$, $4\frac{2''}{3}$.

VII. Quod si denique bini motus hujusmodi, quibus Terræ polus aberrat a loco medio, sive in plano coluri æquinoctiorum, sive in plano coluri solstitiorum, componantur inter se invicem, omnis poli aberratio fiet in perimetro ellipseos, cujus centrum sit medius poli locus, major axis exæquet 19″ circuli unius maximi, & minor dumtaxat 14″, ac ille quidem in plano coluri solstitiorum, hic vero in plano coluri æquinoctiorum jaceat, ut ferunt accuratiores observationes: in quovis enim puncto perimetri hujus ellipseos omnis poli aberratio ab hoc coluro erit ut sinus, ab illo autem coluro erit ut cosinus distantiæ nodi ascendentis lunaris orbitæ a punctis æquinoctialibus.

SCHOLION.

Jam igitur ex legibus gravitatis erutum, atque explicatum est phænomenon longe pulcherrimum, atque eruta etiam est ratio virium Lunæ, & Solis, ac quantitas aberrationis terrestris axis a loco medio, nutationisque, quæ iisdem viribus inducitur. Et quidem cum media præcessio

æqui-

æquinoctiorum, quæ ex Sole oritur, sit fere $14\frac{2''}{5}$, ut in Coroll. III. antecedente notatum est, atque in hypothesi Terræ totius solidæ, & nuclei sphærici exteriore terra densioris, ut phænomena omnia ponderum polos versus crescentium videntur indicare, cum juxta Coroll. V. Probl. X. præcessio annua circiter 18″ esse debeat; vis omnis, quæ vere a Sole in exteriorem terram exercetur, quæque ad motum punctorum æquinoctialium impenditur, ad vim quæ in hypothesi Terræ totius solidæ similiter exerceretur, se habebit circiter ut 5:6. Itaque non nisi pars circiter sexta integræ vis supererit, quæ cum in fluidam terræ exterioris partem exerceatur, nihil ad motum punctorum æquinoctialium, atque ad nutationem axis terrestris conferat. Mihi enim adhuc videtur evidens quod cum fluida viribus quibuscumque impulsa, & agitata pressionem suam versus quamcumque partem æqualiter in solida corpora exerceant, dato Solis, & Lunæ loco æquilibrium fluidarum partium sub oblongæ sphæroidis forma undique habebitur, nullus vero ex earum attractione totius massæ terrestris motus, nulla axis nutatio haberi poterit, ut recte etiam ab Alemberto notatum est §. LXXXIII. de præcessione æquinoctiorum. Dum autem ratione diurni motus oblongæ sphæroidis culmen a locis orientalibus occidentalia versus decurret, ut supra notatum est in Coroll. VI. Theor. III. Lib. III., ex ictu fluidarum partium in solidas, qui ab oriente semper in occidentem dirigitur, nulla omnino nutatio axis ab austro in septentrionem, sed aliqua tantum diurni motus orientem versus concepti retardatio haberi poterit, eaque non nisi omnino exigua debebit esse, & quod differentia altitudinum marini æstus sub æquatore non sit nisi 7, aut 8 pedum, & quod tam modicæ aquarum copiæ occidentem versus decurrentis incursus non nisi in orientalia Americæ littora potissimum spectari debeat, atque in eam Africæ partem, quæ ab oriente in austrum magis protenditur. Denique dum ratione motus periodici oblongæ sphæroidis culmen ab æquatore ad tropicos excurrit, quicumque inde ictus solidæ telluris massæ ab austro ad boream imprimi intelligatur, & pariter ob exiguam culminis differentiam omnino exiguus debet esse, & contraria ratione exerceri debet dum culmen idem revertetur ad æquatorem, & diurni motus veloci-

tas

tas restituetur in gradum pristinum, ut in Coroll. II. Probl. II. notatum est. Neglecta igitur vi, quæ in fluidam terræ partem exercetur, cum fluida eadem pars sexta circiter statuenda sit totius terræ, quæ extra inscriptam sphæram redundat, cumque circa æquatorem, ubi vires Solis, & Lunæ ad terram omnem a nodorum linea retrahendam potiores sunt, marium superficies plusquam quinque sextas partes zonæ totius exæquet, sit vero hexapedarum circiter 14199 differentia radiorum Terræ sub polis, & æquatore; manifestum est rursus quod jam in appendice Cap. I. Lib. III. notatum fuerat, profunditatem marium nonnisi quatuor, tribus, duabus leucis multo minorem assumi posse. En igitur quibus hypothesibus phænomenis simul omnibus satisfieri possit simplicius: primo scilicet graduum terrestrium observationibus, quantum diligentia cujusque observationis postulat, satisfiet si minor semiaxis Terræ ad majorem statuatur esse ut 230 : 231 circiter, deinde pendulorum experimentis satisfiet si terra omnis exterior, quæ circa inscriptam sphæram redundat, quinta circiter sui parte interiore terra sit rarior: ac denique satisfiet phænomenis omnibus præcessionis æquinoctiorum, nutationisque terrestris axis si materies redundans circa æquatorem sexta circiter sui parte censeatur fluida, atque in hac etiam hypothesi cum exigua esse debeat marium profunditas, marini æstus phænomena inter se componi, atque explicari omnia poterunt.

CAPUT SEXTUM.

DE MOTU OSCILLATIONIS, ET LIBRATIONIS LUNÆ CIRCA AXEM PROPRIUM.

PROBLEMA XXII.

SI Luna oblongæ sphæroidis formam, & majorem axem proxime ad Terram obversum habeat, librationis circa centrum conceptæ velocitatem, ac tempus determinare.

Sit in fig. 52 centrum Terræ S, Lunæ T, ac referat QTq planum

num per centrum T perpendiculariter ad ST traductum, & Lunæ figura ea ſit, quæ gigni poſſet ellipſi $PBpb$ circa majorem axem Bb revoluta. Si m ſit ſinus, & n coſinus anguli STB, poſitis aliis octavi problematis denominationibus, erit $\frac{4}{15}\, mn.P.p.B.C^4$ momentum virium, quibus oblonga ſphærois inclinari debet circa axem plano STB perpendicularem, ac poſitō inſuper quod maſſa Terræ ad maſſam Lunæ ſe habeat ut $M:1$, atque in illa a plano QTq diſtantia, quæ unitate exprimatur, ſit vis perturbatrix $P = \frac{3M}{ST^3}$, erit momentum idem $\frac{4}{15} mn.pB.C^4.\frac{3M}{ST^3}$: quod cum æquari debeat momento rotationis inde ortæ, ſi ſphærois accedat proxime ad ſphæram, erit vis acceleratrix, qua ſemiaxis majoris BT polus ad rectam ST abducetur $\frac{3M.\,mn.B}{ST^3}$. Cum igitur ob exiguum angulum STB ſit proxime $n = 1$, polus ipſe, ac ſphærois omnis circa centrum T eadem ratione oſcillabitur ac corpus aliquod quod radio BT ſuſpendatur ex centro T, & parallele ad TS impellatur conſtanter vi $\frac{3M.B}{ST^3}$; ac juxta tangentem arcus circa centrum deſcripti impellatur vi $\frac{3M.B}{ST^3}.\,m$, quæ in arcu exiguo eſt proxime proportionalis diſtantiæ a puncto infimo. Itaque oſcillationes erunt æquidiurnæ, & juxta alia Mechanicæ thoremata tempus integræ oſcillationis ad tempus deſcenſus, qui per dimidium Lunæ ſemiaxem BT, ſive A vi eadem $\frac{3M.B}{ST^3}$ gigni poſſet, ſe habebit ut peripheria circuli ad diametrum, ſive ut $p:2$. Tempus autem deſcenſus per ſemiaxem Lunæ ad tempus deſcenſus per dimidium radium lunaris orbitæ vi eadem geniti ſe haberet ut $\sqrt{\frac{1}{2}A} : \sqrt{\frac{1}{2}ST}$: atque inſuper tempus deſcenſus vi $\frac{3M.B}{ST^3}$ ſe habere: ad tempus deſcenſus geniti vi gravitatis $\frac{M}{ST^2}$, ut

$\sqrt{\left(\frac{M}{ST^2}\right)} : \sqrt{\left(\frac{3M.B}{ST^2}\right)}$: ac denique tempus descensus per dimidium radium lunaris orbitæ vi gravitatis geniti juxta Coroll. I. Probl. II. Lib. I. se haberet ad tempus integræ revolutionis Lunæ ut radius ad peripheriam, sive ut $1 : p$. Compositis igitur rationibus tempus unius oscillationis Lunæ circa suum centrum erit ad tempus revolutionis Lunæ circa Terram ut $1 : 2\sqrt{\left(\frac{3B}{A}\right)}$.

COROLLARIA.

I. Tempus igitur unius oscillationis Lunæ ob sphæroidis oblongæ formam Terræ attractione acquisitam circa suum centrum erit periodicorum mensium $\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{A}{3B}\right)}$: & si ratio semiaxium assumatur illa quæ in Coroll. II. Probl. X. statuta est, ac fiat $\frac{B}{A} = \frac{1}{39263}$, unius oscillationis tempus erit periodicorum mensium 57 circiter. Elegantem problematis hujus formulam exhibuit primum D. la Grange §. XX. dissertationis de Libratione Lunæ, quæ anno 1764 a Parisiensi Academia præmium obtinuit. Aliud autem oscillationis unius tempus §. XXII. ejusdem dissertationis, aliud §. LXXXI. dissertationis alterius anno 1782 editæ author idem supputavit, quod rationes alias semiaxium Lunæ assumpserit. Posita $B = 0$ nulla esset hujusmodi oscillatio, eaque evaderet imaginaria si differentia semiaxium B negative deberet accipi.

II. Quod si igitur statuere nolit quispiam primitivam vim impulsionis non omnino ad distantiam partis $\frac{1}{547\frac{1}{2}}$ radii Lunæ ab ipsius centro impressam fuisse, neque omnino æqualia primum prodiisse tempora revolutionum Lunæ circa Terram, & circa suum centrum conceptarum, ut in postrema libri secundi appendice notatum est, assumpta hypothesi Lunæ Terram versus oblongæ is explicare poterit cur eadem semper Lunæ facies ad Terram retrahi, & obverti debeat: quam explicandi phænomeni rationem indicavit primum Newtonus in co-

corollario Propof. XXXVIII. Lib. III. Princip. cum ratione figuræ oblongæ fieri dixit quod eadem femper Lunæ facies ad Terram obvertatur, neque in alio fitu confiftere poffit lunare corpus, fed exiguis femper ofcillationibus ad Terram reverti debeat.

PROBLEMA XXIII.

Motum nodorum lunaris æquatoris in plano eclipticæ, nutationemque axis rotationis Lunæ determinare.

Sit in fig. 56. planum $CNMm$ per centrum Lunæ T ductum eclipticæ parallelum, ac fit planum lunaris orbitæ $DOMm$, & planum lunaris æquatoris $ANOBn$, atque ita duo alia inter plana planum eclipticæ fit medium. Fiat etiam femiaxis major lunaris corporis $TA = A$, differentia femiaxis majoris, ac minoris $= B$, atque ut antea fit l finus anguli OMN inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam, π finus anguli ANC inclinationis æquatoris Lunæ ad eclipticam, q cofinus arcus NM diftantiæ nodorum æquatoris, & orbitæ lunaris cum plano eodem eclipticæ. Si in formula Coroll. II. Probl. X. ob inclinationem exiguam lunaris æquatoris ad eclipticam fiat $\sqrt{(1-\pi^2)} = 1$, & ob æqualitatem temporum revolutionis Lunæ circa Terram, & circa axem proprium fiat $t = 1$, formula eadem a terreftri æquatore ad lunarem translata erit modus medius nodorum lunaris æquatoris in plano eclipticæ fingulis Lunæ circa Terram revolutionibus $\frac{3B.360°}{2A}$. Deinde fi motus hujufmodi vocetur m, & fit n motus nodorum lunaris orbitæ fingulis Lunæ revolutionibus vi Solis genitus, juxta formulam Probl. XIV., dato nodorum loco erit medii ejufdem motus æquatio $\frac{3B}{2A}.\frac{lq}{\pi}.360°$, & juxta formulam alteram Probl. XVII. nodis per totam orbitam decurrentibus erit maxima medii motus æquatio $\frac{ml.360°}{p\pi.(n-m)}$. Denique juxta Coroll. II. Probl. XII. in tranfitu nodorum a conjunctione Terræ ad quadraturas totus nodorum motus ad variationem inclinationis mediæ æquatoris fe habebit ut $\frac{1}{4}p:\pi$, & juxta Problema XX. pro quolibet nodorum loco erit nutatio omnis lunaris axis vi Terræ genita $\frac{ml.\sqrt{(1-l^2)}.360°}{p.(n-m)}$.

COROLLARIA.

I. Si fiat $\frac{B}{A} = \frac{1}{39263}$, quod juxta Coroll. II. Probl. X. Lib. II. in Luna fluida, & homogenea, atque ad Terram attracta haberet locum, motus medius nodorum lunaris æquatoris in plano eclipticæ singulis Lunæ revolutionibus erit circiter $50''$: ac posito $\frac{B}{A} = \frac{1}{117525}$, quod juxta Coroll. III. Probl. XI. ejusdem libri haberet locum in Luna fluida, & homogenea, & circa axem revoluta, modus medius periodicus inde ortus erit circiter $16\frac{1''}{2}$: & fiet singulis Lunæ revolutionibus motus nodorum omnis, & qui ex oblonga, & qui ex oblata Lunæ olim fluidæ, & homogeneæ forma oriri potest $1'\,6\frac{1''}{2}$ circiter, & annis singulis fere $14\frac{1'}{2}$.

II. Cum motus annuus nodorum lunaris orbitæ in plano eclipticæ assumi possit $19°\,21'$ si hujusmodi numerus accipiatur loco n, ac fiat $m = 14\frac{1'}{2}$, atque insuper si inclinatio lunaris orbitæ ad eclipticam statuatur $5°\,9'\,8''$, inclinatio lunaris æquatoris $1\frac{1°}{2}$, ac sit propterea $l = 0.08979$, & $\pi = 0.026177$, erit maxima æquatio medii nodorum motus $2\frac{1°}{2}$. Quæ motus nodorum quantitas eo tantum differt a numeris, quos D. la Grange supputaverat in duabus dissertationibus jam memoratis, quod aliam ipse assumpserit massarum Terræ, & Lunæ, ac semiaxium Lunæ rationem, aliam inclinationem lunaris æquatoris ad eclipticam. Alembertus motum nodorum in Luna oblonga dimidium tantum invenerat, quod momentum oblongæ sphæroidis circa minorem axem dimidio minus supputasset, ut in Coroll. I. Probl. VIII. notatum est.

III. Cum ob æqualitatem momentorum oblongæ, atque oblatæ sphæroidis iisdem semiaxibus descriptæ, idem haberi debeat motus nodorum Lunæ, quæ aut oblata tantum, aut tantum oblonga sit, & in qua differentia semiaxium sit $\frac{1}{39263} + \frac{1}{117525} = 0.0000255 +$ o.

$0.0000085 = 0.0000345$; in ea homogeneitatis, & primitivæ fluiditatis hypothesi maximus nodorum motus annis singulis esse poterit $2\frac{3^\circ}{4}$ circiter. Is autem motus cum sit proportionalis differentiæ semiaxium $\frac{B}{A}$, si differentia hujusmodi tanto assumatur major, ut motus omnis nodorum lunaris æquatoris in plano eclipticæ fiat annis singulis 19° 21'; posito $m = n$, binæ æquationes posteriores motus nodorum, nutationisque axis infinitum valorem exhiberent. Reassumendo autem formulas Probl. XIV., & XV., in hoc casu constans statuenda esset quantitas illa q, qua designatur cosinus distantiæ nodorum æquatoris, & orbitæ lunaris cum plano eclipticæ, & nullus jam amplius Problemati XVI., & formulis aliis subsequentibus esset locus.

PROBLEMA XXIV.

Indicare simpliciores hypotheses, quibus lineæ nodorum lunaris æquatoris, & lunaris orbitæ in plano eclipticæ sibi semper parallelæ esse possint.

Si motus utriusque lineæ, qua Lunæ æquator, & qua Lunæ orbita planum eclipticæ intersecat, idem statuatur, cum motus annuus nodorum lunaris orbitæ sit circiter 19° 21', & singulis Lunæ revolutionibus 1° 26, 8', positis aliis antecedentibus denominationibus universim erit $\frac{1^\circ\ 26,\ 8'}{360^\circ} = \frac{3B}{2A}\left(1 + \frac{lq}{\pi}\right)$, & $\frac{B}{A} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1^\circ 26,8'}{360^\circ} \cdot \frac{\pi}{\pi + lq}$.
Quod si jam in fig. 56. puncta N, O, M simul congruant, & æquatoris Lunæ $ANOBn$, & lunaris orbitæ $DOMm$ communis sit intersectio cum plano $CNMm$, quod est eclipticæ parallelum, fiet $q = 1$, atque eadem intersectio parallela erit rectæ, qua planum eclipticæ, & planum lunaris orbitæ in centro Terræ se intersecant, eoque in casu erit $\frac{B}{A} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1^\circ 26,8'}{360^\circ} \cdot \frac{\pi}{\pi + l}$. Patet autem ex formulis Probl. IX., & X. quantitatem illam $\frac{B}{A}$ prodire momentum virium in materiam illam agentium, quæ in sphæroide oblonga, aut oblata extra inscriptam sphæram redundat, dividendo per momentum virium totius sphæ-

ſphæroidis. Eo igitur in caſu innoteſcet quæ momentorum ratio, aut ſi ſphærois homogenea ſtatuatur, quæ ratio ſemiaxium eſſe debeat. At inſuper ex Coroll. IV., & V. Probl. X. manifeſtum eſt quod ſi $\frac{B}{A}$ exprimat rationem differentiæ ſemiaxium, atque in centro ſphæroidi homogeneæ intelligamus nucleum ſphæricum ſuperaddi, atque eſſe nuclei radium c, & Δ differentiam denſitatum nuclei, & materiæ circumpoſitæ, loco $\frac{B}{A}$ in formulis præcedentibus ſcribere oportebit $\frac{B}{A.\left(1+\frac{\Delta c^5}{A^5}\right)}$.

Erit igitur in hac altera hypotheſi $\frac{B}{A} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1°26,8'}{360°} \cdot \frac{\pi}{\pi+l} \cdot \frac{A^5}{A^5+\Delta c^5}$: ac denique ſi intelligamus nucleum ad uſque extimam ſphæroidis ſuperficiem pertingere erit $\frac{B}{A} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1°26,8'}{360°} \cdot \frac{\pi}{\pi+l} \cdot \frac{1}{1+\Delta}$.

COROLLARIA.

I. Primo igitur ſi Luna omnis homogenea cenſeatur, & inclinatio æquatoris Lunæ ad eclipticam aſſumatur $1\frac{1°}{2}$, ut in poſtrema appendice libri ſecundi ſtatutum eſt, numeris aliis qui antea ſubſtitutis prodibit $\frac{B}{A} = 0.0006$: quod ſi inclinatio eadem aſſumatur 2° fiet $\frac{B}{A} = 0.00075$, quem proxime numerum protulerat D. la Grange §. XXIX. Diſſertationis de libratione Lunæ. In hypotheſi nuclei denſioris minor etiam differentia ſemiaxium ad ſervandum paralleliſmum utriuſque nodorum lineæ ſufficiet: erit enim $\frac{B}{A} = \frac{0.00075}{1+\Delta}$, & differentia B præ ſemiaxe majore A erit in ratione inverſa denſitatis nuclei præ tota exterioris materiæ denſitate.

II. Poſito etiam quod binæ nodorum lineæ inter ſe maneant parallelæ, atque in formulis Probl. XVII. poſito ſin. $NO = o$, nulla erit axis, & æquatoris Lunæ variatio, quæ analoga ſit nutationi terreſtris axis. At juxta formulas Probl. XII. pro vario aſpectu Terræ, & nodorum lu-

lunaris æquatoris æquator ipſe ad eclipticam diverſimode inclinabitur & variatio omnis habita eo tempore, quo linea nodorum a conjunctione Terræ tranſibit ad quadraturas erit $\frac{1}{4} . 19^\circ 21' . \frac{\pi}{\frac{1}{4}p} = 19^\circ 21' . \frac{\pi}{p}$

& loco π accipiendo ſin. $1\frac{1^\circ}{2}$ erit inclinationis variatio $9\frac{3'}{4}$ circiter. Quare ſi $1\frac{1^\circ}{2}$ ſit media inclinatio æquatoris Lunæ ad eclipticam erit inclinatio maxima $1^\circ 35'$, minima $1^\circ 25'$.

III. Quod ſi denique in formula $\frac{B}{A} = \frac{2}{3} . \frac{1^\circ 26, 8'}{360^\circ} . \frac{\pi}{\pi + l}$ loco π ſucceſſive accipiantur ſinus $1^\circ 35'$, & $1^\circ 25'$, bini habebuntur limites intra quos fractio $\frac{B}{A}$ conſiſtet, eruntque hujuſmodi limites 0.00063, & 0.00057. Clariſs. la Grange §. 97. ſecundæ Diſſertationis de libratione Lunæ minoribus aliis terminis ſupputatis, & poſita inclinatione media 2°, limites differentiæ momentorum relatæ ad momentum omne invenit eſſe 0.0006746, & 0.0005149: & cum deinde animadvertiſſet §. 99. id in Luna ſphæroidica, & homogenea eſſe non poſſe niſi in Luna materiæ quanritas minor quam pars milleſima ſit maſſæ Terræ, quod cum phænomenis præceſſionis æquinoctiorum, nutationis terreſtris axis, fluxuſque, ac refluxus maris conciliari ne quit concludendum jam eſſe cenſuit Lunam aut non eſſe homogeneam, aut ea figura non eſſe præditam, quæ ex attractione Terræ, atque ex motu rotationis in hypotheſi primitivæ fluiditatis oriri poterat.

SCHOLION.

En igitur eadem methodo, qua problemata terreſtris axis reſolvimus, erutas modo formulas omnes librationis Lunæ, & ſingulare phænomenon explicatum duarum rectarum, in quibus lunaris orbira æquatoris lunaris planum, & planum Eclipticæ interſecat, inter ſe ſemper parallelarum. Quæ cum ad numeros formulæ aſſumptis variis hypotheſibus deductæ ſint, cumque circa quantitatem partium ſolidarum non niſi vagæ, incertæque hypotheſes confingi poſſint; hypotheſis etiam Lunæ primitus fluidæ, & attractione Terræ Terram ver-

verſus, dum ſolida fieret, oblongatæ nullum analogiæ fundamentum habet, cum Terra, & Jupiter ſphæroidis non oblongæ, ſed compreſſæ figuram referant. Huic tamen hypotheſi cum aliam adjunxiſſent temporum, quibus Luna circa Terram, & circa ſuum axem volvitur, non omnino inter ſe æqualium qui olim ſummus erat Angliæ Mathematicus, & qui modo eſt ſummus Mathematicus Italiæ explicarunt cur idem ſemper Lunæ hemiſphærium exiguis oſcillationibus ad Terram perpetuo retrahi, ſemperque ad terram obverti debeat. Idem autem phænomenon ejuſdem faciei Lunæ ad Terram ſemper obverſæ explicari poterit unica tantum hypotheſi aſſumpta quod periodica Lunæ tempora, & circa axem, & circa Terram, initio ſtatuta fuerint inter æqualia, quodque propterea prior impulſionis vis ad diſtantiam partis $\frac{1}{147\frac{1}{2}}$ radii Lunæ ab ipſius centro impreſſa fuerit.

Nihil etiam omnino certi proponi poteſt circa limites momentorum; ſemiaxium, & denſitatis Lunæ oblatæ, aut oblongæ, unde pendet phænomenon paralleliſmi lineæ nodorum lunaris orbitæ, & lunaris æquatoris in plano eclipticæ. Nam cum limites illi colligantur ex limitibus maximæ, & minimæ inclinationis æquatoris Lunæ ad Eclipticam, ſit autem 10′ differentia omnis, quæ in calculo aſſumi poteſt, obſervationes autem pluſquam 30′ differant inter ſe, & minoribus aliis differentiis definiendis obſervationes prorſus ſint impares, in phænomenis hujus generis nihil unquam ſupputari poterit, quod cum obſervationibus comparetur. At vero ad Theoriæ hujus Geometricæ complementum videndum ſupererat num evolutis problematis librationis Terræ Geometria ſimplex par eſſet eruendis aliis librationis lunaris formulis, quæ primum analyſeos ſublimioris præſidio inventæ fuerant. Videbimus modo quid in ſupputandis periodicorum motuum perturbationibus ſyntheſis præſtare poſſit, quid reſervari debeat analyſi.

LI-

LIBER QUINTUS.

DE SYNTHESI PERTURBATIONUM IN ORBITIS PROXIME CIRCULARIBUS.

Astronomi veteres non nisi priores binas motuum lunarium inæqualitates, easque non satis accurate agnoverant, æquationem centri Hipparchus, & Ptolemæus correctionem illam æquationis centri, quæ proprie evectio dici solet. Cum enim Hipparchus variationem medii motus Lunæ quinque aut sex graduum esse dixisset, comparatis inter se Hipparchi observationibus Ptolemæus deprehendit medii, & veri motus Lunæ differentiam non esse minorem 5° cum linea apsidum lunaris orbitæ lineam a Terra ad Solem ductam intersecat ad rectos angulos: esse vero $7\frac{2^{\circ}}{3}$ cum linea eadem apsidum dirigitur ad Solem: adeoque mediocrem æquationem centri constituit Ptolemæus $6\frac{1^{\circ}}{3}$, evectionem $1\frac{1^{\circ}}{3}$; atque a motu medio detrahendam esse monuit evectionem cum novilunium, ac plenilunium in quadraturis apsidum contingit, addendam vero cum Luna simul in quadraturis Solis, & lineæ apsidum reperitur. Cum in theoria lunari non amplius Astronomi veteres profecerint; tertiam Lunæ inæqualitatem detexit Tycho, quæ proprie variatio dicitur, ac pendet ex angulari Lunæ distantia a Sole, aliamque insuper inæqualitatem, quæ dicitur æquatio annua, ac pendet ex distantia Terræ a summa apside orbitæ descriptæ circa Solem: & variationem quidem $39'$, aut $40'$, annuam vero æquationem plusquam $11'$ Tycho esse statuit. Æquationem etiam medii motus nodorum, variationemque inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam ex observationibus collegit Tycho, & maximam differentiam veri, mediique nodorum motus deprehendit esse $1^{\circ}\ 46'$: inclinationem maximam lunaris orbitæ ad eclipticam $5^{\circ}\ 17\frac{1'}{2}$ esse invenit in quadraturis Lunæ cum Sole, & nodis, minimam $4^{\circ}\ 58\frac{1'}{2}$ cum Sol, & Luna conjunguntur, & a nodorum linea distant quadrante integro.

Quæ Tycho ex Aſtronomicis obſervationibus ex theoria gravitatis univerſalis Newtonus calculo quodam ſynthetico collegit, qui mihi ſemper elegantiſſimus, atque ingenioſiſſimus viſus eſt, quemque cum ſtudioſius perſequerer & ſimpliciorem effeci, & aliis etiam aptavi Lunæ inæqualitatibus ſupputandis, & æquationi illi imprimis, quæ variatio ſecunda a Newtono appellabatur, quæque proportionalis eſt ſinui diſtantiæ ſimplicis Lunæ a Sole, cum prior illa variatio Tychonis proportionalis ſit ſinui duplæ diſtantiæ Lunæ a Sole, & in octantibus fiat maxima. Et quidem juxta Newtoni theoriam, ſi media Lunæ a Sole diſtantia vocetur X, eſſet prima Lunæ variatio $37' 11'$ ſin. $2X$ in perigæo Solis, in apogæo $33' 14''$ ſin. $2X$, atque eſſet variatio mediocris $35' 12 \frac{1}{2}''$ ſin. $2X$, ut a Gregorio etiam in Propoſ. XXXIX. Lib. IV. Aſtronomiæ Phyſicæ, ac Geometricæ notatum eſt. Huic æquationi æquationem aliam — $2' 20''$. ſin. X adjungendam eſſe cenſuit Newtonus, & detrahendam a motu medio cum Luna a conjunctione Solis ad oppoſitionem tendit, addendamque in reditu ab oppoſitione ad conjunctionem cum ſin. X ſit negativus. Hæc vero æquatio, & evectio, & minores aliæ æquationes, quas in ſcholio theoriæ lunaris Newtonus, atque in tabulis ſuis Flamſteedius adjecerat, non niſi ex obſervationibus deductæ ſunt. Ego cum variatæ inclinationis, & motum nodorum calculum Newtoniana methodo ſatis accurate haberi agnoviſſem, calculum tamen variationis utriuſque nec mea methodo accuratiſſime haberi deprehendi, quod ob excentricitatem lunaris orbitæ quantitates plures exiguas in hujuſmodi calculo negligere oporteat. Animadverti tamen in orbitis Satelitum Jovialium accuratiſſimam eſſe methodum, cum binæ interiores orbitæ omnino circulares ſint, & tertii ac quarti Satellitis orbitæ excentricitatem paulo majorem habeant excentricitate orbitæ Veneris: atque ita facile ex theoria gravitatis collegi æquationes illas Satellitum, quæ analogæ ſunt primæ, & ſecundæ variationi Lunæ, quaſque cum ex obſervationibus omnibus collegiſſet Wargentinus ſummi Aſtronomi gloriam eſt aſſecutus.

Bradlejus in notis ad Hallæi tabulas jam adnotaverat aliquam eſſe inæqualitatem motus in tribus prioribus Jovis Satellitibus, & u-

uniuſcujuſque inæqualitatis periodum eamdem eſſe, qua tres Satellites ad eumdem aſpectum redeunt inter ſe invicem, ſcilicet periodum eſſe dierum circiter 437, quo tempore primus Satelles abſolvit revolutiones 147, ſecundus 123, tertius 61. Reverſionis periodum Wiſthonus periodicorum temporum collatione accuratius definivit $437^{d}\ 3^{h}\ 40'$. Wargentinus in Actis Upſalienſis Academiæ annorum 1741, 1742, & 1743 obſervationibus omnibus Satellitum diligentiſſime inter ſe collatis æquationem cujuſque Satellitis, quæ pendet ex loco alterius, determinavit, eamque idcirco empyricam appellavit, quod ex phænomenis primo colligeretur: indicavit autem qua ex cauſa proficiſceretur, ſcilicet ex actione Satellitum in ſe invicem. Hiſce autem æquationibus definitis, & æquationibus aliis motus Jovis, & ſucceſſivæ lucis propagationis ſummo ſtudio recognitis, correctiſque Wargentinus generales tabulas motuum Satellitis cujuſque exhibuit. Quæ ad æquationes empyricas pertinent præcipua ſunt: primum Satellitem maxime accelerari quando in umbra Jovis cum ſecundo Satellite ſimul verſatur, & propterea ipſi conjungitur, circa oppoſitionem vero adhuc primum Satellitem celeriorem eſſe quam in quadraturis: ſecundum Satellitem maxime retardari in conjunctionibus, & accelerari in oppoſitionibus cum primo: ac ſimiliter tertii motum retardari in conjunctionibus ſecundi Satellitis, & in oppoſitionibus accelerari. Maximam differentiam medii, & veri motus in primo, ac tertio Satellite Wargentinus fere $7'$ eſſe ſtatuit, in ſecundo $34'$, in quarto $1^{h}\ 8'$: ut propterea dimidium accipiendo ſit $3\frac{1'}{2}$ quantitas quæ in conjunctionibus primi Satellitis addi debet, & in quadraturis ſubtrahi: ac $17'$ ſit quantitas quæ in oppoſitionibus ſecundi Satellitis cum primo addi debet, & ſubtrahi in conjunctionibus. Æquatio autem $3\frac{1'}{2}$ temporis in primo Satellite reſpondet arcui $29\frac{1'}{2}$; & in ſecundo Satellite æquatio $17'$ temporis reſpondet arcui $1\frac{1^{\circ}}{5}$. D. Bailly in tabulis Satellitum Jovialium, quas ex theoria gravitatis deduxerat, & cum obſervationibus omnibus comparaverat, octoginta obſervationibus ſatisfieri dixit ſi æquatio ſecundi Satellitis in maxima ſui quantitate aſſumatur $\mp 1^{\circ}\ 9'\ 42''$. Æ-

Tt 2 qua-

Satellitum esse poterit $\mp 1\frac{1^\circ}{5}$. Simili modo quia motus tertii, & quarti Satellitis non admodum recedit a ratione dupla, censeri poterit motum medium tertii Satellitis fere post conjunctionem secundi imminui ipsius actione, & post oppositionem augeri. At insuper in tertio Satellite alia exigua inæqualitas est, quæ ob exiguam habetur orbitæ excentricitatem, & in quarto Satellite, quæ potior est, inæqualitas motus habetur ob excentricitatem orbitæ. D. Bailly in suis tabulis maximam centri æquationem in secundo Jovis Satellite statuit esse anguli 10′, in quarto Satellite 50′ 20″.

Cassinus cum observasset Satellitum Jovialium semitas parallelas videri iis zonis, quæ in Jovis disco habentur, & quæ parallelæ sunt æquatori revolutionis Jovis circa axem proprium, cumque agnovisset planum idem æquatoris Jovis tribus fere gradibus inclinari ad planum orbitæ a Jove circa Solem descriptæ; statuit hanc ipsam esse communem orbitarum quatuor Satellitum ad planum orbitæ Jovis inclinationem: extimi autem Satellitis Saturni inclinationem ad planum orbitæ Saturni statuit Cassinus 13° 18′, quatuor aliorum Satellitum inferiorum fere 31°, quæ fere annuli Saturnum circumambientis est inclinatio. Wargentinus in Actis Upsaliensis Academiæ ut positionem orbitarum accuratius determinaret semimoras eclipsium contulit inter se, atque iis collatis deprehendit inclinationem orbitæ primi Satellitis constantem esse: inclinationem secundi imminui singulis annis 15, aut 16, & post annos totidem in pristinum statum reverti: inclinationem tertii Satellitis majorem fuisse medio hoc sæculo, quam fuerat sæculo ineunte: quarti autem inclinationem esse invariabilem. Distantiæ Satellitis cujusque a centro Jovis, inclinationes orbitarum, & tempora, quibus Satellites ad conjunctionem redeunt inter se, quæ ex observationibus collegerat Astronomus celeberrimus, sunt ut in tabula sequente

Distantiæ.		Tempora synodica.	Inclinatio.	Maxima.	Minima.
I.	5,857.	Semid. 1ᵈ 18ʰ 28′ 36″.	2° 57′ 49″.		
II.	9,343.	Jovis. 3. 13. 17. 54.		3° 50′	2° 33′.
III.	15,047.	7. 3. 59. 36.		3°	3° 17′.
IV.	25,998.		2° 28′.		

Præ-

Præcipuum hujus generis phænomenon eſt, quod Tycho omnium primus deprehendit, obliquitatem eclipticæ continue imminui, non quia æquatoris planum ad planum immobile Eclipticæ continue accedat, ut jam antea ſuſpicatus fuerat Copernicus, ſed quia planum idem Eclipticæ accedat ad immobile planum æquatoris, augeanturque ad boream, & ad auſtrum minuantur diſtantiæ fixarum a ſex prioribus ſignis Eclipticæ, atque in ſex aliis ſignis contrarium accidat, ut recte Tycho ipſe collatis latitudinum obſervationibus oſtendit. Nam ſi omittantur etiam vetuſtiores Pytheæ, Eratoſthenis, & Ptolemæi obſervationes, quæ nimium incertæ, ac dubiæ videntur eſſe, Aſtronomorum Arabum primus Albategnius, qui obſervationes ſuas ope altiſſimorum gnomonum inſtituere cœpit, anno æræ vulgaris 750 obliquitatem Eclipticæ deprehendit eſſe $23^\circ\ 35'$: Thebit anno 901 eamdem ſtatuit $23^\circ\ 33\frac{1'}{2}$, & Mahmud anno 992 dumtaxat $23^\circ 32\frac{1'}{2}$. Tycho, aliique Aſtronomi ſæculi decimi ſexti inclinationem Eclipticæ invenerunt $23^\circ\ 31'$: ut etiam ferunt Copernici obſervationes, ſi numeris Copernici $2'$ addantur ob correctiones omnes refractionis. Ex Flamſteedii obſervationibus anno 1691 menſe Junio prodiit Eclipticæ obliquitas $23^\circ\ 29'\ 3''$: unde quia tunc temporis nodus aſcendens lunaris orbitæ reperiebatur circa 20° Piſcium, detrahendo $8''$ ob nutationem terreſtris axis, fuiſſet obliquitas media $23^\circ\ 28'\ 55''$: quæ anno 1750 cum $23^\circ\ 28'\ 19''$ a Caillio obliquitas ſtatuta fuerit, obliquitatis imminutio eſſet $36''$ tempore annorum 59, & integro ſæculo eſſet circiter unius minuti primi. Caſſinus in elementis Aſtronomiæ ex ſerie plurium obſervationum collegit imminutionem obliquitatis Eclipticæ annis 66 eſſe $30''$, & integro ſæculo $45\frac{1''}{2}$: fere ut a Caillio etiam in tabulis Aſtronomicis ſtatuta eſt. Clariſs. Maskelinius correctis Arabum obſervationibus, atque additis æquationibus præceſſionis, nutationis &c., iiſque inter ſe, & cum aliis obſervationibus recentioribus comparatis, miro omnium conſenſu ſæcularem imminutionem obliquitatis Eclipticæ, cum Grenovicii eſſem, prodire dixit $50''$, & obliquitatem mediam anno 1756 conſtituit $23^\circ\ 28'\ 16''$. Has ego determinationes aliis præferam in capitulis ſubſequentibus quod ſint omnium accuratiſſimæ.

Eu-

Eulerus in dissertatione de variationibus obliquitatis Eclipticæ ; quæ legitur in Actis Berolinensibus anni 1754 , primus omnium animadvertit imminutionem obliquitatis ex actione aliorum Planetarum in Terram , ac potissimum ex Jovis , ac Veneris actione oriri , & quæ massæ cujusvis quantitati pars variationis , & motus nodorum respondeat supputavit. Theoriam Satellitum Jovialium ex generali gravitatis theoria derivatam tradiderunt primo D. Bailly in præclaro opere , quod anno 1766 Parisiis editum est , cum a Parisiensi Academia præmio proposito theoria Satellitum requireretur , & D. la Grange , qui eodem anno Academiæ præmium obtinuit. Antequam de hujusmodi theoria in hoc libro agere incipiam , cum æquationes empyricæ Satellitum Jovialium analogæ sint primæ , & secundæ variationi Lunæ , primæ variationis problema , quod in tertio Newtoni libro insigne erat , reassumi debet , & videndum est quanam ratione secunda etiam variatio in orbita proxime circulari supputari possit.

CAPUT PRIMUM.

DE VIRIBUS PERTURBATRICIBUS, ET DE VARIATIONE LUNÆ.

PROBLEMA I.

Definire vires omnes , quæ a Sole in Lunam , & in quovis orbitæ circa Terram descriptæ loco exercenrur.

Positis omnibus ut in fig. 57 , & in Probl. V. Lib. II. , si $1 : M$ sit ratio quantitatis materiæ in Sole , & Terra , ac Sol S censeatur esse in eodem plano orbitæ ALD a Luna L circa Terram T descriptæ ; erir vis omnis, qua Luna a Sole in loco L juxra vectorem radium LT a Terra distrahetur $\frac{ST.TM - TL^2}{TL.SL^3} - \frac{TM}{TL.TS^3}$: & vis alia , quæ perpendiculariter ad vectorem radium dirigitur, erit $\frac{ST.LM}{TL.SL^3} - \frac{LM}{TL.TS^3}$: atque ob $SL^2 = ST^2 + TL^2 - 2ST.TM$, si

si fiat $ST = a$, & $TL = x$, erit vis prior $\frac{a.TM - x^2}{x(a^2 + x^2 - 2a.MT)^{\frac{3}{2}}} - \frac{TM}{a^2.x}$, vis altera $\frac{LM}{x}\left(\frac{a}{(a^2 + x^2 - 2a.TM)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{a^2}\right)$.

His positis in Newtoniana serie $(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ$ &c. fiat $m = -3$, $n = 2$, $P = a^2$, $Q = \frac{x^2}{a^2} - \frac{2TM}{a}$, ac sit propterea $P^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^3}$, $\frac{m}{n}AQ = \frac{3TM}{a^4} - \frac{3x^2}{2a^5}$, $\frac{m-n}{2n}BQ = \frac{15\,TM^2}{2a^5}$. Ob maximam Solis distantiam præ Lunæ distantia a Terra neglectis aliis inferiorum ordinum fractionibus, erit vis perturbatrix juxta vectorem radium exercita

$$\left(\frac{a.TM - x^2}{x}\right)\left(\frac{1}{a^3} + \frac{3TM}{a^4} - \frac{3x^2}{2a^5} + \frac{15TM^2}{2a^5}\right) - \frac{TM}{a^2x} =$$

$$-\frac{x}{a^3} + \frac{3TM^2}{a^3x} - \frac{9x.TM}{2a^4} + \frac{15\,TM^3}{2a^4x}:$$

& cum sit $\frac{TM^2}{x^2} = \text{cos}.\ STL^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\ \text{cos}.\ 2STL$,

& $\frac{TM^3}{x^3} = \frac{3}{4}\ \text{cos}.\ STL + \frac{1}{4}.\ \text{cos}.\ 3STL$, fiet vis eadem

$$\frac{x}{2a^3} + \frac{3x}{2a^3}.\text{cos}.\ 2STL + \frac{9x^2}{8a^4}.\text{cos}.\ STL + \frac{15x^2}{2a^4}.\ \text{cos}.\ 3STL.$$

Simili calculo, & terminorum omnium resolutione eruetur vis perpendicularis radio vectoris lunaris orbitæ

$$\frac{LM}{x}\left(\frac{3TM}{a^3} - \frac{3x^2}{2a^4} + \frac{15\,TM^2}{2a^4}\right) =$$

$$\frac{3x}{a^3}.\ \text{cos}.\ STL.\ \text{sin}.\ STL - \frac{3x^2}{2a^4}.\ \text{sin}.STL + \frac{15x^2}{2a^4}.\ \text{cos}.STL^2.\ \text{sin}.STL =$$

$$\frac{3x}{2a^3}.\ \text{sin}.\ 2STL + \frac{3x^2}{8a^4}.\ \text{sin}.\ STL + \frac{15x^2}{8a^4}.\ \text{sin}.\ 3STL.$$

Quod

[*] Quod si planum lunaris orbitæ ALD ad planum eclipticæ inclinetur angulo cujus sinus se habeat ad sinum totum ut $\pi : 1$, & sit plani utriusque interfectio Bb; adhuc vires a Sole juxta vectorem radium exercitæ $\frac{LK}{SL^3}$, $\frac{ST.TM}{TL.ST^3}$, & posito $SL^2 = a^2 - 2a.TM$, erunt priores termini vis perturbatricis juxta vectorem radium exercitæ $-\frac{x}{a^3} + \frac{3TM^2}{xa^3}$. Jam vero si sit Aa perpendiculum ex A demissum in planum Bab, & LN, AG perpendiculariter ex L, & A, demissa in lineam quadraturarum Dd, erit $Aa = \pi.AG = \pi x.\text{sin}.ATB$, eritque $TA : Ta$ ut recta LN ad rectam, quæ intercipitur puncto N, & perpendiculo ex L demisso in planum Bab. Scilicet ex L demisso in rectam ST ut antea perpendiculo LM erit $TM = \frac{Ta.LN}{TA} = LN.\sqrt{(1-\pi^2.\text{sin}.ATB^2)}$, atque, ob inclinationem orbitæ, recta TM minuetur in ratione $\sqrt{(1-\pi^2.\text{sin}.ATB^2)} : 1$. Ergo pro quolibet nodorum loco erunt priores termini vis perturbatricis juxta vectorem radium exercitæ $-\frac{x}{a^3} + \frac{3LN^2}{xa^3}.(1-\pi^2.\text{sin}.ATB^2)$

$$= -\frac{x}{a^3} + \frac{3x}{a^3}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\text{cos}.2STL\right)\left(1-\tfrac{1}{2}\pi^2+\tfrac{1}{2}\pi^2.\text{cos}.2ATB\right)$$

$$= \frac{x}{2a^3}\left(1-\tfrac{3}{2}\pi^2+\tfrac{3}{2}\pi^2.\text{cos}.ATB\right) + \frac{3x}{2a^3}.\overline{1-\tfrac{1}{2}\pi^2}.\text{cos}.2STL + \frac{3x\pi^2}{4a^3}.\text{cos}.2STL.\text{cos}.2STB.$$

Simili modo erunt priores termini vis alterius perpendicularis

$$\frac{3TM.LM}{xa^3} = \frac{3x}{2a^3}.\overline{1-\tfrac{1}{2}\pi^2}.\text{sin}.2STL + \frac{3x\pi^2}{4a^3}.\text{sin}.2STL.\text{cos}.2ATB.$$

Erit etiam $\frac{\pi}{a^3}.\text{sin}.ATB$ vis, qua punctum T trahetur perpendicu-

[*] *Quæ sequuntur, post obitum Cl. Auctoris, fideliter decerpta sunt ex MS. Originali a se relicto, quod prælo jam paraverat.*

lariter ad planum orbitæ BAb, & vis, qua trahetur similiter punctum L, erit $\frac{a\pi . \text{fin.} ATB}{SL^3}$: & cum sit $SL^2 = ST^2 + LT^2 - 2ST . MT$, pro TM scribendo $TM . \sqrt{(1 - \pi^2 . \text{fin.} ATB^2)}$ erit duarum virium differentia, sive vis omnis, qua Luna a plano orbitæ suæ distrahetur actione Solis

$$\frac{a\pi . \text{fin.} ATB}{(a^2 + x^2 - 2a.TM.(1 - \pi^2 . \text{fin.} ATB^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}} - \frac{\pi \, \text{fin.} ATB}{a^2}$$

seu proxime $\frac{\pi}{a^3} . \text{fin.} ATB . 3TM . \sqrt{(1 - \pi^2 . \text{fin.} ATB^2)}$.

Quod si vero a non veram sed mediam tantum distantiam Terræ, & Solis designet, & sit a major semiaxis terrestris orbitæ, atque ad excentricitatem se habeat ut $1 : \delta$, & sit insuper TSs, fig. 58. angularis distantia Terræ a summa apside erit vera Terræ a Sole distantia $ST = a . \frac{(1 - \delta^2)}{1 - \delta . \text{cof.} TSs}$, neglectisque aliis minoribus fractionibus fiet $\frac{1}{ST^3} = \frac{1}{a^3}(1 - 3\delta . \text{cof.} TSs)$.

Hoc posito, & retentis omnibus quæ Coroll. II., & III. Probl. V. Lib. II. indicata sunt, si ratio temporum periodicorum Terræ circa Solem, & Lunæ circa Terram sit $1 : n$, & si insuper gravitas Lunæ in Terram $\frac{M}{TL^2}$ in mediocri distantia accipiatur loco unitatis, scribendo $n^2 (1 - 3\delta . \text{cof.} TSs)$ loco $\frac{1}{a^3}$, & $\frac{n^2}{a}(1 - 4\delta . \text{cof.} TSs)$ loco $\frac{1}{a^4}$, in priorum problematum formulis fiet vis perturbatrix Solis juxta vectorem radium lunaris orbitæ exercita

$$\tfrac{1}{2} n^2 x (1 - \tfrac{3}{2}\pi^2)(1 - 3\delta . \text{cof.} TSs)$$
$$+ \tfrac{3}{2} n^2 x (1 - \tfrac{1}{2}\pi^2)(1 - 3\delta . \text{cof.} TSs) . 2STL$$
$$+ \frac{9 n^2 x^2}{8a}(1 - 4\delta . \text{cof.} TSs) . \text{cof.} STL + \frac{15 n^2 x^2}{8a} . \text{cof.} 3STL$$
$$+ \tfrac{3}{4} n^2 \pi^2 x . \text{cof.} 2ATB + \tfrac{3}{4} n^2 \pi^2 x . \text{cof.} 2ATB . \text{cof.} 2STL .$$

Simili modo eruetur vis perpendicularis radio $\frac{1}{2}$

$$\tfrac{3}{2}n^2 x(1-\tfrac{1}{2}\pi^2)(1-3\delta.\ \text{cof.}\ TSs).\ \text{fin.}\ 2STL$$
$$+\frac{3n^2x^2}{8a}(1-4\delta.\ \text{cof.}\ TSs).\ \text{fin.}\ STL+\frac{15n^2x^2}{8a}.\ \text{fin.}\ 3STL$$
$$+\tfrac{3}{4}n^2\pi^2 x.\ \text{fin.}\ 2STL.\ \text{cof.}\ 2ATB.$$

COROLLARIA.

I. Si in fig. 57 fit LO duplum fpatii, quod viribus plano orbitæ perpendicularibus abfolvi poffet eo tempore, quo Luna arcum Ll abfolvit; erit finus verfus arcus Ll, five $\frac{L^2}{2TL}$ ad $\frac{1}{2}LO$ ut gravitas Lunæ in Terram ad vim ipfam perpendicularem, & fi gravitas Lunæ in Terram ut antea fit $\frac{M}{TL^2}$, erit fpatium idem $LO =$

$$\frac{a\pi.\ TL.\ Ll^2\ \text{fin.}\ ATB}{M(a^2+x^2-2a.\ TM\sqrt{(1-\pi^2.\ \text{fin.}\ ATB^2)})^{\frac{3}{2}}}-\frac{\pi.TL.\ Ll\ \text{fin.}ATB}{Ma^2},$$

feu proxime $\frac{3\pi.}{Ma^3}$ $TL.\ Ll^2.\ TM.\ \text{fin.}\ ATB.\ \sqrt{(1-\pi^2.\ \text{fin.}\ ATB^2)}$.

II. Ex penultima formula manifeftum eft gravitatem Lunæ in Terram actione Solis imminui quantitate $\frac{1}{2}n^2 x(1-\frac{3}{2}\pi^2)$, feu proxime $\frac{1}{2}n^2$, quæ cum ex loco apfidum, nodorumque, atque ex Terræ loco in fua orbita non pendeat, media vis perturbatrix appellari poteft. Patet infuper quod fi orbita Lunaris ad circulum proxime accedere intelligatur erit vis omnis mediocris Lunæ in Terram $1-\frac{1}{2}n^2$: & quia circularis motus velocitas per Theor. II. Lib. I. ea eft, quæ per dimidium radium cadendo conftanti vi centripeta acquiri poffet, erit quadratum velocitatis mediocris Lunæ $1-\frac{1}{2}n^2$. Et quia data velocitate projectionis areæ defcriptæ debent effe proportionales temporibus, patet denique pro exigua quavis orbitæ variatione quadratum velocitatis radio perpendicularis affumi poffe $=\frac{1-\frac{1}{2}n^2}{x^2}$.

III. Ex ultima vero formula manifeſtum eſt velocitatem eamdem ob vim perturbatricem Solis, quæ perpendiculariter ad vectorem radium dirigitur, continue affici, & pro vario Solis, apſidum, nodorumque aſpectu diverſam fieri. Et quia præcipuus vis perpendicularis terminus eſt $\frac{3}{2} n^2 x .$ ſin. $2\, STL$, patet velocitatem projectionis Lunæ a conjunctione ad quadraturam primam tendendo, cum vis perpendicularis in contrariam partem dirigitur, imminui, & deinde in tranſitu ad oppoſitionem augeri, & uſque ad quadraturam alteram rurſus imminui, augerique in reditu ad conjunctionem: citraque, & ultra quadraturarum lineam, utramque ſyzigiam verſus, velocitatem Lunæ majorem fieri quam quæ eſſet in orbita circa Terram ob vim mediocrem centripetam deſcripta.

PROBLEMA II.

Data vi perpendiculari ad vectorem radium in orbita, quæ accedat proxime ad circulum, variationem velocitatis Lunæ invenire.

Sit in fig. 58. LTl angulus, quo Luna a quadraturarum linea TD recedit dato elemento temporis, & ſit ipſe angulus $\frac{Ll}{TL} = \frac{Mm}{ML}$. Si dum Luna hujuſmodi angulum deſcribit, Sol apparenti motu deſcribat angulum STS', angularis Lunæ receſſus a quadraturis fiet minor in ratione differentiæ motuum angularium Lunæ, & Solis ad motum angularem Lunæ, ſive in ratione relativi motus Lunæ a Sole ad motum abſolutum Lunæ. Patet autem revolutionum tempora eſſe in ratione reciproca motuum, ſive angulorum dato tempore circa centrum deſcriptorum. Quare ſi tempus periodicæ revolutionis Lunæ ad tempus revolutionis Lunæ ſynodicæ ſe habeat ut $1 : N$, ob motus fere uniformes, hæc eadem erit ratio motus relativi Lunæ, & Solis ad motum abſolutum Lunæ: atque ut Luna angulo $\frac{Mm}{ML}$ recedat a quadraturis, deſcribere debebit angulum $N. \frac{Mm}{ML}$, & ſpatium a Luna deſcriptum perpendiculariter ad vectorem radium erit $\frac{N.TL.Mm}{ML}$. Quare ſi in priore problemate primus tantum

fu-

sumatur vis perpendicularis terminus $\frac{3\,ML.\,TM}{TL.\,a^3}$, sive $3\,n^2.\,\frac{ML.\,TM}{TL}$ & velocitas Lunæ perpendicularis radio vocetur V; erit juxta priores variabilis motus formulas $VdV = 3\,n^2.\,N.\,TM.\,Mm$: integrandoque, & juxta Coroll. I. Probl. I. quantitatem constantem debite addendo fiet $V^2 = \frac{1 - \frac{1}{2}n^2}{x^2} + 3\,n^2\,N.\,TM^2$. Aliis vero etiam acceptis vis perpendicularis terminis eadem ratione eruetur

$$V^2 = \frac{1 - \frac{1}{2}n^2}{x^2} + 3\,n^2\,N.\,TM^2 - \frac{3\,n^2}{a}.\,N.\,TM + \frac{5\,n^2}{a}.\,N.\,TM^3:$$

& posito $\frac{TM}{x} = \text{cos}.\,STL$, resolutisque terminis fiet denique $V^2 =$

$$\frac{1 - \frac{1}{2}n^2}{x^2} + \frac{3}{2}n^2\,Nx^2\,(1 + \text{cos}.\,2STL) + \frac{3n^2}{4a}\,Nx.\text{cos}.STL + \frac{5n^2}{4a}.\,Nx.\text{cos}.\,3STL.$$

COROLLARIA.

I. Velocitas in quadraturis ad velocitatem in syzigiis se habebit in ratione subduplicata $1 : 1 + 3\,n^2\,N$, seu proxime in ratione simplici $1 : 1 + \frac{3}{2}n^2\,N$. Et si juxta Coroll. III. Probl. V. Lib. II. Fiat $1.\ n^2 = 178725 : 1000$, ac sit tempus revolutionis Lunæ periodicæ $27^d\,7^h\,43'$, & tempus revolutionis synodicæ, quo ad eumdem aspectum Solis revertitur, sit $29^d\,12^h\,44'$, adeoque sit $1 : N = 1 : 1.\ 080853$; erit velocitas Lunæ in quadraturis ad velocitatem in syzigiis ut $1 : 1 + \frac{100}{11023}$, mediumque incrementum velocitatis erit $\frac{50}{11023}$: & si velocitas media exprimatur numero 100. 23 fiet velocitas minima in quadraturis 109. 73, aliis autem in locis erit velocitas ut summa numeri 109. 23, & quadrati sinus distantiæ a quadraturis ipsis in circulo, cujus radius sit unitas, adeoque fiet velocitas maxima in syzigiis 110. 73.

II. Quia radius circuli æquatur quadrato subtensæ arcus per duplum sinum versum diviso, & circularem arcum minuendo differen-

tia

tia ſubtenſæ, & arcus ſit data quacumque minor, ſi quadratum velocitatis dividatur per vim centripetam, quæ duplo ſinu verſo arcus dato tempore deſcripti exprimitur, prodibit radius circuli eamdem curvitatem habentis cum lunari orbita in loco dato

$$\frac{1 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n^2 N x^4 . (1 + \text{cof. } 2STL)}{1 - \frac{1}{2}n^2 x^2 - \frac{3}{2}n^2 x^2 . \text{cof. } 2STL}$$

ſeu proxime $1 + \frac{3}{2}n^2 N + \frac{3}{2}n^2 . \overline{N+1}$, cof. $2STL$: ac poſito primum cof. $2STL = -1$, ac deinde $= 1$, radius oſculi in quadraturis ad radium oſculi in ſyzigiis quam proxime ſe habebit ut $1 : 1 + 3n^2 . \overline{N+1}$.

III. Luna igitur utrobique in conjunctione, & oppoſitione, cum majorem velocitatem, & vim centripetam minorem habeat, minus deflectet a recto tramite quam in quadraturis Solis, & lunaris orbita in quadraturis ipſis fiet curvior: quod eſſe nequit niſi, ſecluſo motu excentricitatis, Luna in quadraturis longius a Terra recedat, quam in ſyzigiis. Et quidem cum in ellipſi differentiæ radiorum oſculatorum generatim ſint ut coſinus duplæ diſtantiæ a minore axe, atque a majore ad minorem tranſeundo radii iidem augeantur in duplicata ratione diſtantiæ ab axe eodem majore, ut patet ex elementis conicorum, neglectis variationibus ortis ex motu Solis, lunaris orbita proxime eſſet elliptica: & cum ellipſeos ſemiaxes ſint inter ſe in ratione ſubtriplicata radiorum oſculatorum, ſemiaxis major lunaris orbitæ ad minorem in eadem hypotheſi ſe haberet ut

$\sqrt[3]{(1 + 3n . \overline{N+1})} : 1$, ſeu proxime ut $87 : 86$.

THEOREMA I.

Si planum lunaris orbitæ VTA, fig. 59. circa Terram T volvi intelligatur, ut ſemper eadem linea TA dirigatur ad Solem; curva VMA, quam Luna in plano hujuſmodi deſcribet, accedet proxime ad ellipſim, cujus major ſemiaxis VT quadraturis, minor AT ſyzigiis reſpondebit.

Sit angulus poſt quadraturas percurſus in plano mobili VTL, in plano immobili DTL, & ſit LTR angulus, quo Luna in plano

no eodem immobili, dato elemento temporis recederet a loco L. Quia ob motum Lunæ fere uniformem anguli hujusmodi in plano immobili, & mobili simul percursi sunt inter se ut revolutio Lunæ synodica ad periodicam; si fiat $N : 1 = LTR : MTR$, radius vector TL elemento eodem temporis ob motum plani abibit in locum M, eritque MTR angulus a Luna percursus in plano mobili. Et quia juxta Problema II. est $\frac{1 - \frac{1}{2} n^2 + 3 n^2 N x^3 \text{, cos. } ATL^2}{x^2}$ quadratum absolutæ velocitatis radio vectori perpendicularis in loco L, si sit Rm parallela tangenti in puncto M, & ex M in TM ducatur perpendiculum Rr, & cosinus anguli ATM vocetur t; neglectis aliis terminis minoribus erit quadratum velocitatis in plano mobili $Rr^2 = \frac{1}{N^2} \left(\frac{1 - \frac{1}{2} n^2 + 3 n^2 N x^3 t^2}{x^2} \right)$: atque erit vis centripeta $2 Mm = \frac{1}{x^2} + n^2 x - 3 n^2 x t^2$, Jam vero si centro T, & semiaxibus TA, TV describatur ellipsis, quæ transeat per puncta M, R, erit $Rm^2 : Rr^2 = TM^2 : MO^2$, atque ob $MO = \frac{TA . TV}{TK}$, & $Mm = \frac{TM^2 . Rm^2}{2TM . TK^2}$, erit etiam $\frac{Mm}{Rr^2} = \frac{\frac{1}{2} TM^3}{TV^2 . TA^2}$, seu proxime $= \frac{1}{2} TM^3 = \frac{1}{2} x^3$: nam si mediocris semidiameter vocetur 1, & sit semiaxis major $TV = 1 + \omega$, minor $TA = 1 - \omega$, neglectis quadraticis differentiæ ω potestatibus fiet $TV^2 . TA^2 = 1$. Erit igitur

$$x^3 = N^2 \left(\frac{1 + n^2 x^3 - 3n^2 x^3 t^2}{1 - \frac{1}{2} n^2 + 3n^2 N x^4 t^2} \right)$$

$$= \frac{N^2}{1 - \frac{1}{2} n^2} \left(1 + n^2 x^3 - 3n^2 x^3 t^2 \left(1 + \frac{Nx)}{1 - \frac{1}{2} n^2} \right) \right).$$

Ex hac autem formula, novis divisionibus, posita $\frac{N^2}{1 - \frac{1}{2} n^2} = m^2$, eruetur

x

diſtantiæ a quadraturis. In hoc theoremate aliam demonſtrandi rationem ſecuti ſumus.

II. Si ſit ut antea $1 : n^2 = 178725 : 1000$, & $N = 1.080853$; factis ſubſtitutionibus, ſemiaxis major illius ellipſeos, cujus revolutione lunaris orbita poteſt conſtrui, ad differentiam majoris, & minoris ſemiaxis ſe habebit circiter ut $71 \frac{1}{4} : 1$, atque erunt ſemiaxes ipſi inter ſe quam proxime ut $71 : 70$. Sed quoniam hæc ſemiaxium proportio ex generali expreſſione vectoris radii fuit eruta, in ea vero definienda quantitates quaſdam exiguas negligere oportuit, cum conſtet ſemitam in plano mobili a Luna deſcriptam eſſe ellipſim, ex proportione virium in quadraturis, & ſyzigiis agentium ſequenti methodo accuratior proportio ſemiaxium erui poterit.

PROBLEMA III.

Poſitis omnibus, quæ antea, invenire proportionem ſemiaxium.

Sit TV ſemiaxis major, & TA ſemiaxis minor ellipſeos $VR'A$, & ſit VLU curva alia, quæ conſtruitur capiendo ſemper $TR' = TL$, poſitis ſemper angulis VTR', VTL inter ſe ut $1 : N$, ſitque inſuper VMr arcus circuli centro T, & radio TV deſcripti, VN tangens, & TN, Tn ſecantes binæ per puncta R', & L ductæ. Quia deflexiones curvarum a tangente, ſeu curvaturæ ſunt proportionales ſinubus angulorum contractuum ad æquales radios pertinentibus, erit in vertice V differentia curvaturæ circuli, & ellipſeos ad curvaturam circuli, ut $MR' : MN$, & curvatura circuli ad differentiam curvaturæ circuli, & orbitæ VLU ut $rn : rL$, & ob $TM = Tr$, & $TR' = TL$, ac $MR' = rL$, erit differentia curvaturæ circuli, & ellipſeos ad differentiam curvaturæ circuli, & curvæ alterius ut $rn : MN = Vr^2 : VM^2 = N^2 : 1$. Quare cum orbium curvaturæ ſint reciproce ut radii oſculi, & ſit radius circuli TV, & radius in vertice V ellipſim oſculans $\frac{TA^2}{TV}$, & differentia curvaturæ circuli, & ellipſeos ſit $\frac{TV}{TA^2} - \frac{1}{TV} = \frac{TV^2 - TA^2}{TA^2 . TV}$, erit $\frac{TV^2 - TA^2}{N^2 . TA^2 . TV}$ differentia curvaturæ circuli, & orbitæ VLU, addendoque curvaturam circuli $\frac{1}{TV}$ fiet curvatura orbitæ $\frac{TV^2 - TA^2 + N^2 . TA^2}{N^2 . TA^2 . TV}$, & radius orbi-

tam osculans in vertice majoris axis erit $\dfrac{N^2 . TA^2 . TV}{TV^2 + \overline{N^2 - 1} . TA^2}$

Quod si ex vertice semiaxis minoris egredi Lunam intelligamus, minorem ipsum semiaxem loco majoris substituendo simili modo eruetur radius osculi in vertice minoris axis $\dfrac{N^2 . TV^2 . TA}{TA^2 + \overline{N^2 - 1} . TV^2}$ Erunt itaque bini osculatiores radii inter se ut $TA^2 + \overline{N^2 - 1} . TV^2 . TA : TV^2 + \overline{N^2 - 1} . TA^2 . TV$, & si fiat $TV = 1 + \omega$, ac $TA = 1 - \omega$, erit eadem radiorum ratio $1 - 3\omega + \overline{N^2 - 1} . \overline{1 + 2\omega} . \overline{1 - \omega} : 1 + 3\omega + \overline{N^2 - 1} . \overline{1 - 2\omega} . \overline{1 + \omega} = N^2 . \overline{1 + \omega} - 4\omega : N^2 . \overline{1 - \omega} + 4\omega = 1 : 1 + \dfrac{8\omega}{N^2} - 2\omega$. Cumque per Coroll. II. Probl. II. sit etiam radiorum ratio $1 : 1 + 3n^2 . \overline{N + 1}$, fiet denique $\omega = \frac{3}{2} n^2 N^2 . \dfrac{\overline{N + 1}}{4 - N^2}$.

COROLLARIA.

I. Si numeri ut antea substituantur speciebus fiet $\omega = \dfrac{1}{138 . 8}$ quam proxime, atque hæc quantitas si addatur, atque auferatur a mediocri radio lunaris orbitæ erit $1 + \omega : 1 - \omega = TV : TA = 699 : 689 = 70 : 69$, & differentia semiaxium ad majorem semiaxem lunaris orbitæ se habebit ut $1 : 70$. Hæc autem approximatio accuratior etiam censeri poterit, quia si in Coroll. II. Probl. II. quantitatum etiam inferioris ordinis habeatur ratio, adhuc emergit eadem proportio radiorum lunarem orbitam osculantium in syzigiis, & quadraturis.

II. Si tempora revolutionis Lunæ synodicæ, & periodicæ ut antea sint N, & 1, ac tempus revolutionis Solis circa Terram vocetur T, & sit D differentia temporum revolutionis Solis, & Lunæ, erit $1 : N = D : T$, & $n^2 = \dfrac{1}{T^2}$, ac $n^2 N^2 = \dfrac{1}{D^2}$, adeoque fiet $\omega = \frac{3}{2} . \dfrac{1}{D^2} . \dfrac{N + 1}{4 - \dfrac{T^2}{D^2}} = \frac{3}{2} . \dfrac{N + 1}{4D^2 - T^2}$ scilicet differentia semi-

axium

axium lunaris orbitæ ad ſemiſummam, ſive ad mediocrem Lunæ a Terra diſtantiam ſe habebit ut $\frac{3}{2}\overline{N+1} : 4D^2 - T^2$.

III. Pariter quia tempus revolutionis Lunæ periodicæ ad tempus revolutionis ſynodicæ ſe habet ut differentia angularium motuum Lunæ, & Solis ad motum angularem Lunæ, ſive ut motus relativus Lunæ a Sole ad abſolutum, erit $1 : N = 1 - n : 1$, & fiet

$$\frac{N^2}{4 - N^2} = \frac{1}{4(1-n)^2 - 1} = \frac{-1}{1 - (2-2n)^2}, \text{ eritque}$$

$$\omega = \frac{-\frac{3}{2} n^2 \left(1 + \frac{1}{1-n}\right)}{1 - (2 - 2n)^2}$$

: quam eamdem formulam inferius ex generali etiam ſolutione Problematis eruemus.

THEOREMA.

Accuratius vero deſcribi poterit lunaris orbita ſi ellipſis eadem $VAva$, fig. 61., parallele ad minorem axem Aa tranſpoſita in locum $VBvb$ tranſeat.

Nam ſi alius inſuper ſupputetur teminus illius ſeriei, quæ vim perturbatricem Solis deſignat, & coſinus anguli ATM ut antea vocetur t, fiet juxta Prob. I. vis omnis Lunæ ſecundum vectorem radium $TM = \frac{1}{x} + n^2 x - 3n^2 xt^2 - \frac{9n^2 x^2 t}{8a}$: & juxta Prob. IV. fiet quadratum velocitatis radio vectori perpendicularis $= \frac{1 - \frac{1}{2} n^2}{x^2} + 3n^2 Nx^2 t^2 + \frac{3n^2 Nxt}{4a}$: ſcilicet vis centrifuga augebitur quantitate exigua $\frac{3n^2 Nt}{4a}$, & vis centripeta quantitate $\frac{9n^2 t}{8a}$ minuetur. Hoc dato manifeſtum eſt quod cum coſinus anguli ATM, ſeu ſin. VTM citra quadraturarum lineam, & verſus conjunctionis plagam ſit poſitivus, atque ex adverſa parte orbitæ oppoſitionem verſus fiat negativus; quantum ob hanc variationem virium accedet Luna, aut recedet a centro ex parte una orbitæ ellipticæ, tantundem contrario ſenſu recedet, vel accedet ex parte altera, & diſtantia

TV a centro T in quadraturis manebit eadem. Manifeſtum eſt inſuper quod cum vis omnis $\frac{3n^2}{4a} \cdot \overline{N + \frac{3}{2}} \cdot \text{coſ.}\, ATM$ exigua ſit, ſpatium etiam exiguum Mm, quo Luna a perimetro ellipſeos recedet in puncto M, ſaltem quam proxime proportionale erit coſinui anguli ATM, & ſi ſit AB tota deflexio in puncto A, ſtatui poterit $Mm = AB . \text{coſ.}\, ATM$. Hoc dato, ſi ſit NMn perpendicularis axi Vv, ob ſimilitudinem triangulorum Mmn, MNT, erit quam proxime $Mn = \frac{Mm}{\text{ſin.}\, NTM} = AB$: ſcilicet orbita $VBvb$ erit ellipſis eadem $VAva$ parallele ad minorem axem Aa tranſpoſita.

COROLLARIA.

Ita igitur circularis orbita actione virium perturbatricium abibit in aliam orbitam, quæ ellipſeos tranſpoſitione, & revolutione conſtruetur ſatis accurate: nimirum orbita in plano mobili deſcripta, quod circa Terram eumdem angularem motum cum Sole communem habeat, erit ellipſis tranſpoſita, cujus minor axis ad Solem dirigetur, major cum linea quadraturarum congruet: in ſpatio autem immobili, veſtigium ſemitæ habebitur vectorem quemcumque radium ellipſeos tranſpoſitæ ad eum angulum traducendo in ſpatio immobili, qui ad angulum in plano mobili deſcriptum, ſit in ratione temporis revolutionis Lunæ ſynodicæ ad periodicam.

PROBLEMA IV.

Iiſdem poſitis differentiam diſtantiæ a centro in ellipſi tranſpoſita invenire.

Quia ob portionem illam virium perturbatricium, quæ eſt in ratione ſimplici coſinus diſtantiæ Lunæ a Sole, lunaris orbita parallele ad conjunctionis lineam tranſponi debet, ob alteram vero partem, quæ eſt in ratione eadem duplicata, circularis in ellipticam orbita abire debet, vires autem omnes hujuſmodi exiguæ ſunt; neglecta variatione tranſpoſitionis, quæ ex ellipticitate orbitæ oriri poſſet, ſtatui poterit pari intervallo & circularem, & ellipticam orbitam tranſponi. Sit igitur in fig. 61., & 62. $AB = TC = \varpi$, & BRH arcus circuli centro C, & tangente Bb deſcriptus, & ſit inſuper

BTR

BTR elementum angularis motus in plano mobili, in ſpatio immobili BTH, accipiendoque $TR = TL$ ſit L veſtigium ſemitæ BL deſcriptæ in ſpatio immobili. Si ex puncto R in ſyzigiarum lineam TB ducatur perpendiculum RN, erit $BN = \frac{BR^2}{2CB}$, $CN = CB - \frac{BR^2}{2CB}$, & $TR = \sqrt{(CR^2 + TC^2 + 2TC \cdot CN)} = CR + TC - \frac{TC \cdot BR^2}{2CR^2}$ quam proxime. Erit etiam quam proxime $BH = N \cdot BR$ ac ſimili modo fiet $TH = CR + TC - \frac{TC \cdot N^2 \cdot BR^2}{2CR^2}$, ac $TR - TH$ $= LH = \frac{\varpi \cdot \overline{N^2 - 1} \cdot BR^2}{2CR^2}$. Quare cum ſit $Hb = \frac{BH^2}{2CH} = \frac{N^2 \cdot BR^2}{2CR}$, erit curvatura circuli ad differentiam curvaturæ circuli, & orbitæ BL, ſive erit radius circuli ad differentiam radii oſculatoris orbitæ ut $CR : \varpi \cdot \frac{N^2 - 1}{N^2}$, ſeu proxime ut $1 : \varpi \cdot \frac{N^2 - 1}{N^2}$. At quia radius oſculi eſt ut quadratum velocitatis perpendicularis directe, & reciproce ut vis centripeta, hæc eadem debet eſſe ratio $1 : \frac{3n^2}{4a} \cdot \overline{N + \frac{3}{2}}$.

Itaque exæquatis terminis fiet $\varpi = \frac{3n^2 \cdot (N^2 + \frac{3}{2} N^2)}{4a \cdot (N^2 - 1)}$.

COROLLARIA.

I. Cum ſit $N = \frac{1}{1 - n}$, ſubſtitutione facta prodibit $\varpi =$

$$\frac{3n^2}{4a}\left(\frac{N + \frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{N^2}}\right) = \frac{3n^2}{4a}\left(\frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{1-n}}{1 - (1-n)^2}\right) = \frac{3n}{4a}\left(\frac{N + \frac{3}{2}}{2 - n}\right).$$

Eſt autem $N = 1.080853$, $n = 0.0748$, & poſita parallaxi mediocri Solis 9″, Lunæ 57′ 4″ 37‴, ut in Probl. 1. Lib. 1. ſtatutum eſt, erit duarum parallaxium ratio, quæ eadem eſt ratio diſtantiarum Lunæ, Soliſque a Terra $1 : 380 = a : 1$. Hiſce igitur numeris ſubſtitutis prodibit $\varpi = \frac{1}{5052}$, atque erit differentia vectoris radii, quæ ex tranſ-

po-

positione orbitæ orietur $\frac{1}{5052}$. cof. ATM. Differentiis itaque simul junctis, quæ ex ellipticitate, & transpositione orbitæ oriuntur, si radius mediocris orbitæ accipiatur pro unitate, fiet radius quicumque vector $Tm = 1 - \omega \cdot \text{cof. } 2ATM + \varpi \text{ cof. } ATM = 1 - \frac{1}{138.8} \text{ cof. } 2ATM + \frac{1}{5052} \cdot \text{cof. } ATM = 1 - 0.0072 \cdot \text{cof. } 2ATM + 0.0002 \cdot \text{cof. } ATM$, qui numeri proxime ad eos accedunt, quos ex generali solutione problematis in libro subsequente colligemus.

PROBLEMA V.

Definire æquationes motus, quæ ex iisdem variationibus orbitæ proxime circularis oriri possunt.

Si angularis Lunæ motus sit z, dz elementum auguli descripti, circa Terram, radius vector x, & V velocitas eidem radio perpendicularis; erit xdz elementum arcus radio x descripti, & elementum temporis $\frac{xdz}{V}$. Quod si insuper $1 : n$ sit ratio angularium motuum Lunæ, & Solis, ac sit motus Solis nz, & motus Lunæ a Sole $z - nz$, valorem radii x ex corollario posteriori, expressionemque velocitatis V ex Probl. I. accipiendo, neglectis aliis minoribus fractionibus fiet elementum temporis

$$x^2\, dz : \left(1 - \frac{1}{4}n^2 + \frac{3}{4}n^2 N + \frac{3}{4}n^2 N . \text{cof.} (2 - 2n) . z + \frac{3n^2 N}{8a} . \text{cof.} (1 - n) . z\right)$$

$$= \frac{dz - 2\omega dz \,.\, \text{cof.}\,(2 - 2n) \,.\, z + 2\varpi\, dz \,.\, \text{cof.}\,(1 - n) \,.\, z \,.}{1 - \frac{1}{4}n^2 + \frac{3}{4}n^2 N\,(1 + \text{cof.}\, 2z - 2nz) + \frac{3n^2 N}{8a} . \text{cof.}\, z - nz}$$

Quia igitur motus medius est tempori proportionalis; & summa motuum omnium mediorum eamdem veri motus quantitatem debet conficere, si elementum medii motus Lunæ sit dZ, erit

$$dZ = dz - \left(2\omega + \frac{3}{4}n^2 N\right) . dz \,.\, \text{cof.}\,(2 - 2n) \,.\, z + \left(2\varpi - \frac{3n^2 N}{8a}\right) . dz \,.\, \text{cof.}\,(1 - n) \,.\, z:$$

in-

integrandoque, & coeficientem utriusque termini per coeficientem anguli variabilis dividendo, posito $\frac{1}{1-n} = N$, eruetur $z = Z + (\omega N + \frac{3}{8} n^2 N).\ \text{sin.}(2 - 2n).z - \left(2\varpi N - \frac{3n^2 N^2}{8a}\right).\ \text{sin.}(1-n).z$.

COROLLARIA.

I. Cum sit $\text{sin.}(2z - 2nz) = 2.\ \text{sin.}(z - nz).\ \text{cos.}(z - nz.)$, si tangens anguli $z - nz$ distantiæ Lunæ a Sole vocetur T, ac sit propterea $T = \frac{\text{sin.}(z - nz)}{\text{cos.}(z - nz)}$, & $T^2 - T^2.\ \text{sin.}(z - nz)^2 = \text{sin.}(z - nz)^2$, sive $\text{sin.}(z - nz) = \frac{T}{\sqrt{(1+T^2)}}$, & $\text{cos.}(z - nz) = \frac{1}{\sqrt{(1+T^2)}}$, fiet prior æquatio motus Lunæ $-(2\omega + \frac{3}{4} n^2 N).\ \frac{NT}{1+T^2}$ scilicet ob parvitatem quantitatis $2\omega + \frac{3}{4} n^2 N^2$, æquatio hujusmodi erit proxime ut productum temporis synodici Lunæ N in tangentem differentiæ anguli $z - nz$, & anguli cujus tangens sit $T + 2\omega T + \frac{3}{4} n^2 NT$.

II. Si valores quantitatum ω, n, N, ϖ, $\frac{1}{a}$ accipiantur ut in corollariis problematum præcedentium, atque unitatis loco substituamus arcum $57.29578°$, subductis numeris prodibit $z = Z + 35'\ 12''.\ \text{sin.}(2 - 2n).z - 1'\ 30''.\ \text{sin.}(1 - n).z$: scilicet prior æquatio fiet maxima in octantibus, & in transitu Lunæ a syzigiis ad quadraturas cum Sole motui medio Lunæ addenda erit, atque in reditu a quadraturis ad syzigias subducenda ut motus verus habeatur: altera vero æquatio fiet maxima in quadraturis, & contraria ratione in Lunæ transitu a conjunctione ad oppositionem motui medio detrahenda erit, atque in reditu ad conjunctionem addenda.

SCHOLION.

Si sit 1 radius circuli circa Terram mediocri vi centripeta

1

$1 - \frac{1}{2} n^2$ descripti, si loco n^2 scribamus $n^2 (1 - 3\delta . \text{cos.}\, m\zeta)$, & vis centripeta augeatur in ratione $1 + \frac{3}{2} n^2 \delta . \text{cos.}\, m\zeta : 1$ quam proxime, per coroll. I. Theor. I. Lib. I. radius vector minuetur in ratione eadem reciproce. Et quia angulares motus sunt inter se in ratione reciproca duplicata radiorum, motus angularis Lunæ in mediocri Solis distantia ad angularem motum in distantia alia qualibet se habebit ut $1 : 1 + 3n^2 \delta . \text{cos.}\, m\zeta$. Quare cum sit $d\zeta$ motus angularis Lunæ, erit altera ipsius motus variatio $3n^2 \delta . \text{cos.}\, m\zeta . d\zeta$: & cum ob lentissimum aphelii motum assumi possit $m = n$, summam variationum omnium accipiendo prodibit æquatio annua $2n\delta . \text{sin.}\, m\zeta$: ac denique posito $\delta = 0.0168$, & $n = 0.0748$, fiet omnis hujusmodi æquatio $12' 58''. \text{sin.}\, m\zeta$. Pariter si sit ut antea motus Solis $n\zeta$, motus nodi lunaris orbitæ $p\zeta$, & quia motus nodi sit contra signorum ordinem, ut mox videbimus, sit motus Solis a nodo $n\zeta + p\zeta$, loco vis mediocris $1 - \frac{1}{2} n^2$ juxta partem alteram Probl. I. scribendo $1 - \frac{1}{2} n^2 - \frac{3}{4} n^2 \pi^2 . \text{cof.}\, (2n + 2np) . \zeta$, & summis variationum omnium medii motus inde ortarum acceptis, æquatio altera habebitur pendens ex loco nodi, eaque erit

$$- \frac{3 n^2 \pi^2 . \text{sin.}\, (2n + 2p) . \zeta}{4n + 4p}, \text{ seu proxime } - \frac{3}{4} n\pi^2 . \text{sin.}\, (2n + 2p) . \zeta,$$

vel etiam $- 1' 32''. \text{sin.}\, (2n + 2p) . \zeta$, si scilicet inclinatio lunaris orbitæ ad planum eclipticæ assumatur $5° 9' 8''$, & sit $\pi = 0.0898$. Pariter si in primæ variationis expressione loco n^2 scribamus $n^2 (1 - 3\delta \text{ cos.}\, m\zeta)$, & $Z - \frac{2\varphi}{c} . \text{sin.}\, c Z$ loco ζ, resoluto $\text{sin.}\, (2\zeta - 2n\zeta) . \text{cos.}\, m\zeta$, & $\text{sin.}\, (2Z - 2nZ - \frac{4\varphi}{c} \text{ sin.}\, cZ)$ quatuor aliæ æquationes habebuntur, quarum argumentum erit dupla distantia media Lunæ a Sole, addita, aut dempta anomalia media Solis, aut Lunæ. Variatio etiam excentricitatis, unde evectio minoresque aliæ æquationes, ac correctiones pendent, qua inferius utemur metho-

thodo fyntehtica, poffet quam proxime fupputari. At cum in approximationibus hifce omnibus quantitates plures negligi debeant, quæ ob multo majorem excentricitatem in Luna majores funt quam in Satellitibus Jovialibus, theoremata ellipfeos revolutæ, ac tranfpofitæ ad orbitas Satellitum Jovialium traducemus.

CAPUT SECUNDUM.

DE PLANETIS, AC SATELLITIBUS INFERIORIBUS, QUI PERTURBANTUR A SUPERIORIBUS.

PROBLEMA VI.

INvenite vires acceleratrices, quibus Planetæ inferiores juxta vectores radios perturbantur a fuperioribus.

Si in figura 58. fiat $TL = b$, & $TM = t$, ac fit t cofinus anguli STL in circulo radii b, juxta priorem formulam libri hujus erit $\frac{at - b}{b(a^2 + b^2 - 2at)^{\frac{3}{2}}} - \frac{t}{ba^2}$ tota vis perturbatrix, quæ juxta vectorem radium Planetæ L exercebitur. Hoc ipfo fi fuperior ftatuatur Planeta S, & fit a major quam b, & fractio eadem ita in feriem evolvatur ut quintæ etiam poteftates fupputentur quantitatem b, & t quomodocumque mixtarum inter fe, pofita $P^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^3}$, & continuata ferie prioris problematis erit

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{3t}{a^4} - \frac{3b^2}{2a^5}$$

$$\frac{m - n}{2n} BQ = \frac{15t^2}{2a^5} - \frac{15b^2t}{2a^6} + \frac{15b^4}{8a^7}$$

$$\frac{m - 2n}{3n} CQ = \frac{35t^3}{2a^6} - \frac{105b^2t^2}{4a^7} + \frac{105b^4t}{8a^8}$$

$$\frac{m - 3n}{4n} DQ = \frac{315t^4}{8a^7} - \frac{315b^2t^3}{4a^8}$$

$$\frac{m - 4n}{5n} EQ = \frac{693t^6}{8a^6}.$$

His autem terminis omnibus in $\frac{at}{b} - b$ ductis habebimus

$$\frac{1}{ba^3}(3t^2 - b^2)$$
$$+ \frac{1}{2ba^4}(15t^3 - 9b^2t)$$
$$+ \frac{1}{2ba^5}(35t^4 - 30b^2t^2 + 3b^4)$$
$$+ \frac{1}{8ba^6}(315t^5 - 350b^2t^3 + 75b^4t)$$
$$+ \frac{1}{8ba^7}(695t^6 - 945b^2t^4 + 315b^4t^2 - 15b^6):$$

Quare pro variis poteſtatibus quantitatis $\frac{t}{b}$, ſeu coſinus anguli STL, juxta notas formulas trigonometricas ſubſtituantur coſinus angulorum multiplorum, ordinatis terminis, fiet tota vis perturbatrix

$$\frac{b}{2a^3}\left(1 + \frac{9b^2}{8a^2} + \frac{75}{64}\frac{b^4}{a^4}\right)$$
$$+ \frac{b^2}{8a^4}\left(9 + \frac{75b^2}{8a^2}\right). \text{coſ. } STL$$
$$+ \frac{b}{2a^3}\left(3 + \frac{5b^2}{2a^2} + \frac{315}{128}\frac{b^4}{a^4}\right). \text{coſ. } 2STL$$
$$+ \frac{15b^3}{8a^4}. \text{coſ. } 3STL.$$

COROLLARIUM.

Si maſſæ corporum T, & S ſint inter ſe ut $M : 1$; & radius mediocris orbitæ Planetæ L accipiatur loco unitatis, & in mediocri ipſa diſtantia unitate exprimatur etiam gravitas in centrum T, atque univerſim gravitas Planetæ inferioris ſit $\frac{1}{b^2}$; neglectis minoribus fractionibus erit vis perturbatrix juxta vectorem radium exercita

1

$$\frac{1}{2Ma^3}\left(1 + \frac{9}{8a^2} + \frac{75}{64a^4}\right)$$
$$+ \frac{1}{8Ma^4}\left(9 + \frac{75}{8a^2}\right) . \text{cos. } STL$$
$$+ \frac{1}{2Ma^3}\left(3 + \frac{5}{2a^2} + \frac{315}{128a^4}\right) . \text{cos. } 2STL$$
$$+ \frac{15}{8Ma^4} . \text{cos. } 3STL.$$

PROBLEMA VII.

Invenire variationem velocitatis Planetarum inferiorum, quæ ex ſuperiorum actione oritur.

Reſoluta ſimiliter fractione erit vis perpendicularis radio vectori inferioris orbitæ $\frac{LM}{b}\left(\frac{a}{(a^2+b^2-2at)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{a^2}\right) =$

$$\frac{LM.}{b}\left(\frac{3t}{a^3} - \frac{3b^2}{2a^4} + \frac{15t^2}{2a^4} - \frac{15b^2t}{2a^5} + \frac{35t^3}{2a^5} + \frac{15b^4}{8a^6} - \frac{105b^2t^2}{4a^6} + \frac{315t^4}{8a^6} + \frac{105b^4t}{8a^7} - \frac{315b^2t^3}{4a^7} + \frac{693t^5}{8a^7}\right) =$$

$$\frac{3b^3}{8a^4}\left(1 + \frac{5b^2}{8a^2}\right) . \text{ſin. } STL$$
$$+ \frac{b}{2a^3}\left(3 + \frac{5b^2}{4a^2} + \frac{105b^4}{128a^4}\right) . \text{ſin. } 2STL$$
$$+ \frac{15b^3}{8a^4} . \text{ſin. } 3STL,$$

& ſi gravitas in mediocri diſtantia accipiatur pro unitate, juxta corollarium poſterius, vis eadem erit

$$\frac{3}{8Ma^4}\left(1 + \frac{5}{8a^2}\right) . \text{ſin. } STL$$
$$+ \frac{1}{2Ma^3}\left(3 + \frac{5}{4a^2} + \frac{105}{128a^4}\right) . \text{ſin. } 2STL$$
$$+ \frac{15}{8Ma^4} . \text{ſin. } STL.$$

Sit igitur $1 : N$ ratio periodici temporis Planetæ inferioris ad tempus

illud

illud, quo ad eumdem cum superiore aspectum revertitur, & velocitas radio perpendicularis vocetur V. Quia vis acceleratrix ducta in elementum spatii æquatur velocitati ductæ in elementum suum, si singuli vis perturbatricis termini ducantur in $N \cdot Ll$, & summæ omnium accipiantur, addita constante quantitate C, erit

$$V^2 = C + \frac{3N}{4Ma^4}\left(1 + \frac{5}{8a^2}\right)\cdot \text{cos. } STL$$
$$+ \frac{N}{2Ma^3}\left(3 + \frac{5}{4a^2} + \frac{105}{128a^4}\right)\cdot \text{cos. } 2STL$$
$$+ \frac{5N}{4Ma^4} \cdot \text{cos. } 3STL.$$

COROLLARIUM.

Si orbitæ sint proxime circulares, qui casus in duobus intimis Satellitibus Jovis, atque in orbita Veneris locum habet, posito $C = 1$, & quadratum velocitatis dividendo per totam vim centripetam, fiet radius osculi in puncto quolibet illius curvæ, in quam circularis orbita ob vires perturbatrices abire debet

$$1 + \frac{1}{2Ma^3}\left(1 + \frac{9}{8a^2} + \frac{75}{64a^4}\right)$$
$$+ \frac{3}{4Ma^4}\left(\tfrac{1}{2} + N + \frac{5}{8a^2}\,\overline{\tfrac{5}{2} + N}\right)\cdot \text{cos.} STL$$
$$+ \frac{1}{2Ma^3}\left(3 \cdot \overline{1 + N} + \frac{5}{2a^2} \cdot \overline{1 + \tfrac{1}{2}N} + \frac{315}{128a^2} \cdot \overline{1 + \tfrac{1}{2}N}\right)\cdot \text{cos. } 2STL.$$

THEOREMA III.

Si planum aliquod circa centrum T, fig. 60., feratur eodem angulari motu, quo Planeta superior volvitur, inferioris Planetæ orbita in plano ipso accedet proxime ad ellipsim, cujus major axis quadraturarum lineæ respondeat, & quæ parallele ad minorem axem transponatur: dato autem puncto R' in plano mobili, locus Planetæ L in spatio immobili proxime habebitur capiendo $TR' = TL$, ac positis angulis VTR', & VTL inter se ut $1 : N$.

Nam si ille tantum spectetur perturbatricium virium terminus, cujus argumentum est duplus angulus STL, fig. 58., a quadraturis ad

ad conjunctionem transeundo, juxta superius corollarium, fiet incrementum osculatoris radii

$$\frac{1}{2Ma^3}\left(3\cdot\overline{1+N}+\frac{5}{2a^2}\cdot\overline{1+\tfrac{1}{2}N}+\frac{135}{128a^4}\cdot\overline{1+\tfrac{1}{3}N}\right)\cdot \text{cos. } 2STL.$$

Quare si superior Planeta in dato semper maneret loco, differentiæ radiorum osculatorum orbitæ a Planeta inferiori in plano immobili descriptæ proportionales essent cosinui duplæ distantiæ Planetæ utriusque, & toti osculatores radii augerentur in duplicata ratione cosinus distantiæ ejusdem, sive in ratione duplicata sinus distantiæ Planetæ inferioris a quadraturis: quod juxta elementa conicorum locum haberet in ellipsi, cujus centrum sit T, & major axis quadraturarum lineæ respondeat. At quia alio etiam termino assumpto vis centripeta minor sit quantitate

$\frac{1}{Ma^4}\left(\frac{9}{8}+\frac{75}{64a^2}\right)\cdot$ cos. STL, & vis centrifuga debet esse major quantitate

$\frac{3N}{4Ma^4}\left(1+\frac{5}{8a^2}\right)\cdot$ cos. STL, & citra, atque ultra quadraturarum lineam contrarius est valor cos. STL; manente eodem vectore radio in quadraturis, differentia ipsius radii in locis aliis, saltem quam proxime, erit ut differentia virium perturbatricium, sive ut cos. STL: quod juxta Theor. II. libri hujus in ellipsi parallele ad minorem axem transposita haberet locum. Quod si etiam Planetam superiorem in orbe suo circa idem centrum volvi intelligamus, transposita eadem ellipsis describetur in plano mobili, & semita VLU, fig. 59., in plano immobili percursa construi poterit capiendo semper angulum VTR' ad VTL in simplici ratione differentiæ motuum angularium Planetæ utriusque ad inferioris Planetæ motum, sive in ratione $1 : N$, & radios TR', TL statuendo inter se æquales.

COROLLARIUM.

Quia tempus periodicum primi Jovis Satellitis est $1^d\ 18^h\ 27'$, secundi vero $3^d\ 13^h\ 13'$, adeoque relativus motus duorum Satellitum ad motum absolutum primi se habet ut $2566 : 5113 = 1 : 1.9926$, erit quam proxime $N = 2$, & compositis Jovis, & secundi Satellitis actionibus orbita a priori Satellite in spatio immobili percursa trans-

tranſpoſitione, & revolutione ellipſeos ſic deſcribetur ut major, ac minor ſemiaxis fere in directum jaceant. Contra ſi requirantur perturbationes Veneris, quæ ex Jovis actione oriri poſſunt, ob tarditatem motus Jovis, orbita in ſpatio immobili deſcripta ita ad ellipſim tranſpoſitam accedet, at ſemiaxes bini fere ſe interſecent ad rectos angulos.

PROBLEMA VIII.

Iiſdem poſitis differentiam ſemiaxium invenire.

Quia ob parvitatem virium perturbatricium in ſupputanda unaquaque ſemiaxium differentia, & quæ ex ellipticitate, & quæ ex tranſpoſitione orbitæ ortum ducit, negligi poſſunt variationes exiguæ, quæ ex altera proficiſcuntur, & ſingillatim utraque inquiri poteſt; mediocris ellipſeos radius vocetur 1, & ſit ω differentia majoris, aut minoris ſemiaxis, & juxta Probl. III. ellipſi circa centrum revoluta radius oſculi in quadraturis ad radium oſculi in ſyzigiis Planetæ ſuperioris ſe habeat ut $1 : 1 + 2\,\omega \,.\, \frac{4 - N^2}{N^2}$. Si in corollario Problematis antecedentis poſterior dumtaxat terminus accipiatur, & fiat primum ang. $STL = 90^\circ$, & coſ. $2\,STL = -1$, ac deinde ang. $STL = 0$, & coſ. $2\,STL = 1$, pro ratione eadem radiorum Planetæ inferioris orbitam oſculantium in quadraturis, & ſyzigiis habebimus

$$1 : 1 + \frac{1}{Ma^3}\left(3.\overline{1+N}\;\frac{5}{2a^2}.\overline{1+\tfrac{1}{2}N} + \frac{315}{128a^4}.\overline{1+\tfrac{1}{2}N}\right).$$

Erit itaque

$$\omega = \frac{N^2}{2Ma^3.\overline{4-N^2}}\left(3.\overline{1+N} + \frac{5}{2a^2}.\overline{1+\tfrac{1}{2}N} + \frac{315}{128a^4}.\overline{1+\tfrac{1}{2}N}\right).$$

Quod ſi vero alius etiam corollarii ejuſdem terminus aſſumatur, erit circuli radius ad differentiam illam radii oſculatoris, quæ ex tranſpoſitione orbitæ circa centrum revolutæ in ſpatio immobili orietur ut $1 : \frac{3}{4Ma^4}\left(\tfrac{1}{2} + N + \frac{5}{8a^2}.\overline{\tfrac{1}{2} + N}\right)$. Quare ſi ſit ϖ quantitas, qua prior orbita parallele ad ſyzigiarum lineam tranſponitur;

cum

cum juxta Probl. IV. ratio etiam hujusmodi esse debeat $1 : \varpi . \frac{\overline{N^2 - 1}}{N^2}$,

exæquatis rationibus prodibit

$$\varpi = \frac{3 N^2}{4Ma^4 . \overline{N^2 - 1}} \left(\tfrac{1}{2} + N + \frac{5}{8 a^2} \overline{\tfrac{1}{2} + N} \right).$$

COROLLARIA.

I. Ita igitur quæ proxime circularis est orbita Satellitis, aut Planetæ alicujus, actione Satellitis, aut Planetæ alterius superioris, in curvam aliam transformabitur, quæ revolutione, & transpositione ellipseos construi poterit, ut de lunari orbita in præcedente capitulo dictum est. Quia vero si Satelles quisque inferior ad proxime superiorem referatur ratio $N : 1$, quæ est ratio revolutionis synodicæ ad periodicam, ad duplam proxime accedit, & quantitas $4 - N^2$ fractio est valde exigua; prior semiaxium variatio, quæ ex ellipticitate orbitæ orietur, longe erit major quam quæ ex transpositione ellipseos oriri posset. Neglecta igitur variatione hac posteriore, orbita inferioris Satellitis cujusque satis accurate construetur in ellipsi Jovi concentrica angularem distantiam vectoris radii a linea quadraturarum, in qua jacet major axis orbitæ, augendo in ratione temporis revolutionis synodicæ ad periodicam. Videbimus in Satellitibus superioribus ad inferiores relatis variationem, quæ ex ellipticitate oritur, negligi posse præ variatione alia, quæ pendet ex orbitæ transpositione, & satis accurate orbitam ellipsi tantum transposita posse construi.

II. Quia periodicum tempus primi Jovis Satellitis est 2547': secundi 5113': tertii $7^d\ 3^h\frac{1}{2}\ 42'$, sive 10302', & differentia angularium motuum primi, & secundi Satellitis ad motum angularem primi, seu tempus revolutionis periodicæ ad tempus synodicæ revolutionis se habet ut $1 : 1.9926 = 1 : N$; erit $N^2 = 3.970455$, & $4 - N^2 = 0.029545$, ac pariter secundo Satellite relato ad tertium fiet $N = 1.9853$, & $4 - N^2 = 0.0586$. At si primus Satelles ad tertium referatur, prodibit $N = 1.33$ circiter, & $4 - N^2 = 2.23$: & cum etiam ratio $a : 1$ tanto sit major in tertio, quam in secundo Satellite relato ad primum; ex prima formulæ superioris considera-

tione

tione manifeſtum eſt variationem motus primi Satellitis, quæ ex actione ſecundi oritur, longe majorem eſſe quam quæ oritur ex actione tertii, atque hanc pariter præ illa negligi poſſe. Cum periodicum tempus quarti Satellitis ſit $16^d\ 16^h\ 32'$; erit in tertio Satellite relato ad quartum $N = 1.75$, & $4 - N^2 = 0.9375$, & in hypotheſi maſſarum æqualium variationes motus primi, & ſecundi Satellitis genitæ actione ſecundi, & tertii multo majores erunt quam quæ in tertio Satellite gigni poſſunt actione quarti.

III. Si quæ proxime circularis eſt Terræ orbita ad Jovem refefatur, temporibus periodicis ut antea poſitis erit $1 : N = 4332.514 - 365.2565 : 4332.514 = 1 : 1.0927$, ac fiet $4 - N^2 = 2.8074$ circiter, neque hæc amplius exigua erit fractio, per quam diviſione facta tanto major quantitas prodire debeat. Itaque Terræ orbita revolutione ſimul, & tranſpoſitione ellipſeos conſtruenda erit: quod idem ſtatuendum erit in orbita Veneris ad Terram relata. At cum differentia motuum angularium Veneris, & Terræ ad motum angularem Veneris, ſeu tempus periodicæ revolutionis Veneris ſe habeat ad tempus quo Venus ad eumdem Terræ aſpectum revertitur ut $140.6389 : 365.2565$, prodibit $N = 2.6$ circiter, & $4 - N^2 = -2.76$, ac ſemidifferentia ſemiaxium ω fiet negativa, & ſingularis caſus habebitur, quod illa ellipſis, in quam circularis orbita Veneris transformari debet actione Terræ, contraria ratione diſponetur, & major ellipſeos axis ſyzigias, minor quadraturas Terræ reſpiciet.

PROBLEMA IX.

Data ratione quantitatis materiæ determinare æquationes motus Satellitum, ac Planetarum inferiorum, qui moventur in orbitis proxime circularibus, ac perturbantur a Satellitibus, ac Planetis aliis ſuperioribus.

Si radius mediocris orbitæ pro unitate accipiatur, & ſit ſemidifferentia ſemiaxium ellipſeos circa centrum ut antea in ſpatio immobili revoluta, ac ſi inſuper tranſpoſitionis quantitas vocetur ϖ; juxta Probl. VIII., & Theor. III. erit in fig. 58. radius quicumque vector $TL = 1 + \varpi . \text{cof.}\ STL - \omega . \text{cof.}\ 2\,STL$: & ſi motus medius inferioris Satellitis, aut Planetæ vocetur Z, verus autem z, & ſit Satellitis, aut Planetæ ſuperioris motus nz, erit angu-

lus

lus $STL = z - nz$, ac fiet radius idem vector $= 1 + \varpi . \text{cof.} (z - nz) - \omega . \text{cof.} (2z - 2nz)$. Jam vero cum dato vectore radio angularis, motus fit ut velocitas eidem radio perpendicularis, & cum data velocitate projectionis, ob æquales areas æqualibus temporibus defcriptas, angularis velocitas fit reciproce ut radius vector, & angularis motus reciproce ut quadratum vectoris radii; erit generatim angularis motus ut velocitas projectionis directe, & quadratum vectoris radii reciproce. Cum igitur juxta Probl. VI. velocitas inferioris corporis actione fuperioris augeatur in ratione

$$1 + \frac{3N}{8Ma^4}\left(1 + \frac{5}{8a^2}\right).\text{cof.}(z - nz) + \frac{N}{4Ma^3}\left(3 + \frac{5}{4a^2} + \frac{105}{128a^4}\right)\text{cof.}(2z - 2nz) : 1;$$

angularis motus augebitur in ratione

$$1 - \left(2\varpi - \frac{3N}{8Ma^4} . \overline{1 + \frac{5}{8a^2}}\right) . \text{cof.} (z - nz)$$

$$+ \left(2\omega + \frac{N}{4Ma^3} . \overline{3 + \frac{5}{4a^2} + \frac{105}{128a^4}}\right) . \text{cof.} (2z - 2nz) : 1.$$

Summis igitur acceptis, & unoquoque coefficiente per coefficientem anguli variabilis divifo, ac pofito ut antea $\frac{1}{1 - n} = N$, erit

$$z = Z - \left(2\varpi N - \frac{3N^2}{8Ma^4} . \overline{1 + \frac{5}{8a^2}}\right) . \text{fin.} (z - nz)$$

$$+ \left(\omega N + \frac{N^2}{8 . Ma^3} \overline{3 + \frac{5}{4a^2} + \frac{105}{128a^4}}\right) . \text{fin.} (2z - 2nz).$$

COROLLARIA.

I. Si quantitates N, & $4 - N^2$ accipiantur ut in corollario fecundo proxime fuperiore, & mediocres diftantiæ Satellitum Jovialium a centro Jovis accipiantur illæ quæ prodeunt ex lege temporum periodicorum, ut prioris libri initio notarum eft, & primo Jovis Satellite ad fecundum relato fiat $\frac{1}{a} = \frac{5667}{9017} = 0.6285$, fubftitutionibus aliis factis erit in primo eodem Satellite

$M\varpi$ in femid. orbitæ	$M\omega$	$M\varpi$ in femid. Jovis.	$M\omega$	*Æquationes*: $-\frac{2.6}{M}$ fin. $(\zeta - n\zeta)$
0.72.	193.3.	4.18.	1095.4	
Juxta D. Bailly.		Juxta D. la Grange.		$+\frac{385.6}{M}$ fin. $(2\zeta - 2n\zeta)$
0.82.	204.92	4.19.	1014.93.	

In expreffione igitur vectoris radii methodo hac noftra fere idem prodibit coefficiens ϖ cofinus anguli $\zeta - n\zeta$: coefficiens vero ω cofinus anguli $2\zeta - 2n\zeta$ paulo minor hic prodiit quam D. Bailly, & paulo major quam D. la Grange in operibus memoratis determinaverant. Si coefficiens præcipuus 385.6 ducatur in 57.29578°, quem radii valorem affumpfimus loco unitatis, & productum exæquetur numero $29\frac{1}{2}'$, quem coefficientis valorem ex obfervationibus colligi jam adnotavimus, in fecundo Satellite, quantitas materiæ præ quantitate materiæ Jovis M eruetur 0.0000215.

II. Pariter fi fecundo Satellite ad tertium relato fiat $\frac{1}{a} = \frac{9017}{14384} = 0.62687$, & valores quantitatum N, & $4 - N^2$ iidem accipiantur, qui in Coroll. II. Problematis antecedentis, erit pro fecundo eodem Satellite

$M\varpi$ in femid. orbitæ	$M\omega$	$M\varpi$ in femid. Jovis.	$M\omega$	*Æquationes*. $-\frac{2.56}{M}$ fin. $(\zeta - n\zeta)$
0.71.	95.6	10.2.	1375.	
Juxta D. Bailly.		Juxta D. la Grange.		$+\frac{190.2}{M}$ fin. $(2\zeta - 2n\zeta)$.
0.716.	101.46.	7.16.	824.07.	

Quare in hoc etiam Satellite prioris termini coefficientem fere eumdem invenimus, qui occurrit apud authores jam memoratos. Secundus autem coefficiens cum circiter triente major nobis prodierit, quam apud D. la Grange occurrat, adhuc tamen minor prodiit, quam ftatuerat D. Bailly.

Pa-

III. Pariter cum in tertio Jovis Satellite ad quartum relato sit distantiarum ratio $\frac{1}{a} = \frac{14384}{25299} = 0.5686$, erunt analogæ aliæ quantitates

$M\varpi$	$M\omega$	$M\varpi$	$M\omega$	*Æquationes.*
in femid. orbitæ		in femid. Jovis.		$-\frac{1.75}{M}$. fin. $(z - nz)$
0.46.	3.06.	6. 6.	44.015	
Juxta D. Bailly.		Juxta D. la Grange.		$+\frac{5.6}{M}$. fin. $(z - 2nz)$.
0.52.	3.1	7.46.	33.62.	

Proxime igitur conveniunt inter se numeri, quos hic subduximus, & quos bini iidem authores jam antea invenerant, atque ita proxime habemus æquationes motus, quæ pendent ex simplici distantia bis accepta inferioris cujuslibet Satellitis ab altero Satellite proxime superiore. Tertio etiam seriei termino supputato in Probl. VI., & VII. facile exhiberi posset æquatio quæ pendet ex distantia ter accepta Satellitis unius ab alio. Ea vero nimis exigua est æquatio, & exigua pariter est æquatio quæ pendet ex eadem distantia semel sumpta, nec nisi unius æquationis habenda est ratio, quæ pendet ex distantia bis accepta, quæque evanescit in syzigiis, & quadraturis, & in octantibus fit maxima.

IV. Simili modo Terra ad Jovem relata si fiat $\frac{1}{a} = \frac{1}{5.198}$, & numeri N & $4 - N^2$ assumantur qui antea, & Jovis massa ad massam Solis se habeat ut 11113 : 10000000, quemadmodum in Probl. I. Lib. I. statutum est, ac sit motus Terræ z, Jovis nz erit in terrestri orbita radius vector $1 + 0.000188.\text{cof.}(z - nz) - 0.0000108.\text{cof.}(2z - 2nz)$ & medii motus æquatio ex Jove orta $- 8.33''$ fin. $(z - nz) + 3.18.$ fin. $(2z - 2nz)$. Eadem etiam ratione, qua in scholio capitis antecedentis, si anomalia Jovis sit mz, excentricitas autem δ, & loco vis mediocris perturbatricis $\frac{b}{Ma^3}$ scribamus $\frac{b}{Ma^3}(1 - 3\delta\,\text{cof.}mz)$, posito $m = n$, alia habebitur æquatio $\frac{3b\delta.\text{fin.}mz}{Ma^3 n} = 2.8''.$ fin. mz.

 Leo-

Leonardus Eulerus §. II. Par. II. Differtationis de perturbatione motus Planetarum, quæ anno 1756 a Parifienfi Academia præmium retulit, pofita Jovis maffa $\frac{1}{1067}$ priores binas æquationes ftatuit — 7.06″. fin. $(\zeta - n\zeta) + 2.67''$. fin. $(2\zeta - 2n\zeta)$, tertiam vero non memoravit. D. Clairaut in Actis Parifienfibus anni 1754, eadem pofita Jovis maffa æquationes hujufmodi invenit effe

— 7.05″. fin. $(\zeta - n\zeta) + 2.7''$. fin. $(2\zeta - 2n\zeta)$.

V. Quod fi denique orbita Veneris ad Terram referatur, & maffa Terræ fit pars 0.00000325 quantitatis materiæ Solis, factis fimilibus fubftitutionibus eruetur $\omega = -0.00000223$, & $\varpi = 0.00000451$, eruntque binæ æquationes motus

— 4.2″. fin. $(\zeta - n\zeta)$ — 11″. fin. $(2\zeta - 2n\zeta)$. D. la Lande cum maffam Terræ affumpfiffet $\frac{1}{169282}$, feu proxime 0.0000059 in Actis Parifienfis Academiæ anni 1760 æquationes hujufmodi effe invenit — 9.6″. fin. $(\zeta - n\zeta)$ — 22″. fin. $(2\zeta - 2n\zeta)$. Quæ igitur celeberrimi authores æquationes motus Satellitum, ac Planetarum fua finguli methodo tradiderunt facile admodum ex formulis præcedentibus colliguntur omnes. Simili modo æquationes analogæ medii motus Martis quæ ex Jove, & medii motus Jovis, quæ ex Saturnos proficifcuntur fupputari poffent. Hæc vero orbitarum magis excentricarum exempla applicandis formulis aliis refervabimus, quas inferius ex generali folutione problematum horum omnium eruemus. Inæqualitates autem Satellitum Jovialium, quæ ex ratione Saturni, quæque ex prioribus formularum antecedentium terminis facile colliguntur, adeo exiguæ funt, ut præ inæqualitatibus aliis ex mutua Satellitum actione ortis negligi debeant.

AP-

APPENDIX.

DE VIRIUM ATTRACTRICIUM SERIEBUS.

CUm inæqualitatum motus ſupputandarum problema a Luna ad Satellites alios, atque ad Planetas omnes primarios extenditur, primo occurrit difficultas ſerierum, quæ vires perturbatrices exprimunt, & quæ non adeo celeriter convergunt ut unus tantum, aut alter ſeriei terminus poſſit accipi, quemadmodum in priore libri hujus problemate, cum de Luna ageretur, factum jam eſt. De harum ſerierum forma, & de coefficientibus termini uniuſcujuſque in unam ſummam colligendis ingenioſe egerunt Mathematici præſtantiſſimi Eulerus, Clairaut, & Alembert. Et quidem Eulerus §. XXIX., & XXX. Diſſertationis de inæqualitatibus Jovis, & Saturni elegantes formulas protulit, quæ & quantitatem coefficientium primi, & ſecundi termini, & legem ſubſequentium aliorum terminorum ſeriei, atque ex duobus prioribus pendentium exprimunt. Formularum earumdem demonſtrationem, quam Eulerus non explicaverat, ex methodo quadraturarum derivatam protulit Clairaut in Actis Pariſienſis Academiæ anni 1754., eamque ſimpliciorem effecit D. Bailly Par. II. Sect. I. Satellitum Jovialium. Alembertius Lib. II. de Mundi Syſtemate Cap. III. ex formulis binomii aliam ſupputandorum coefficientium methodum derivavit, qua pro prioris termini coefficiente alia exhibetur ſeries, quæ poſt quinque, aut ſex terminos in progreſſionem Geometricam recidit, & pro coefficiente ſecundi termini exhibetur ſeries, quæ ſimiliter deſinit in progreſſionem Geometricam poſt ſeptem, aut octo terminos, alii vero coefficientes omnes data lege pendent ex duobus primis. Ego cum problemata hæc omnia examinare cæpi in diſſertatione uſque ab anno 1760. ad Pariſienſem Academiam tranſmiſſa animadverti priorem illam attractricium virium expreſſionem, quæ continet potentias coſinus diſtantiæ Planetæ, aut Satellitis ſuperioris ab inferiore, quæque ope formularum trigonometricarum facile in ſeriem aliam reſolvitur, cujus ter-

termini continent cofinus angulorum multiplorum, ita convergere ut cum de Planetis, aut Satellitibus inferioribus fermo eft, qui perturbantur a fuperioribus nullo alio artificio ad inftituendum calculum fit opus. Ita fi in Probl. VI., & in expreffione quadrati velocitatis accipiatur præcipuus feriei terminus

$\frac{N}{2Ma^{3}}\left(3+\frac{5}{4a^{2}}+\frac{105}{128a^{4}}\right)$. cof. $2STL$, & primo Jovis Satellite ad fecundum relato fiat $\frac{1}{a}=0.6285$, erit $\frac{5}{4a^{2}}=0.444$, $\frac{105}{128a^{4}}=0.128$, & continuata ferie quartus emerget $\frac{315}{512a^{6}}=0.038$ fcilicet fere octuagies minor primo. Hic itaque cum de exiguis æquationibus agatur fupervacaneum omnino erat calculos longius perducere, atque hoc etiam ex capite facillima problematum refolutio facta eft. Videbimus eamdem effe rationem ferierum quæ exprimunt attractrices vires Planetarum aliorum ac Satellitum inferiorum.

CAPUT TERTIUM.

DE PLANETIS, AC SATELLITIBUS SUPERIORIBUS, QUI PERTURBANTUR AB INFERIORIBUS.

PROBLEMA X.

Invenire vires accelleratrices, quibus Planetæ fuperiores juxta vectorem orbitæ radium perturbantur ab inferioribus.

Sit in fig. 58. inferior Planeta S, & manentibus aliis antecedentibus denominationibus, juxta Probl. I. fit $\frac{b^{2}-at}{b\,(a^{2}+b^{2}-2at)^{\frac{3}{2}}}$ vis, qua ipfe attrahit fuperiorem Planetam L juxta vectorem radium TL Quia etiam orbitæ centrum T fecundum radium eumdem trahitur vi

vi $\frac{t}{ba^2}$, erit $\frac{b^2 - at}{b(a^2 + b^2 - 2at)^{\frac{3}{2}}} + \frac{t}{ba^2}$ vis, qua ſuperior Planeta inferioris Planetæ actione trahetur ad idem centrum. Et quia eſt a major quam b, ita in ſeriem evolvendo fractionem, quæ vim perturbatricem deſignat, ut denominatores fractionum aliarum inde prodeuntium ſint poteſtates variæ radii vectoris b; in eadem ſerie Probl. I. fiet $P^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{b^3}$, & $Q = \frac{a^2 - 2at}{b^2}$, atque in denominatoribus ſingulis ſubſequentium terminorum ſcribere oportebit b^3 loco a^3, in numeratoribus vero $\frac{a^2}{b^2}$ loco $\frac{b^2}{a^2}$, & $\frac{2at}{b^2}$ loco $\frac{2at}{a^2}$. Hoc ipſo evadet

$$\frac{1}{(a^2 + b^2 - 2at)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{b^3} + \frac{3at}{b^5} - \frac{3a^2}{2b^5} + \frac{15a^2t^2}{2b^7} - \frac{15a^3t}{2b^7}$$
$$+ \frac{15a^4}{8b^7} + \frac{35a^3t^3}{2b^9} - \frac{105a^4t^2}{4b^9} + \frac{315a^4t^4}{8b^{11}} + \frac{105a^5t}{8b^9} - \frac{315a^5t^3}{4b^{11}}$$
$$+ \frac{693a^5t^5}{8b^{11}}.$$

Qui termini omnes ſi ducantur in $b - \frac{at}{b}$, addaturque terminus $\frac{t}{ba^2}$, eodemque ordine Probl. V. pro poteſtatibus variis quantitatis $\frac{t}{b}$, ſeu coſinus anguli STL ſubſtituantur coſinus angulorum multiplorum, collectis ſimul, atque ordinatis terminis, incrementum vis centripetæ ſuperioris ipſius Planetæ inferioris actione ortum prodibit

$$\frac{1}{b^2} + \frac{3a^2}{4b^4} + \frac{45a^4}{64b^6}$$
$$+ \left(\frac{1}{a^2} + \frac{2a}{b^3} + \frac{3a^3}{2b^5} + \frac{45a^5}{32b^7}\right).\ \text{coſ.}\ STL$$
$$+ \left(\frac{9a^2}{4b^4} + \frac{25a^4}{16b^6}\right).\ \text{coſ.}\ 2STL$$
$$+ \frac{5a^3}{2b^5}.\ \text{coſ.}\ 3STL.$$

COROLLARIUM.

Si maſſa corporis in centro poſiti ad Planetæ inferioris, & at-

attrahentis maſſam ſe habeat ut $M:1$, erit $\frac{M+1}{b^2}$ gravitas omnis, qua ellipſis a ſuperiore Planeta deſcribi poterit; & ſi gravitas ipſa in mediocri diſtantia accipiatur loco unitatis, & præ centrali corpore negligatur Planetæ inferioris maſſa, erit vis perturbatrix, qua ſuperior Planeta ad centrum propius trahetur

$$\frac{3a^2}{4Mb^4}\left(1+\frac{15a^2}{16b^2}\right)$$
$$+\frac{1}{M}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2a}{b^3}+\frac{3a^3}{2b^5}+\frac{45a^5}{32b^7}\right).\ \text{coſ. } STL$$
$$+\frac{a^2}{4Mb^4}\left(9+\frac{25a^2}{4b^2}\right).\ \text{coſ. } 2STL$$
$$+\frac{5a^3}{2Mb^5}.\ \text{coſ. } 3STL.$$

PROBLEMA XI.

Invenire variationem velocitatis, quæ in Planetis ſuperioribus inferiorum actione oriri poteſt.

Cum vis perpendicularis radio ſit $\frac{LM}{b}\left(\frac{a}{(a^2+b^2-2at)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{a^2}\right)$, ſimili reſolutione facta vis eadem evadet $\frac{LM}{b}\left(\frac{a}{b^3}-\frac{1}{a^2}+\frac{3a^2t}{b^4}-\frac{3a^3}{2b^5}+\frac{15a^3t^2}{2b^5}-\frac{15a^4t}{2b^6}+\frac{35a^4t^3}{2b^6}+\frac{15a^5}{8b^7}-\frac{105a^5t^2}{4b^7}+\frac{315a^5t^4}{8b^7}\right)$, ac rurſus pro poteſtatibus variis coſinus anguli STL ſubſtituendo coſinus angulorum multiplorum, & producta omnia coſinuum, ac ſinus recti reſolvendo, vis omnis fiet

$$\left(\frac{a}{b^3}-\frac{1}{a^2}+\frac{3a^3}{8b^5}+\frac{15a^5}{64b^7}\right).\ \text{ſin. } STL$$
$$+\left(\frac{3a^2}{2b^4}+\frac{5a^4}{8b^6}\right).\ \text{ſin. } 2STL+\frac{15a^3}{8b^5}.\ \text{ſin. } 3STL.$$

Jam vero ſi angulares motus Planetæ ſuperioris, inferiorisque ſint inter ſe ut $n:1$, & tempus, quo inferior Planeta revolutionem integram abſolvit, ad tempus, quo ad eumdem ſuperioris Planetæ aſpe-

aſpectum revertitur, ſe habeat ut $1:N$; dum inferior Planeta angulo LTl fiet propior ſuperiori, revera deſcribet angulum $N.LTl$, ſuperior autem Planeta interim deſcribet angulum $n.NTl$. Quia igitur tendendo a quadraturis ad conjunctionem Planeta inferior ſuperiorem, qui tardior eſt, ſubſequitur, ipſumque tardiorem efficit, ſi V deſignet ſuperioris Planetæ velocitatem, & radius ſuperioris ipſius orbitæ accipiatur pro unitate, & centri maſſa ut antea vocetur M, eadem methodo Probl. VI. eruetur

$$V^2 = C - \frac{nN}{M}\left(2a - \frac{2}{a^2} + \frac{3}{4}a^3 + \frac{15}{32}a^5\right).\text{coſ.}STL$$
$$- \frac{nN}{M}\left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{5}{8}a^4\right).\text{coſ.}\,2STL - \frac{5nNa^3}{4M}.\text{coſ.}\,3STL.$$

COROLLARIUM.

Si quantitas conſtans C in orbita proxime circulari pro unitate accipiatur, & quadratum velocitatis radio vectori perpendicularis dividatur per vim centripetam $1 + \frac{3a^2}{4M}\left(1 + \frac{15}{16}a^2\right)$
$+ \frac{1}{M}\left(\frac{1}{a^2} + 2a + \frac{3}{2}a^3 + \frac{45}{32}a^5\right).\text{coſ.}STL + \frac{a^2}{4M}\left(9 + \frac{25}{4}a^2\right).\text{coſ.}\,2STL$
fiet radius oſculator orbitæ Planetæ ſuperioris

$$1 - \frac{3a^2}{4M}\left(1 + \frac{15}{16}a^2\right)$$
$$- \frac{1}{M}\left(\frac{1 - 2nN}{a^2} + 2a.\overline{1+nN} + \frac{3}{4}a^3.\overline{2+nN} + \frac{15a^5}{32}.\overline{3+nN}\right).\text{coſ.}STL$$
$$- \frac{a^2}{M}\left(\frac{3}{2}.\overline{\frac{3}{2}+nN} + \frac{5a^2}{8}.\overline{\frac{5}{2}+nN}\right).\text{coſ.}\,2STL.$$

THEOREMA IV.

Si in plano, quod circa centrum eodem angulari motu Planetæ inferioris revolvatur, ellipſis deſcripta ſit, & major ellipſeos axis ſyzigiis Planetæ ſuperioris, inferiorisque, minor quadraturarum lineæ reſpondeat, eaque parallele ad ſyzigiarum lineam tranſponatur; ſuperioris Planetæ ſemita quam proxime exhiberi poterit ellipſi hujuſmodi in ſpatio immobili ſic revoluta, ut, paribus a centro diſtan-

tiis, anguli in plano mobili, atque immobili percurſi ſint inter ſe ut differentia angularium motuum Planetæ utriuſque ad ſuperioris Planetæ motum.

Primo enim ſi poſterior tantum ſumatur corollarii antecedentis terminus, differentiæ radiorum oſculatorum univerſim erunt ut coſinus duplæ diſtantiæ Planetæ utriuſque, adeoque oſculatores radii a quadraturis tranſeundo ad ſyzigias imminuentur in duplicata ratione ſinus diſtantiæ Planetæ ſuperioris a quadraturis Planetæ alterius inferioris. Itaque ſuperioris Planetæ ſemita in plano illo, quod eodem inferioris Planetæ motu volvatur circa centrum, erit ellipſis, cujus major axis ad inferiorem Planetam ipſum dirigetur. Deinde vero cum priori etiam ſpectato termino gravitas in centrum augeatur, & vis centrifuga minuatur quantitate alia exigua; quæ eſt in ſimplici ratione ſinus diſtantiæ Planetæ utriuſque, ſeu coſinus diſtantiæ Planetæ ſuperioris a quadraturis, manifeſtum eſt paribus intervallis, & citra & ultra quadraturarum lineam Planetam ſuperiorem in adverſas partes extra orbitam ellipticam debere excurrere, & differentiam vectoris cujuſque radii ſaltem quam proxime coſinui eidem proportionalem eſſe oportere: quod in ellipſi parallele ad ſyzigiarum lineam tranſpoſita locum habet. Denique cum anguli a Planeta ſuperiore in plano ut antea mobili, atque in immobili ſpatio deſcripti ſint inter ſe in ratione motus relativi Planetæ utriuſque ad abſolutum ſuperioris motum, patet in ſpatio ipſo immobili ſemitam ſuperioris Planetæ conſtrui angulares diſtantias vectoris cujuſque radii a majori axe tranſpoſitæ ellipſeos minuendo in ratione eadem motus abſoluti ad relativum.

COROLLARIUM.

Ellipſes igitur, in quas primum circulares orbitæ abire debent, contraria ratione in Planetis inferioribus, ac ſuperioribus diſponentur, ut in illis quidem ſemiaxis minor, & in his major ad Planetam alium attrahentem dirigatur. Inſuper ellipſeos tranſpoſitæ revolutio in Planetis inferioribus ſic fiet, ut quæ æqualibus radiis reſpondent angulares diſtantiæ a quadraturis in plano mobili, & immobili ſe habeant ut $1 : N = 1 - n : 1$. In ſuperioribus Planetis

cum

cum ratio relativi motus ad abſolutum ſit $1 : nN$, erit ratio angularium diſtantiarum in plano utroque $1 : nN = \frac{1}{n} - 1 : 1$.

PROBLEMA XII.

Iiſdem poſitis invenire differentias ſemiaxium.

Si eadem methodo Probl. VIII. a termino illo exordiamur, qui pro argumento habet duplum angulum STL, & fiat coſ. $2STL = \pm 1$, radius oſculi in ſyzigiis, ſive in vertice majoris axis ellipſeos, ad radium oſculi in quadraturis, ſive in vertice minoris axis ſe habebit ut $1 : 1 + \frac{a^2}{M}(3 \cdot \overline{\tfrac{1}{2} + nN} + \tfrac{1}{4} a^2 \cdot \overline{\tfrac{1}{2} + nN})$. Jam vero ſi ellipſeos mediocris radius vocetur 1, & differentia ipſius radii, majoriſque; aut minoris ſemiaxis ſit ω, iiſdem initis Probl. III. rationibus, & juxta poſterius corollarium loco N^2 ſcribendo $n^2 N^2$, fiet eadem radiorum oſculatorum ratio in vertice majoris, & minoris axis ellipſeos $1 : 1 + 2\omega \cdot \frac{4 - n^2 N^2}{n^2 N^2}$. Itaque binis rationibus inter ſe æquatis fiet

$$\omega = \frac{a^2 n^2 N^2}{2M(4 - n^2 N^2)}(3 \cdot \overline{\tfrac{1}{2} + nN} + \tfrac{1}{4} a^2 \cdot \overline{\tfrac{1}{2} + nN}$$

Pariter ſi ſit ϖ quantitas, qua ſuperioris Planetæ orbita, ſpectato alio ſeriei termino debet tranſponi, & loco N^2 rurſus ſcribamus $n^2 N^2$, eadem methodo Probl. IV. patebit radium orbitæ proxime circularis ad differentiam radiorum circuli, & orbitæ in plano immobili deſcriptæ eſſe oportere ut $n^2 N^2 : \varpi(n^2 N^2 - 1)$. Jam vero juxta corollarium Probl. X., poſito coſ. $STL = 1$, ratio hujuſmodi in conjunctione eſſe debet

$$1 : -\frac{1}{M}\left(\frac{1 - 2nN}{a^2} + 2a \cdot \overline{1 + nN} + \tfrac{3}{4} a^3 \cdot \overline{2 + nN} + \frac{15 a^4}{32} \cdot \overline{3 + nN}\right).$$

Itaque exæquatis rurſus rationibus prodibit

$$\varpi = \frac{n^2 N^2}{M \cdot (1 - n^2 N^2)}\left(\frac{1 - 2nN}{a^2} + 2a \cdot \overline{1 + nN} + \tfrac{3}{4} a^3 \cdot \overline{2 + nN} + \frac{15 a^4}{32} \cdot \overline{3 + nN}\right).$$

COROLLARIA.

Si loco N ſcribamus $\frac{1}{1 - n}$, reductis terminis omnibus habebimus

$$\omega = \frac{a^2 n^2}{2M . \overline{1-n} . (\overline{2-2n} - n^2)} \left(\tfrac{1}{2} . \overline{3-n} + \tfrac{1}{8} a^2 . \overline{5-3n} \right),$$

$$\varpi = \frac{n^2}{M . \overline{1-n} . \overline{1-2n}} \left(\frac{1-3n}{a^2} + \tfrac{1}{4} a^2 . \overline{2-n} + \frac{15}{32} a^2 . \overline{3-2n} \right):$$

quas easdem formulas inferius generali alia methodo eruemus.

II. Quia in superioribus Satellitibus Jovis revolutionis tempus duplo circiter majus est quam in aliis proxime inferioribus, atque est fere $n = \frac{1}{2}$, exigua erit fractio $1 - 2N$, & posterior semiaxium variatio, quæ ex transpositione orbitæ orietur, longe erit major quam quæ ex ellipticitate oriri posset. Orbita igitur Satellitis cujusque superioris in plano, quod eodem angulari motu inferioris Satellitis volvatur circa centrum, satis accurate construetur circulari orbita parallele ad lineam syzigiarum versus conjunctionis plagam transposita: in spatio autem immobili vestigium semitæ habebitur angulares distantias vectoris cujusque radii ab immobili quadraturarum linea minuendo ut antea in ratione motus relativi ad absolutum: atque ita ex binis theorematis, quæ demonstravimus alterum in inferioribus Jovis Satellitibus, in superioribus alterum præcipue locum habet.

III. Si requirantur variationes vectoris radii, quæ in orbita secundi Jovis Satellitis actione primi Satellitis haberi debent, sumptisque ut supra temporibus periodicis fiat $n = \frac{2547}{5113} = 0.498$, & cum a exprimat inferioris orbitæ radium relatum ad superioris orbitæ radium, pro unitate acceptum, ac sit $a = 0.6285$, factis substitutionibus, & numeris omnibus reductis prodibit ϖ in semidiametris orbitæ secundi ipsius Satellitis $\frac{49}{M}$, in semidiametris autem Jovis $\frac{441.8}{M}$. Priorem numerum D. Bailly 59.81 supputaverat, alterum D. la Grange 518.78: esset autem alter hic numerus juxta D. Bailly 539.3.

IV. Tertio etiam Jovis Satellite ad secundum relato esset $a = 0.62687$, & $n = \frac{5113}{10302} = 0.4963$, atque esset ϖ in semidiametris orbitæ tertii ejusdem Satellitis $\frac{25.02}{M}$, in semidiametris autem Jo-

Jovis $\frac{359.9}{M}$. Prior autem numerus apud D. Bailly est 29. 85; alter apud D. la Grange 452. 98. In hoc numerorum dissensu, equidem non ita magno, reassumptis calculis, nihil aliud quod addam habeo nisi quod & superior series satis convergens, & satis accurata est formula supputandæ differentiæ vectoris radii, quæ proportionalis est cosinui angularis distantiæ Satellitis unius ab altero. Pars alia differentiæ vectoris radii, quæ proportionalis est cosinui distantiæ ejusdem bis acceptæ omnino eadem ex precedente alia formula colligitur, quæ ab authoribus ipsis statuta est: ea vero prioris differentiæ octuagesies fere in secundo Satellite, & in tertio quadragesies fere est minor.

V. Quod si denique quartus Jovis Satelles ad tertium referatur & fiat $a = 0.5686$, & $n = \frac{10302}{24032} = 0.42868$ factis substitutionibus omnibus eruetur $\varpi = \frac{1.195}{M}$, & $\omega = \frac{0.213}{M}$ in semidiametris orbitæ quarti ejusdem Satellitis, in semidiametris autem Jovis $\varpi = \frac{30.23}{M}$, & $\omega = \frac{5.38}{M}$. Juxta D. Bailly esset in primo casu $\varpi = \frac{1.23}{M}$, $\omega = \frac{0.26}{M}$, & juxta D. la Grange esset in casu altero $\varpi = \frac{31.55}{M}$, $\omega = \frac{1.62}{M}$. In casu etiam hoc altero, differentiis nimirum ad semidiametrum Jovis relatis, & iisdem positis numeris D. Bailly esset $\varpi = \frac{31}{M}$, & $\omega = \frac{6.5777}{M}$. Ita igitur quantitas ϖ apud utrumque authorem eadem fere est, quæ præcedente methodo eruitur: in quantitate autem ω determinanda cum authores ipsi dissentiant, numeri nostri ad eos propius accedunt quos D. Bailly supputaverat. Si requirantur variationes radii vectoris terrestris orbitæ, quæ gigni possunt actione Veneris, & quantitas materiæ Veneris ad quantitatem materiæ Solis se habeat ut $1 : M$ posita $a = 0.7233$, $n = 0.615$, & factis substitutionibus aliis omnibus eruetur $\varpi = -\frac{0.83}{M}$,

& $\omega = \frac{5.517}{M}$, atque ita quantitas ϖ, quæ orbitæ transpositione oritur, ob $1 - 2n$ quantitatem negativam, contraria ratione in Terra debebit accipi.

PROBLEMA XIII.

Invenire æquationes motus Planetarum, ac Satellitum superiorum, qui perturbantur ab inferioribus.

Positis omnibus, quæ antea, si major orbitæ semiaxis, qui conjunctioni respondet, sit $1 + \varpi + \omega$, & qui respondet quadraturis $1 - \omega$, erit radius alius quicumque $1 + \varpi . \text{cos.}\, STL + \omega . \text{cos.}\, 2STL$. Velocitas etiam Planetæ aut Satellitis superioris juxta Probl. XI. actione inferioris minuetur in ratione

$$1 - \frac{nN}{M}\left(a + \tfrac{3}{8}a^3 + \frac{15a^5}{32} - \frac{1}{a^2}\right).\text{cos.}\,STL - \frac{a^2 nN}{M}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{8}a^2\right)\text{cos.}\,2STL : 1$$

Quare cum angularis motus sit ut velocitas projectionis directe, & quadratum vectoris radii reciproce: & tempus, quo quisque angulus describitur, sit reciproce ut verus angularis motus: motus autem medius sit tempori proportionalis; in primis verus angularis motus minuetur in ratione

$$1 - \left(2\varpi + \frac{nN}{M}\left(a + \tfrac{3}{8}a^3 + \frac{15}{32}a^5 - \frac{1}{a^2}\right)\right)\text{cos.}\,STL$$
$$- \left(2\omega + \frac{a^2 nN}{M}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{8}a^2\right)\right)\text{cos.}\,2STL : 1 .$$

Deinde si verus angularis motus inferioris Planetæ, aut Satellitis ut antea sit z, superioris nz, & motus medius illius quidem Z, hujus autem nZ, erit medii ipsius motus elementum

$$ndz = ndZ - \left(2\varpi + \frac{nN}{M}\left(a + \tfrac{3}{8}a^3 + \frac{15}{32}a^5 - \frac{1}{a^2}\right)\right).ndz.\,\text{cos.}(z - nz)$$
$$- \left(2\omega + \frac{a^2 nN}{M}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{8}a^2\right)\right).ndz.\,\text{cos.}\,(2z - 2nz)$$

Itaque summis omnibus acceptis, ac posito $\frac{1}{1-n} = N$, erit

$$nz = nZ - \left(2\varpi nN + \frac{n^2 N^2}{M}\left(a + \tfrac{3}{8}a^3 + \frac{15}{32}a^5 - \frac{1}{a^2}\right)\right).\,\text{sin.}\,(z - nz)$$
$$- \left(\omega nN + \frac{a^2 n^2 N^2}{4M}\left(3 + \tfrac{5}{4}a^2\right)\right).\,\text{sin.}\,(2z - nz) .$$

CO-

COROLLARIA.

I. Si requirantur æquationes medii motus Terræ, quæ ex Veneris actione oriuntur, reaſſumptis numeris omnibus corollarii proxime ſuperioris, ac poſito quod quantitas materiæ in Venere eadem ſit quæ in Terra, poſito ſcilicet $\frac{1}{M} = 0.00000325$, prodibunt æquationes binæ $3.58''.\,\text{ſin.}(z - nz) - 6.7''.\,\text{ſin.}(2z - 2nz)$. Si fieret $\frac{1}{M} = \frac{1}{169282}$ eſſent bini coefficientes hujuſmodi $+6.5$, & -12. In actis Pariſienſis Academiæ anni 1754. D. Clairaut in hac altera hypotheſi quantitatis materiæ Veneris æquationes binas medii motus Terræ invenit eſſe
$10''.\,\text{ſin.}(z - nz) - 11.''\,\text{ſin.}(2z - 2nz)$: quarum utraque cum ratione ſigni conveniat, altera coefficientem etiam proxime eumdem habet, prior vero coefficientem triente circiter majorem habet, quam qui ex noſtra hac methodo colligitur.

II. Superioribus etiam Satellitibus Jovis relatis ad inferiores, iiſdemque poſitis numeris Coroll. III., IV., & V. problematis antecedentis, ac factis analogis aliis ſubſtitutionibus, erunt æquationes motus Satellitis

ſecundi relati ad primum $-\frac{96.873}{M}.\,\text{ſin.}(z - nz) - \frac{1}{M}.\,\text{ſin.}(2z - 2nz)$

tertii relati ad ſecundum $-\frac{47.63}{M}.\,\text{ſin.}(z - nz) - \frac{1}{M}.\,\text{ſin.}(2z - 2nz)$

quarti relati ad tertium $-\frac{0.425}{M}.\,\text{ſin.}(z - nz) - \frac{0.314}{M}.\,\text{ſin.}(2z - 2nz)$,

atque ita in Satellite ſecundo, & tertio prior æquatio, quæ pro argumento habet angularem diſtantiam Satellitis inferioris longe major eſt quam quæ habet pro argumento diſtantiam eamdem bis acceptam: in quarto autem Satellite binæ argumenti utriuſque æquationes quam proxime inter ſe erunt ut 4:3.

III. Neglectis igitur aliis inferioris ordinis æquationibus ſi copulentur ſimul æquationes binæ, quæ in ſecundo Jovis Satellite actione primi, & tertii Satellitis haberi debent, ſi ſint $\frac{1}{M}$, & $\frac{1}{N}$ rationes pri-

primi, & tertii Satellitis ad maffam Jovis, & primi, ac fecundi diftantia vocetur X, & X' diftantia fecundi, ac tertii; erit æquationum fumma $\frac{190.2}{N}.\text{fin.}\,2X' - \frac{96.873}{M}.\text{fin.}\,X$. Quare cum fit

fin. $2X' = -$ fin. X, & cum fimul æquationes hujufmodi effe debeant $-1^\circ\,9'.\text{fin.}\,X$, quemadmodum libri hujus initio notatum eft, pofito $1^\circ 9'.\text{fin.}\,X = \left(\frac{190.2}{N} + \frac{96.873}{M}\right) 57.29578^\circ.\text{fin.}\,X$, variæ

erunt hypothefes quantitatis materiæ primi, & tertii Satellitis, quæ variationi motus intermedii Satellitis explicandæ infervient: atque ita fi maffæ primi, ac tertii Satellitis cenfeantur inter fe æquales, ac fiat $\frac{287.073}{M} \times 57.29578^\circ = 1^\circ\,9'$, proxime eruetur

$\frac{1}{M} = \frac{1}{N} = 0.00007.$

APPENDIX.

DE PARADOXO NEGATIVÆ MASSÆ SATELLITUM.

JAm igitur viribus perturbatricibus in feries refolutis, & fupputata variatione angularis velocitatis, ac variatione vectoris radii eruta ex binis iis theorematis ellipfeos circa centrum revolutæ, & Planetam attrahentem verfus tranfpofitæ, æquationes medii motus Terræ ex Jovis, ac Veneris actione ortas proxime eafdem affecuti fumus, quas D. Clairaut antea invenerat, & æquationes medii motus Veneris ortas ex Terræ actione proxime eafdem quas D. la Lande, in fupputandis autem æquationibus motus Satellitum Jovialium proxime ad numeros eofdem acceffimus, quos D. Bailly tradiderat, nec nifi æquationem unam fecundi Satellitis, & quarti æquationem aliam deprehendimus, quæ magis diffidet a numeris D. la Grange. Cum autem non vacet modo diligentius inquirere ex qua elementorum calculi varietate differentia omnis oriatur, quæ ipfos inter clariffimorum authorum numeros intercedit; minime tamen prætereunda

da eſt hoc in loco quædam paradoxi ſpecies, quam D. Bailly adnotaverat Par. III. Sect. II. §. XIV., quod ſcilicet numericas formulas actionum primi, & tertii Satellitis in ſecundum comparando cum aſtronomicis obſervationibus aut primi, aut tertii maſſa negativo ſigno videatur affici. Cum enim æquationes præcipuas ſecundi Satellitis ſtatuiſſet ipſe $-\frac{116.78}{M}.\text{ſin.}X+\frac{200.82}{N}.\text{ſin.}2X'$, terminos hujuſmodi comparando primum cum obſervationibus diei 9 Martii, ac deinde cum obſervationibus diei 28. Aprilis 1733 æquationes binas obtinuit

$$\frac{1133}{M}+\frac{1948}{N}=0.1978,$$

$$\frac{686}{M}+\frac{1181}{N}=0.1186\text{: atque inde eruit}$$

$$\frac{1}{M}=0.0001746-\frac{1.7193}{N}=0.0001729-\frac{1.7216}{N},$$

$$\frac{1}{N}=-0.000739\text{, \& }\frac{1}{M}=0.0014454.$$

Hanc ipſe paradoxi ſpeciem ex eo oriri cenſuit quod aliæ ſint inæqualitates motus ſecundi Satellitis ab excentricitate orbitæ pendentes, quæ prioribus motus periodici æquationibus ad maſſarum rationem in primo, ac tertio Satellite inveſtigandam componi debeant: atque ob excentricitatis, & æquationum inde pendentium incertitudinem cenſuit materiæ quantitatem in primo, ac tertio ex iis potius æquationibus, & ſimul ex motu nodorum orbitæ ſecundi Satellitis tutius poſſe colligi. Denique cum motum nodorum annuum ſtatuiſſet 12°, collatis inter ſe formulis ejuſdem motus ad planum orbitæ Jovis reducti, & iiſdem æquationibus motus periodici Satellitum invenit eſſe $\frac{1}{N}=0.0001327$, & $\frac{1}{M}=0.000337$. At vero motus nodorum orbitæ Satellitis uniuſcujuſque ex figura Jovis ſphæroidica fere omnis pendet, ut primum a D. Walmesley adnotatum eſt in Tranſact. Philoſ. anni 1758, atque in ſubſequente Probl. XXI. explicabitur: atque ita motus nodorum quantitas, ac periodus æqua-

tionem alteram exhibere nequit, quæ ſimul cum æquationibus motus periodici binis quantitatibus $\frac{1}{N}$, & $\frac{1}{M}$ determinandis inſerviat. Excentricitas autem orbitæ, quam fere nullam deprehendit Wargentinus, quæque non niſi omnino exigua eſſe poteſt, nihil aliud poteſt ſuppeditare, quod ad eamdem maſſarum determinationem conducat. Hæc cum mihi olim difficultatem aliquam faceſſerint animadverti demum in binis iis obſervationibus, & æquationibus rationes maſſarum ſubductis a ſe invicem numeris proxime æqualibus prodire: unde exiguus etiam aut aſtronomicarum obſervationum, aut approximationum analyticarum error differentiam numerorum aut poſitivo, aut negativo ſigno affectam exhibere poſſet, ac paradoxo illi negativæ maſſæ locum præbere. Si inſtituti calculi approximationes, obſervationeſque aſtronomicæ omnino accuratæ eſſent, & quæ obſervationibus reſpondet ſecundi Satellitis æquatio ſit $1° 9'$. ſin. X, ut libri hujus initio ſtatuimus, atque eſſent A, & B coefficientes duarum æquationum, ex quibus illa conſurgit, quæque actioni Satellitis primi, & tertii inſtituto calculo reſpondere deprehenduntur, non niſi unica haberetur æquatio $1° 5'$. ſin. $X = \left(\frac{A}{M} + \frac{B}{N}\right) 57.29578°$. ſin. X, ac propterea dato quocumque tempore, quicumque aſſumatur angulus idem X, binæ ſimul quantitates $\frac{1}{M}$, $\frac{1}{N}$ determinari nequaquam poterunt.

CA-

CAPUT QUARTUM.

DE ORBITIS CIRCA CENTRUM MOBILIBUS ET DE MOTU APSIDUM LUNÆ.

PROBLEMA XIV.

Data velocitate projectionis, & data vi centripeta, qua corpus in ſpatio immobili datam orbitam deſcribit, invenire qua differentia velocitatis, ac vis centripetæ eadem orbita circa idem centrum virium uniformiter revoluta deſcribi poſſet.

Volvatur corpus in orbe immobili $ALBab$ ex A in L, fig. 63. eodemque tempore in orbe mobili radius vector TL tranſeat in locum Tl, atque ob uniformem orbis totius motum ſit ſemper angulus ATL ad angulum ATl in ratione data. Hæc eadem erit ratio angulorum quorumlibet LTM, lTt, acceptiſque $TL = Tl$, & $TM = Tm = Tt$, quo tempore corpus in orbe immobili deſcriberet arcum LM, aut lm, ob continuatum radii vectoris motum feretur in orbe mobili ad punctum t. Itaque radio TM, aut Tm deſcriptis arcubus circularibus MN, tmn, differentia velocitatis, ac vis centripetæ in orbe mobili, & immobili ea erit, qua circularis arcus mt deſcribi poſſet. Primo igitur quia in circulis eodem radio deſcriptis vires centripetæ ſunt inter ſe ut quadrata velocitatum, velocitates radio vectori perpendiculares MN, tn orbe immobili, & mobili inter ſe erunt in ratione ſubduplicata virium in unoquoque orbe agentium. Deinde quia velocitas projectionis in unoquoque orbe data eſt, & data velocitate projectionis areæ circa centrum deſcriptæ eſſe debent temporibus proportionales, velocitas utraque MN in orbe immobili, & in orbe mobili tn variabitur in ratione reciproca vectoris radii, & duarum velocitatum differentia tm erit pariter reciproce ut radius vector. Denique cum in circulis vis centripeta generatim ſit ut quadratum velocitatis, & reciproce ut radius; vis etiam qua deſcribetur circularis arcus tm, ſeu differentia virium centripetarum in orbe mobili, & immobili, erit reciproce ut cubus vectoris radii TM.

COROLLARIUM.

Triplex igitur est conditio, qua projecti alicujus semita circa centrum virium mobilis potest effici: prior ut velocitas radio vectori perpendicularis augeatur, vel minuatur in ratione data, prout scilicet orbitæ motus aut ad eamdem partem in quam fertur projectum, aut ad partem adversam debet dirigi: altera ut quantitas vis centripetæ, qua orbita in spatio immobili describitur, augeatur in primo casu, minuaturque in secundo in ratione duplicata velocitatis: tertia ut vis omnis addita, vel detracta, seu differentia virium centripetarum, quibus corpus in orbita immobili, & mobili revolvi potest, sit in ratione triplicata reciproca vectoris radii. Tertiam hanc conditionem expresse tradidit, ac sua methodo demonstravit Newtonus in Propos. XLIV. Lib. I., binæ autem aliæ conditiones ex ipsa etiam Newtonianæ demonstrationis serie facile colliguntur.

PROBLEMA XV.

Data vi aliqua exigua, quæ adjiciatur vi centripetæ decrescenti in duplicata ratione auctarum distantiarum, & dato quod orbitæ accedant proxime ad circulos, motum apsidum determinare.

Sit $P:Q$ ratio velocitatum radio vectori perpendicularium, seu ratio angularium motuum in orbita immobili, & circa centrum virium uniformiter revoluta, atque in priore orbita vis centripeta sit $\frac{P^2}{TL^2}$, adeoque orbita eadem sit elliptica, & latus rectum principale ellipseos vocetur $2r$. Quia radius osculi ellipseos in vertice majoris axis est ipsum semilatus rectum principale, data autem velocitate projectionis vires centripetæ sunt in ratione inversa radiorum osculi; si vis centripeta in summa apside ellipseos immobilis sit $\frac{P^2}{TA^2}$, erit $\frac{r.P^2}{TA^3}$ vis, qua circulus ad eamdem distantiam, eademque ellipseos immobilis velocitate describi posset, eritque $\frac{r.Q^2}{TA^3}$ vis, qua ad eamdem distantiam describi posset circulus velocitate ellipseos mobilis Q. Cum orbitæ accedant proxime ad circulos, erit $r.\frac{Q^2-P^2}{TA^3}$ dif-

differentia virium in summa apside ellipseos mobilis, & immobilis, cumque ea variari debeat in triplicata ratione vectoris radii reciproce, posito $TL = Tl = x$, erit in puncto quocumque l ellipseos mobilis vis omnis

$\frac{P^2 x + r.\overline{Q^2 - P^2}}{x^3}$. Statuamus ellipsim eamdem mobilem describi posse vi

$\frac{1}{x^2} + \varpi x^m$, vi scilicet gravitatis, quæ ad vim priorem in mediocri

distantia se habeat ut $1 : P^2$, & cui addatur, vel subtrahatur vis aliqua exigua ϖ, quæ sit ut radii vectoris potestas m. Exæquatis viribus fiet $P^2 x + r.\overline{Q^2 - P^2} = x + \varpi x^{m+3}$, ac posito $TA = b$ fiet in summa apside $P^2 b + r.\overline{Q^2 - P^2} = b + \varpi b^{m+3}$: pro alio autem quolibet loco l posito $Tl = x = b - \iota$, & $x^{m+3} = b^{m+3} - \overline{m+3}.b^{m+2}\iota$, atque ob parvitatem differentiæ ι neglectis terminis aliis minoribus habebitur altera æquatio

$P^2.\overline{b - \iota} + r.\overline{Q^2 - P^2} = b - \iota + \varpi b^{m+3} - \overline{m+3}.\varpi b^{m+2}\iota$,

prioremque æquationem subducendo ex hac altera supererit

$P^2.\iota = \iota + \overline{m+3}.\varpi b^{m+2}\iota$.

Quod si igitur orbitæ tam proxime ad circulos accedant, ut pro quantitatibus b, & r unitas assumi possit, erit in tertia hac æquatione $P^2 = 1 + \overline{m+3}.\varpi$, in priore vero æquatione $Q^2 = 1 + \varpi$, eritque $Q^2 : P^2 = 1 + \varpi : 1 + \overline{m+3}.\varpi = 1 : 1 + \overline{m+2}.\varpi$,

ac denique erit quam proxime $Q : P = 1 : 1 + \overline{1 + \frac{1}{2}m}.\varpi$.

COROLLARIA.

I. Universim si vis centripeta sit ut vectoris radii potestas l, & sit propterea vis tota in centrum $\frac{x^{l+3} + \varpi x^{m+3}}{x^3}$, eodem problematis hujus calculo eruetur $Q^2 : P^2 = 1 + \varpi : l + 3 + \overline{m+3}.\varpi$, & numeris loco l, & m substitutis, & vi ϖ positive, aut negative accepta præsto erit quibus in casibus progredi, aut regredi debeant apsides. Si fiat $\varpi = 0$, & vi unica corpus urgeatur, quæ sit ut pote-

te-

teſtas quævis diſtantiæ, erit ſingulis revolutionibus $\frac{Q}{P} = \frac{360^\circ}{\sqrt{l+3}}$, nullus ſcilicet erit progreſſus apſidum poſito $l = -2$, & loco l ſubſtituendo numeros -3, -4 &c, corpus ab apſide una diſcedens nunquam ad apſidem alteram pervenire poterit, ideſt nullæ erunt apſides; & corpus, quod deſcendere incæperit, deſcendet ad centrum uſque, & quod aſcendere, aſcendet in infinitum. Id recte jam a Newtono adnotatum eſt in Coroll. I. Propoſ. XLV. Lib. I. Eulerus §. 676., & 762. quod in hypotheſi vis centripetæ cubo diſtantiæ reciproce proportionalis poſt appulſum ad centrum imaginariam expreſſionem motus invenerit paradoxum illud adjecit quod corpus quaſi ſubito annihilari debeat in centro, atque evaneſcere.

II. Si gravitati, quæ ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ a centro, vis alia addatur, quæ ſit directe ut potentia quævis diſtantiæ, hoc eſt ſi quantitates ϖ, & m poſitivæ ſint, in præcedente formula erit q major quam p, & motus Planetæ a ſumma apſide ſupputatus minor erit abſoluto motu, atque ita apſides retrocedent in partem adverſam illi, in quam Planetæ motus dirigitur. Idipſum fiet ſi quantitates ϖ, & m ſimul negativæ ſint, & ſit m binario major, hoc eſt ſi a gravitate dematur vis aliqua, quæ decreſcat in ratione pluſquam duplicata auctarum diſtantiarum. Si ſit $m = -2$, in caſu utroque vis additæ, vel detractæ nullus erit apſidum motus, & vis reſidua erit ſemper diſtantiarum quadrato reciproce proportionalis. At ſi vis aliqua detrahatur gravitati, eaque ſit directe ut potentia quævis diſtantiæ, motus apſidum progreſſivus erit, eamdemque habebit motus elliptici directionem: quod ſcilicet in caſu orbitæ proxime circularis differentia rationis vis detractæ a ratione triplicata reciproca diſtantiæ ad quantitates inferiorum ordinum pertineat, & ſemper haberi poſſit æquatio $P^2 x + Q^2 - P^2 = Q^2 - P^2 t = 1 - t - \omega + \overline{m+3}\,.\,t$.

III. Si minor ſemiaxis Jovis vocetur C, differentia majoris, ac minoris ſemiaxis B, & radius orbitæ alicujus Satellitis ad radium mediocrem Jovis ſe habeat ut $a:1$, radius vero ſe habeat ad peripheriam ut $1:p$, ac denique ſi in formula Probl. VII. Lib. II. ob exiguam orbitarum Jovis, & Satellitis inclinationem fiat $T = 0$; erit

erit gravitas omnis Satellitis in Jovem

$\frac{2p.C^2.\overline{C+2B}}{3a^2}+\frac{2p.C^4B}{5a^4}$, eritque $\frac{2p.C^4B}{5a^4}$ vis, quæ ex ſphæroidica Jovis figura oritur, quæque adjicitur vi decreſcenti in duplicata ratione auctarum diſtantiarum. Erit itaque in præcedente formula $\frac{2p.C^2.\overline{C+2B}}{3a^2}=1$, $\varpi=\frac{2p.C^4B}{5a^4}$, $m=-4$, eritque $Q:P=1:\sqrt{(1-2\varpi)}=1:1-\varpi=1:1-\frac{3CB}{5a^2}$ ſatis proxime. Singulis igitur Satellitis circa Jovem revolutionibus, poſito $p=360°$, fiet $Q-P=\frac{3CB}{5a^2}.360°$, ac poſito inſuper $\frac{B}{C}=\frac{1}{12}$, & $\frac{C}{a}=\frac{1}{25}$, motus apſidum quarti Jovis Satellitis erit ſingulis ipſius Satellitis revolutionibus $1\frac{3'}{4}$ circiter, & anno integro circiter 38'. Wargentinus variationem quamdam totius periodi æquationis centri in quarto, & tertio Satellite detexit, quæ non niſi ex motu aliquo exiguo lineæ apſidum utriuſque orbitæ oriri poteſt.

IV. Si gravitas Lunæ in Terram in mediocri diſtantia accipiatur pro unitate, & mediocris eadem diſtantia unitate exprimatur, atque in diſtantia qualibet alia x ſit gravitas $\frac{1}{x^2}$, & juxta Probl. I. inde detrahenda ſit vis mediocris $\frac{1}{2}n^2x$, quæ ex Sole oritur; erit in præcedente formula $m=1$, $\varpi=-\frac{1}{2}n^2$, eritque $q^2:p^2=1:1-\frac{1}{2}n^2=1+\frac{1}{2}n^2:1$, & $Q:P=1+\frac{1}{4}n^2:1$. Quod ſi igitur loco p accipiatur angulus 360°, erit ſingulis Lunæ revolutionibus progreſſus apſidum $Q-P=\frac{1}{4}n^2.360°=1\frac{1}{2}°$ circiter, atque anno integro fere 20°. In hac igitur orbitæ ellipticæ, circa focum uniformiter revolutæ, & ad circulum proxime accedentis hypotheſi dimidio minor eruetur progreſſus apſidum quam ferant obſervationes, ut a Newtono primum in Coroll. II. Propoſ. XLV. notatum eſt. Itaque nec motus Lunæ illa hypotheſi exhiberi poterit, nec quantitates aliæ negligendæ erunt, quæ pendent ex orbitæ ellipticitate, & alia omnino ratione apogæi lunaris motus erit ſupputandus. PRO-

PROBLEMA XVI.

Si corpus aliquod data velocitate ſecundum datam rectam projectum retrahatur ad centrum differentia duarum virium, quarum una ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ, altera ſit directe ut diſtantia, determinare tempus, quo corpus ab una ad alteram apſidem pertranſit.

Si gravitas in mediocri diſtantia exprimatur unitate, atque ad vim centrifugam ſe habeat ut $1 : \omega$, & illa quidem varietur in ratione reciproca duplicata, iſta autem in ratione triplicata reciproca diſtantiæ; erit in diſtantia quacumque x differentia gravitatis ac vis centrifugæ $\frac{1}{x^2} - \frac{\omega}{x^3}$: & ſi a gravitate detrahenda etiam ſit vis ϖx, ac diſtantia aphelia vocetur b, & ſit v velocitas aſcenſus, vel deſcenſus juxta vectorem radium, quia velocitas in elementum ſuum ducta æquatur vi acceleratrici ductæ in elementum ſpatii,

erit $v dv = \frac{dx}{x^2} - \varpi x dx - \frac{\omega dx}{x^3}$

$$\tfrac{1}{2} v^2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{b} - \tfrac{1}{2} \varpi . \overline{b^2 - x^2} - \tfrac{1}{2} \omega . \overline{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{b^2}}$$

$$v^2 = \frac{1}{x^2} \left(2x - \frac{2x^2}{b} - \varpi . \overline{b^2 x^2 - x^4} - \omega . \overline{1 - \frac{x^2}{b^2}} \right).$$

Quod ſi autem fiat $x = b - t$, negliganturque pluſquam quadraticæ poteſtates differentiæ radii vectoris t, ac ſit propterea

$$2x - \frac{2x^2}{b} = 2t - \frac{2t^2}{b}$$

$$b^2 x^2 - x^4 = 2b^3 t - 5b^2 t^2$$

$1 - \frac{x^2}{b^2} = \frac{2t}{b} - \frac{t^2}{b^2}$, collectis terminis prodibit

$$v^2 = \frac{1}{x^2} \left(\overline{1 - \varpi b^3 - \frac{\omega}{b}} . 2t - \overline{\frac{2}{b} - 5 \varpi b^2 - \frac{\omega}{b^2}} . t^2 \right):$$

& ſi fiat inſuper $\frac{2}{b} - 5 \varpi b^2 - \frac{\omega}{b^2} = f^2$, & $1 - \varpi b^3 - \frac{\omega}{b} = g$,

$$\overline{\frac{2}{b} - 5 \varpi b^2 - \frac{\omega}{b^2}}$$

pro-

prodibit $v = \frac{f}{x} \cdot \sqrt{(2gt - t^2)}$. Cum igitur elementum temporis æquetur elemento ſpatii per velocitatem diviſo, erit idem elementum temporis $\frac{x\,dt}{f\sqrt{(2gt-t^2)}} = \frac{\overline{b-t}\,.\,dt}{f.\sqrt{(2gt-t^2)}} = \frac{\overline{b-g}.dt + \overline{g-t}.dt}{f.\sqrt{(2gt-t^2)}}$:
& cum $\frac{S g\,dt}{\sqrt{(2gt-t^2)}}$ æquetur arcui radii g, & ſinus verſi t, ac ſit $S\,\frac{\overline{g-t}.dt}{\sqrt{(2gt-t^2)}} = \sqrt{(2gt-t^2)}$, poſito $2g = t$, & pro arcu illo accepta ſemiperipheria $\frac{1}{2} pg$; tempus omne, quo corpus ſpatio $2g$ accedet propius foco orbitæ, ſeu quo tranſibit a ſumma ad imam apſidem erit $\frac{1}{2} p \left(\frac{b-g}{f}\right)$.

COROLLARIA.

I. Ut aliqua hujus formulæ ad motum Lunæ applicatio inſtitui poſſit, conſideremus ellipſim illam, quæ lunari orbitæ eſt propior, quæque deſcriberetur ſi vis centripeta in ſumma apſide eſſet $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{2} n^2 b$, & in loco alio quolibet augeretur in duplicata ratione imminutæ diſtantiæ a foco. Sit hujus ellipſeos major ſemiaxis c, excentricitas autem φ: & quia vis centripeta in ſumma apſide ſe habet ad vim centrifugam reciproce ut radius oſculi ellipſeos $\frac{c^2-\varphi^2}{c}$ ad foci diſtantiam $c+\varphi$, ſive directe ut $c : c-\varphi$, & quia inſuper data projectionis velocitate velocitas radio vectori perpendicularis debet eſſe reciproce ut ipſe radius, & vis centrifuga reciproce ut cubus radii, ſit vis centrifuga $\overline{1-\frac{\varphi}{c}}.\left(\frac{b-\frac{1}{2} n^2 b^4}{x^3}\right)$. Poſito $\varpi = \frac{1}{2} n^2$, & $\omega = \overline{1-\frac{\varphi}{c}}\left(b - \frac{1}{2} n^2 b^4\right)$ erit in formula præcedente $f = \frac{1}{b} - \frac{1}{2} n^2 b^2 + \frac{\varphi}{bc} - \frac{1}{2} n^2 b^2$, ſeu proxime $\frac{1}{c} - 2n^2 b^2$, & g

 $=$

$$= \frac{\frac{\varphi}{c} - \frac{n^2 \varphi b^2}{2c}}{\frac{1}{c} - 2n^2 b^2}.$$ Quod si igitur fiat $c = 1$, & $b = 1 + \varphi$, erit

tempus reversionis Lunæ ad eamdem apsidem $p\left(\frac{b-g}{f}\right) =$

$$\frac{p}{\sqrt{(1 - 2n^2 b^2)}}\left(1 + \varphi - \frac{\varphi + \frac{1}{2} n^2 b^2}{1 - 2n^2 b^2}\right) = \frac{p\,(1 - 2n^2 b^2)}{(1 - 2n^2 b^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$p\left(\frac{1 - 2n^2 . \overline{1 + 3\varphi}}{1 - 3n^2 . \overline{1 + 2\varphi}}\right) = p\,(1 + n^2).$$

II. His positis cum Lunæ orbita proxime etiam accedat ad circulum qui vi mediocri $1 - \frac{1}{2} n^2$ ad mediocrem distantiam 1 circa Terram describi posset, cumque in hujusmodi circulo velocitas projectionis ea sit, quæ per dimidium radium cadendo eadem vi mediocri acquiri posset, nimirum sit projectionis velocitas $\sqrt{(1 - \frac{1}{2} n^2)}$, & positis aliis antecedentibus denominationibus periodicum tempus exprimi debeat quantitate $\frac{p}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2} n^2)}}$; tempus unius revolutionis ad tempus reversionis ad eamdem apsidem se habebit ut $1 : (1 + n^2)\sqrt{(1 - \frac{1}{2} n^2)} = 1 : 1 + \frac{3}{4} n^2$, ut ex priore etiam ellipseos circa focum mobilis hypothesi colligebatur. Quod si vero binæ simul componantur hypotheses ellipseos circa Terram veluti circa focum descriptæ ea virium parte quæ esset reciproce ut quadratum distantiæ, & ellipseos alterius concentricæ, in quam circularis orbita abire debet ob Solis vim, & juxta formulam Probl. II. sit medii temporis elementum $\frac{dz}{1 - \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{4} n^2 N} = \frac{dz}{1 - \frac{1}{4} n^2 + \frac{3n^2}{4 - 4n}}$; erit tempus revolutionis integræ $\frac{p}{1 - \frac{1}{4} n^2 + \frac{3n^2}{4 - 4n}}$, seu proxime $p . (1 - \frac{1}{2} n^2)$, eritque ad tempus reversionis Lunæ ad eamdem apsidem ut $1 - \frac{1}{2} n^2 : 1 + n^2 = 1 : 1 + \frac{3}{2} n^2$.

III.

III. Datis igitur hisce omnibus esset medius progressus apsidum singulis Lunæ revolutionibus $\frac{3}{4} n^2 . 360°$, & annis singulis $\frac{3n}{2} . 360°$, seu proxime $40 \frac{1}{2}°$, proxime ut ferunt Astronomicæ observationes, & motu hoc medio eadem Lunæ directione ferentur apsides in consequentia. Eadem etiam erit vera directio motus apsidum cum circa oppositionem vel conjunctionem Solis reperientur: in quadraturis autem Lunæ, & apogei cum Sole, ubi vis perturbatrix Solis adjicitur vi Terræ, juxta omnes formulas antecedentes contraria erit motus directio, & apsides in adversam Lunæ partem ferentur. Insuper quia motus medius apogæi vi media Solis genitus variari debet in eadem ratione vis perturbatricis, sive in triplicata ratione distantiæ Solis reciproce, positis iisdem denominationibus, quæ in scholio prioris capitis, erit medius apogæi motus ad motus medii æquationem ut $1 : - 3\delta . \text{cos}. m\zeta$, & motus annuus ad æquationem totam se habebit ut $m\zeta : - 3\delta . \text{sin}. m\zeta$. Quare si sit ut antea $\delta = 0.0168$, & annuus apogæi motus minuatur primum in ratione $3\delta : 1$, & deinde in ratione $1 : m\zeta$, quæ est ratio radii ad peripheriam, erit æquatio medii motus apsidum lunaris orbitæ $- 19' 26''. \text{sin}. m\zeta$. Verum in hypothesibus corollarii antecedentis simul componendis, applicandaque ad Lunam problematis hujus formula, tot quantitates negligere oportuit, ut accuratior problematis resolvendi, & applicandi methodus inquiri debeat.

APPENDIX.

DE VARIIS HORUM PROBLEMATUM SOLUTIONIBUS.

EN jam problematis celeberrimi historiam. Newtonus cum in hypothesi orbitæ mobilis, quam hypothesim in Probl. XIV., & XV. explicavimus, non nisi dimidium apogæi lunaris motum supputari deprehendisset, in Propos. III. Lib. III. non alia ratione verum apogæi motum supputari posse censuit quam si vis perturbatrix Solis duplo major assumatur, quam ex theoria gravitatis,

atque ex phænomenis aliis omnibus colligitur. In priore etiam Principiorum suorum editione, atque in scholio theoriæ lunaris scriptum reliquerat Newtonus se motum medium annuum apogæi Lunæ ex theoria gravitatis eruisse circiter 40°, proxime ut ferunt observationes, atque insuper invenisse motum diurnum apogæi, cum in oppositione, vel conjunctione Solis versatur, esse 23′ in consequentia, atque esse diurnum motum $16\frac{1}{3}$′ in antecedentia cum apogæum ad quadraturas Solis pertransit: computationes autem utpote numeris implexas, & approximationibus obvolutas apponere noluisse. Quæ omnia cum in posterioribus aliis Principiorum editionibus omissa fuerint, censendum plane est Newtonum approximationes easdem minus accuratas postmodum, & supputando apogæi motui impares agnovisse. Atque id tanto fidentius dici debet quod in ejus vita asseruerit Pembertonus nec apogæi motum, nec variationem excentricitatis ex theoria gravitatis a Newtono erutam, ac supputatam fuisse.

Machinius etiam in opusculo de legibus motuum lunarium, quod Anglicæ Principiorum versioni, atque editioni adjectum est, motum annuum apogæi 40° 40′ $40\frac{1}{2}$″ ex gravitatis legibus se collegisse dixit, atque indicavit insuper qua methodo in suis supputationibus usus esset: datis nimirum viribus perturbatricibus quæsivit ipse motum omnem accessus, aut recessus corporis a foco, nulla habita ratione angularis motus circa focum ipsum concepti, atque inde supputavit tempus descensus corporis a summa ad imam apsidem. Methodum, quam Machinius indicaverat, explicare aggressus est Walmeslejus in opusculo de motu apsidum, quod Parisiis anno 1749 editum est. Primo scilicet statuit ipse vires centrifugas in orbita Lunæ esse easdem, quæ essent in orbita elliptica, & accedente proxime ad circulum: deinde accepit vim mediam perturbatricem, qua gravitas Lunæ in Terram minuitur vi Solis: ac denique ex datis viribus supputavit velocitatem, qua Luna propius Terræ accedit, atque ex data velocitate supputavit tempus descensus a summa ad imam apsidem. In alio autem opusculo, quod eodem anno Parisiis editum est, in ea clarissimi Walmesley methodo nonnulla reprehendit Æques clarissimus d'Arcy, in primis vero quod periodicum Lunæ tempus illud assumptum fuerit, quod haberetur in circulo vi mediocri

1 —

$1 - \frac{1}{2} n^2$ ad mediocrem diſtantiam deſcripto, qui tamen circulus propior videtur eſſe orbitæ ellipticæ, quæ circa Terram deſcribi poſſet ſi in alia quavis diſtantia vis centripeta eſſet reciproce ut diſtantiæ quadratum. Simpſonius in ſuis Miſcellaneis præcipuum hypotheſeos, & methodi ejuſdem defectum eſſe adnotavit, quod a Machinio, & Walmeslejo nulla habita ſit ratio virium perpendiculariter ad vectorem radium agentium, quæ perturbant æquabilem deſcriptionem arearum, & quibus vis centrifuga augetur, vel imminuitur.

Jam autem uſque ab anno 1747 alia de apogæi lunaris motu diſputatio ſummos inter Mathematicos Eulerum, Clairaut, & d'Alembert diſputatio ſuborta erat, qui cum ex generali analyſi trium corporum ſe ſe attrahentium inæqualitates omnes motuum lunarium derivare aggreſſi eſſent, priores terminos ſeriei, quæ radium vectorem exprimunt conſiderando, dimidium tantum apogæi lunaris motum invenerunt. At ii deinde authores perductis longius ſeriebus, aliiſque terminis accuratius ſupputatis gravitatis mutuæ theoriam, & apogæi lunaris calculum cum obſervationibus aſtronomicis feliciter conciliarunt. Walmesley in præclaro opere de inæqualitatibus motuum lunarium, quod Comitis Coconati cura anno 1758 Florentiæ editum eſt, methodum ſuam brevius, ac nitidius expoſuit, atque in Probl. XII. XIII., & XIV. prioris partis motum medium annuum apogæi, & medii ipſius motus æquationem, & variationem excentricitatis lunaris orbitæ, unde pendet evectionis æquatio, ſupputavit. Et quidem eodem calculo problematis antecedentis eadem ſummi Mathematici formula erueretur ſi ſtatui poſſet $\omega = \sqrt{1 - \frac{\varphi}{c}} \cdot b$: tum enim prodiret $f = \frac{1}{c} - \frac{5}{4} n^2 b^2$, & $g = \dfrac{\frac{\varphi}{c} - \frac{1}{2} n^2 b^2}{\sqrt{\frac{1}{c} - \frac{1}{2} n^2 b^2}}$, atque eſſet tempus reverſionis ad eamdem apſidem $p\left(\frac{b - g}{f}\right) = \frac{p(1 - 2n^2)}{(1 - \frac{5}{4} n^2)^{\frac{1}{2}}} = p.(1 + \frac{7}{4} n^2)$;

&

& cum in circulo ad diſtantiam mediam deſcripto iiſdem poſitis denominationibus revolutionis tempus eſſe debeat $p\ (1 - \frac{1}{4} n^2)$, fiet ratio duorum temporum $1 + \frac{1}{2} n^2 : 1$.

Jam vero ſi vis centrifuga in lunari orbita ſtatuatur eadem, ac in ellipſi illa quæ lunari orbitæ eſt propior, non jam ellipſis illa aſſumenda erit quæ vi $\frac{1}{x^2}$ circa Terram deſcribi poſſet, ſed quæ deſcriberetur ſi vis in ſumma apſide eſſet $\frac{1}{b^2} - \frac{1}{4} n^2 b$, eaque variaretur in ratione duplicata reciproca diſtantiæ. Et quidem in hac ellipſi æque ac in circulo ad diſtantiam mediam deſcripto, quique æqualem aream comprehendat, periodicum revolutionis tempus aſſumi poſſet $\frac{p}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2} n^2)}}$, vis autem centrifuga eſſet $\overline{1 - \frac{\phi}{c}} \cdot \frac{1}{x^2} (b - \frac{1}{2} n^2 b^4)$, & adhuc dimidius tantum exſurget progreſſus apſidum, niſi accelerationis medii motus ex viribus perpendicularibus radio vectori orti aliqua habeatur ratio, ut in parte altera corollarii ſecundi antecedentis factum eſt. Hoc autem dato videretur etiam in ſupputanda vis centrifugæ quantitate perpendicularium earumdem virium habendam eſſe rationem. Cum igitur hiſce, & ſimilibus correctionibus nihil invenerim quod omnino accuratum, ac certum eſſet, ad analyſim converſus, attenta conſideratione æquationis differentialis problematis trium corporum ſe ſe attrahentium animadverti æquationem ipſam ita diſponi poſſe, ut & lunarium æquationum calculus facilior evadat, & verſus apogæi lunaris motus prodeat priore æquationis integratione, aliis ſeriei terminis, ac correctionibus ſatis proxime ſe invicem compenſantibus. Itaque in Probl. XVI. generalem methodum protuli, qua etiam ſolvi poſſet problema corporis decidentis in tubo aliquo, qui circulariter circa punctum datum moveatur, atque in adjectis corollariis indicare dumtaxat volui quibus approximationibus problematis illius formula ad ſupputandum apogæi lunaris motum applicari poſſet: accuratus autem apogæi calculus in ſexto ſubſequente libro ex aliis formulis, ac principiis colligetur.

Diu

Diu etiam inquisivi num eadem methodo Probl. XVI. variatio excentricitatis, quæ pendet ex varia apogæi lunaris distantia a Sole, & variatio illa æquationis centri, quæ dicitur evectionis æquatio, supputari posset, atque olim in Propos. XIV., & XV. Lib. III. de Gravitate quæ opportunior variationis utriusque supputandæ esset ratio distincte exposui. Verum cum in iis omnibus supputationibus nihil modo inveniam quod orbitæ adeo excentricæ, ut lunaris est orbita, satis accurate applicari possit; horum etiam problematum solutionem ad analysim libri alterius subsequentis reservandam jam esse censui. Hic igitur post jam traditas æquationes motus Satellitum Jovialium, eorumque Planetarum qui moventur in orbitis proxime circularibus, alia expendenda erunt problemata, quæ ad orbitas proxime circulares pertinent, & quæ satis accurate, & eleganter etiam resolvi possunt ea calculi synthetici specie, quæ jam tot aliis investigationibus idonea deprehensa est. Hujus autem generis sunt problemata motus nodorum, variationisque inclinationis orbitæ unius ad aliam: quæ licet authores alii ad sublimiorem analysim revocaverint, quæ tamen pertinent ad variationem planorum, in quibus Terra, & Planetæ alii circa Solem, & Satellites Jovis, ac Saturni circa Jovem, ac Saturnum moventur Geometrice omnia tradi possunt, & quæ ab excentricitate orbitarum pendent adeo exiguæ sunt æquationes ut negligi omnino debeant. Quæ etiam ad motum medium nodorum lunaris orbitæ, atque ad variationem mediam inclinationis pertinent Geometrica Newtoni, Machinii, & Walmesley theoremata ob singularem elegantiam memoranda hoc in loco, & consideranda sunt, antequam in subsequente libro æquationes omnes mediorum motuum, quæ pendent ab excentricitate lunaris orbitæ analytice definiamus.

CA-

CAPUT QUINTUM.

DE MOTU MEDIO NODORUM, ET DE VARIATIONE INCLINATIONIS LUNARIS ORBITÆ AD ECLIPTICAM.

PROBLEMA XVII.

Dato Solis, & Lunæ loco determinare motum horarium nodorum lunaris orbitæ in plano Eclipticæ.

Sit in fig. 57. locus Lunæ L, Solis S, & ſit Ll arcus dato elemento temporis deſcriptus, ſeu motus horarius Lunæ, accipiaturque $LR = Ll$. Quia vis perturbatrix Solis, quæ perpendiculariter ad planum lunaris orbitæ BLb dirigitur, continue agit per totum arcum LR, velocitas autem motus uniformiter accelerati ea eſt, qua duplum ſpatium æquali alio tempore abſolvi poſſet; erit velocitas projectionis ad velocitatem plano orbitæ perpendicularem in puncto L ut Ll ad LO, quod juxta Coroll. I. Probl. I. ſit duplum ſpatii ob vim omnem perpendicularem a Luna percurſi, quo tempore arcus Ll prioris orbitæ abſolvi poſſet. Completo igitur rectangulo $LOol$ erit Lunæ ſemita Lo, atque ita orbita circa vectorem radium LT nutabit, ductaque ex nodo B recta BX perpendiculari ad LT, & ex L in BT perpendiculari alia LZ, erit Ll ad lo, ſive ad LO, ut BX, ſive LZ ad arcum, quo punctum B ſupra planum prioris orbitæ elevabitur. Erit inſuper ſinus inclinationis lunaris orbitæ BAb, & plani Eclipticæ Bab ad ſinum totum, ut arcus hujuſmodi a puncto B circa vectorem radium LT deſcriptus ad arcum BQ, quo retrocedet in plano eodem nodorum linea. Quod ſi igitur ſinus inclinationis ut antea vocetur π, erit arcus $BQ = \frac{LZ.LO}{\pi.Ll} = \frac{LO.TL.\text{ſin}.LTB}{\pi.Ll}$, & pro LO ſubſtituendo valorem in Coroll. I. Probl. I. antea inventum, ac loco $\frac{1}{Ma^3}$ ſcribendo n^2, erit horarius mo-

motus nodorum lunaris orbitæ in plano Eclipticæ $=$
$3n^2 . \text{ſin.}\, ATB . \text{ſin.}\, LTB . TM . TL^2 . Ll . \sqrt{(1 - \pi^2 . \text{ſin.}\, ATB^2)} =$
$3n^2 . TL^2 . \text{ſin.}\, ATB . \text{ſin.}\, LTB . \text{ſin.}\, LTD . dz . \sqrt{(1 - \pi^2 . \text{ſin.}\, ATB^2)}$.

COROLLARIA.

I. Si negligatur quadratum ſinus inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam, erit motus omnis nodorum in ratione compoſita trium ſinuum diſtantiæ Solis a nodis, & diſtantiæ Lunæ a nodis, & quadraturis. Quare ſi angulus ATB diſtantiæ Solis a nodo B non ſit major 180°, & Luna inter B, & D, aut inter b, & d reperiatur, ſinus LTB, LTD contrario ſigno afficientur, & nodi eadem directione motus cum Luna ferentur in conſequentia. Dum Luna deſcribet arcus BLd, aut Db, ob unum dumtaxat ſinum negativum, regredientur nodi contraria directione: ac denique quieſcent nodi cum erunt ipſi in ſyzigiis, aut cum ipſis ubilibet conſtitutis Luna in quadraturis Solis, aut in nodorum linea reperietur, & alteruter e tribus angulis fiet nullus: quæ ſingula a Newtono primum explicata ſunt in Propoſ. XXX. Lib. III.

II. Cum ob æguales angulos DTB, dTb, GAT ſit ſin. $LTB =$ ſin.LTD.ſin.$ATB \mp$ coſ.LTD.coſ.ATB, neglecto poſteriore termino, qui in adverſis quadrantibus oppoſitione ſigni deſtruitur, & unitatem ſcribendo pro TL, fiet ſingulis revolutionibus horarius nodorum motus in orbita proxime circulari $3n^2 . \text{ſin.}\, ATB^2 \text{ſin.}\, LTD^2 . dz . \sqrt{(1 - \pi^2 . \text{ſin.}\, ATB^2)}$, nimirum motus medius fiet in partem adverſam illi, ad quam Lunæ motus dirigitur, ac retrocedent nodi in plano Eclipticæ. Neglecta etiam inclinatione orbitæ, & loco ſin. LTD ſcribendo unitatem, data Solis diſtantia a nodo, erit motus nodorum maximus
$3n^2 . \text{ſin.}\, ATB^2\, dz$, & loco ſin. LTD^2 ſcribendo valorem medium $\frac{1}{2}$, erit motus horarius medius nodorum $\frac{3}{2} n^2 . \text{ſin.}\, ATB^2 . dz$.

III. Motus medius horarius Lunæ a nodo $dz + \frac{3}{2} n^2 . \text{ſin.}\, ATB^2 . dz$, erit medius arithmetice proportionalis inter motum Lunæ medium, atque horarium dz, & motum maximum $dz + 3n^2 . \text{ſin.}\, ATB^2\, dz$, quo Luna in quadraturis nodorum poſita celerrime inde recedit. Pariter cum temporibus periodicis Lunæ, & Solis inter ſe poſitis ut $n:1$, ſit motus horarius Solis $n dz$, poſito primum ſin. $ATB = \frac{1}{2}$, ac

deinde ſin. $ATB = 1$, motus horarius Solis a nodo $ndz + \frac{1}{4}n^2\,dz$ erit medius arithmetice proportionalis inter motum Solis ndz, & motum $ndz + \frac{1}{2}n^2\,dz$, quo Sol recedit celerrime a nodo cum inde diſtat quadrante integro. Pro quolibet autem Lunæ loco motus medius horarius nodorum erit in ratione duplicata ſinus diſtantiæ Solis a nodis ipſis.

PROBLEMA XVIII.

Invenire motum annuum nodorum lunaris orbitæ in plano Eclipticæ.

Si ſit ut antea motus angularis Lunæ dz, Solis ndz, & neglecta inclinatione lunaris orbitæ ſit $\frac{1}{2}n^2 .\ \text{ſin.}\ ATB^2\,dz$ nodi motus, qui pro integra Lunæ revolutione medius cenſeri poteſt; cum nodus regrediendo in plano Eclipticæ redeunti ſoli fiat obviam, erit $ndz - \frac{1}{2}n^2 .\ \text{ſin.}\ ATB^2 .\ dz$ motus omnis, quo Sol nodo ipſi regredienti fiet propior. At vero ſi motus Solis a nodo ſit $ndz - \frac{1}{2}n^2 .\ \text{ſin.}\ ATB^2 .\ dz$, & hæc quantitas in præcedente termino, qui motum nodi exprimit, loco ndz ſubſtituatur, fiet nodi motus reſpectu Solis $\frac{1}{2}n^2 .\ \text{ſin.}\ ATB^2\,dz - \frac{1}{4}n^3 .\ \text{ſin.}\ ATB^4 .\ dz$, & motus, quo Sol nodo ipſi accedet, erit $ndz - \frac{1}{4}n .\ \text{ſin.}\ ATB^2\,dz + \frac{1}{4}n^3 .\ \text{ſin.}\ ATB^4 .\ dz$, & qua toties jam reverſionis ſerierum methodo uſi ſumus, continuatis ſemper correctionibus, motus omnis acceſſus Solis, ac nodi erit

$$ndz\left(1 - \frac{3n}{2} .\ \text{ſin.}\ ATB^2 + \frac{9n^2}{4} .\ \text{ſin.}\ ATB^4 - \frac{27n^3}{8} .\ \text{ſin.}\ ATB^6 + \frac{81n^4}{16} .\ \text{ſin.}\ ATB^8\ \&c.\right).$$

Igitur loco ſin. $A\Gamma B^2$ ſcribendo unitatem erit maximus Solis motus reſpectu nodi $ndz\left(1 - \frac{3n}{2} + \frac{9n^2}{4} - \frac{27n^3}{8} + \frac{81n^4}{16}\ \&c\right)$: accipiendo autem ſummas poteſtatum ordine parium ejuſdem ſinus, ut in Probl. XCIV. Algebræ dictum eſt, & loco ndz ſcribendo 360°, erit motus Solis duas inter Solis, & nodi conjunctiones

$$360^\circ\left(1 - \frac{3n}{4} + \frac{27n^2}{32} - \frac{135n^3}{128} + \frac{2835n^4}{2048}\ \&c\right)$$

& motus nodi $360^\circ\left(\frac{3n}{4} - \frac{27n^2}{32} + \frac{135n^3}{128} - \frac{2835n^4}{2048}\ \&c\right)$, ac

ac denique hunc motum omnem augendo in ratione annui motus Solis ad motus a Sole habitum duas inter cum eodem nodo conjunctiones habebitur totalis annuus nodi motus.

COROLLARIA.

I. Si ope Newtoniani theorematis extrahatur radix seriei $1 - \frac{3n}{2} + \frac{9n^2}{9} - \frac{27n^3}{8}$ &c prodibit series alia $1 - \frac{3n}{4} + \frac{27n^2}{32} - \frac{135n^3}{128}$ &c, atque ita manifestum fiet motum Solis medium a nodo esse medium Geometrice proportionalem inter medium Solis motum, & motum illum medium, quo Sol recedit celerrime a nodo in quadraturis. Theorema hujusmodi elegantissimum elegantissima synthesi D. Machin demonstravit, quam idcirco dignam judicavit Newtonus ut operi Principiorum Mathematicorum insereretur. Simili modo colligi posset alterum authoris ejusdem theorema, quo ipse nimirum statuit motum Lunæ medium a nodo dum nodus in quadraturis versatur esse medium Geometrice proportionalem inter motum medium Lunæ, & motum illum, quo Luna in conjunctione cum Sole a nodo celerrime recedit.

II. Si fiat $n = \frac{27^d\ 7^h\ 43'}{365^d\ 6^h\ 9'} = 0.0748$ satis proxime, erit $\frac{1}{4} n . 360^\circ = 20.196^\circ$ annuus nodi motus, qui haberi posset si nodus horis singulis elapsis retraheretur in locum suum, & Sol ad eumdem nodi locum, a quo recesserat, post integram revolutionem reverteretur. Erit autem motus hujusmodi ad æquationem ortam ex continuata nodi regressione ut $\frac{3n}{4} : \frac{27n^2}{32} - \frac{135n^3}{128}$ &c $= 1 : \frac{9n}{8} - \frac{45n^2}{32} + \frac{945n^3}{512}$: quæ ratio, ubi sit $n = 0.0748$, prodit $1 : 0.077 = 13 : 1$ satis proxime, unde esset hujusmodi æquatio 1.555°. Æquationem hujusmodi Newtonus in Propos. XXXIII. Lib. III. Geometrica constructione determinavit $1\frac{1}{2}^\circ$: Newtoni autem Interpretes celeberrimi le Seur, & Jacquier cum instituto calculo constructionis rationem exhibere vellent motus illos invenerunt inter se esse ut $793 : 60$.

III. Ita igitur esset 18.641° motus nodi duas inter Solis conjunctiones neglecta inclinatione lunaris orbitæ ad Eclipticam. Jam

vero esse debet $-\frac{1}{2} n^2 \pi^2$. sin. LTD^2 sin. ATB^2, ea motus nodorum pars, quæ habetur ob excentricitatem orbitæ, & posito sin. $LTD^2 = \frac{1}{2}$, sin. $ATB^2 = \frac{1}{2}$, $\pi^2 = 0.0898$, media hæc æquatio debet esse $-\frac{9}{32} n^2 . \pi^2 . 360° = -0.061$. Erit igitur correctus nodorum motus $18.58°$, & motus Solis duas inter conjunctiones cum nodo erit $341.42°$, & si fiat ut $341.42°$ ad $360°$ ita $18.58°$ ad quartum, motus annuus nodorum Lunæ in circulari orbita, posito scilicet $TL = 1$, erit $19° \; 35.46'$.

IV. *Si* juxta Coroll. II. Probl. III. loco TL^4 scribamus $1 - 4\omega$.cos.LTA, in Coroll. II. problematis antecedentis loco TL^4. sin. LTD^2, seu TL^4. cos. LTA^2 habebimus $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. cos. $2\,LTA)(1 - 4\,\omega$. cos. $2\,LTA)$: & cum sit cos. $2\,LTA^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. cos. $4\,LTA$, neglectis terminis, qui per totam circuli peripheriam oppositione signi se destruunt; medius nodorum motus, qui in circulari orbita haberetur, ob ellipticitatem orbitæ minuendus erit in ratione $1 - 2\omega : 1 = 1 - \omega : 1 + \omega$, sive in ratione semiaxis minoris ellipseos ad majorem: quod alia methodo demonstratum est a Newtono in Propos. XXXI. Lib. III., & a Walmeslejo in Propos. X. Par. I. Si sit $\omega = \frac{1}{138.8}$, ut in Coroll. I. Probl. III. statutum est, fiet annuus nodorum motus in orbe elliptico $19.336°$

V. Quod si denique spectetur etiam differentia vectoris radii illius ellipseos, quæ a Luna circa Terram veluti circa focum describitur, & manentibus aliis præcedentibus denominationibus fiat $TL = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \varphi$. cos. c; &c.; erit $1 + \varphi^2$ quantitas constans quartæ potestatis ejusdem radii, atque in hac altera ellipsi nodorum motus adhuc augendus erit in ratione $1 + \varphi^2 : 1$, & si fiat $\varphi = 0.0547$, & $\varphi^2 = 0.003$ quam proxime, addere oportebit $0.058°$, atque erit motus omnis annuus $19.394° = 19° \; 23' \; 38''$, quæ quantitas ab observato nodorum motu non differt nisi illa exigua differentia quæ in aliquam elementorum numerici calculi incertitudinem potest rejici.

PROBLEMA XIX.

Dato motu horario nodorum invenire variationem horariam inclinationis orbitæ. Ele-

Elevetur ex centro T circularis orbitæ, fig. 64., recta TO perpendicularis plano BLb, & radio vectori TL æqualis. Manifeſtum eſt angularem motum totius plani circa vectorem radium quemcumque æquari angulari motui rectæ TO. Jam vero arcus, quo nodus B in plano orbitæ Planetæ alterius retrocedit, ſe habet ad arcum alium, quem punctum prioris nodi, nutatione prioris plani BLb, deſcribit circa radium TL, ut ſinus totus ad ſinum inclinationis orbitæ, ſive ut $1:\pi$, & poſterior hic arcus ſe habet ad arcum Oo, quem eodem tempore perpendicularis erectæ extremum O deſcribit circa eumdem radium ut $B\zeta : TO = LZ : TO$. Quod ſi inſuper ſit MT radio LT, & VT lineæ nodorum BT perpendicularis, atque MR perpendicularis pariter rectæ VT; quia motus puncti O minimo quocumque tempore veluti rectilineus, & rectæ MT parallelus ſpectari poteſt, ipſius reſolutione invenietur motus, qui parallele ad rectam TV, & circa lineam nodorum fiet, & quo augebitur, vel imminuetur orbitæ inclinatio. Cumque ob rectos angulos MTL, VTB anguli MTR, LTZ ſint æquales; erit motus omnis puncti O ad motum, qui parallele ad rectam TR fiet, & quo planum BLb circa nodorum lineam Bb nutabit ut $TM : TR = LT : TZ$, & compoſitis rationibus erit horarius nodorum motus ad variationem horariam inclinationis ut $LZ : \pi . TZ =$ ſin. $LTB : \pi .$ coſ. LTB. Quare ſi juxta Probl. XVII. angularis motus nodorum lunaris orbitæ in plano eclipticæ relatus ad ſignorum ordinem ſit proxime
$- 3n^2 . TL^4 .$ ſin. $ATB .$ ſin. $LTB^2 .$ ſin. $LTD . d\zeta$, erit variatio horaria inclinationis orbitæ $- 3n^2 . TL^4 .$ ſin. $ATB .$ coſ. $LTB .$ ſin. $LTD . \pi d\zeta$.

I. Ex hac ipſa conſtructione manifeſtum eſt quod cum nodi lunaris orbitæ regrediantur in plano Eclipticæ negativa etiam erit variatæ inclinationis expreſſio, & poſitive acceptis ſinubus angulorum ATB, LTD, & coſinu anguli LTB inclinatio ad planum eclipticæ minuetur. Patet etiam quod ſi perpendiculum ex L demiſſum in planum idem vocetur P, & ſit $\pi = \frac{P}{LZ}$, angularis motus nodorum erit ad variationem inclinationis orbitæ habitam eodem tempore ut $LZ^2 : P . TZ$ atque ipſa inclinationis variatio æquabitur angulari nodorum motui

ubi

ubi LZ sit media proportionalis inter TZ, & perpendiculum idem P: quod a Walmeslejo traditum theorema est in corollario Propos. XV. Par. I.

II. Si nodi lunaris orbitæ quadrante integro a Sole distent, & sit sin. $ATB = 1$, erit juxta Coroll. I. Problema XVII. nodorum motus $- 3n^2$ sin. $LTB^2 . \sqrt{(1 - \pi^2)} . d\zeta$: & cum sit motus hujusmodi ad variationem inclinationis habitam eodem tempore ut sin. $LTB : \pi$. cos. LTB, erit variatio eadem $- 3n^2$. sin. LTB. cos. $LTB . \sqrt{(1 - \pi^2)} . \pi d\zeta$, cumque insuper summa omnium sin. LTB^2 per totum quadrantem circuli sit $\frac{1}{2} p$, & summa omnium sin. LTB. cos. LTB per totum pariter quadrantem sit $\frac{1}{2}$; erit in Lunæ transitu a Solis quadratura ad syzigiam nodorum motus ad variationem inclinationis ut $\frac{1}{2} p : \pi$, sive in ratione quadrantis ad sinum inclinationis mediæ. Quare cum motus nodorum sit anno integro 19° 23′ 38″, & tempora revolutionum periodicarum Solis, & Lunæ sint inter se ut 1 : 0.0748, posito $\pi = 0.0898$, erit quarta parte revolutionis Lunæ periodicæ variatio inclinationis 2′ 25″, & cum revolutio periodica ad synodicam se habeat ut 1 : 1080853, erit tota variatio in Lunæ transitu a Solis quadratura ad syzigiam 2′ 41″, proxime ut invenit Newtonus in Coroll. III. Propos. XXXIV.

III. Pariter cum juxta idem Coroll. II. Probl. XVII. sit motus medius horarius nodi

$- \frac{3}{2} n^2$. sin. $ATB^2 . \sqrt{(1 - \pi^2 .\ \text{sin.}\ ATB^2)} . d\zeta$, ac sit insuper

sin. $LTB =$ sin. LTD. sin. $ATB \mp$ cos. LTD. cos. ATB

cos. $LTB =$ cos. LTD . sin. $ATB \pm$ sin. LTD. cos. ATB;

neglectis terminis, qui in semicirculo DAb oppositione signorum cos. LTD compensant se invicem, ac destruunt, erit

sin. $LTB : \pi$. cos. $LTB =$ sin. $ATB : \pi$. cos. ATB, dataque idcirco nodorum distantia a Sole erit in tota Lunæ revolutione variatio mediæ inclinationis orbitæ $- \frac{3}{4} n^2 \pi$. sin. ATB. cos. ATB. $d\zeta =$ $- \frac{3}{4} n\pi$. sin. $2ATB . nd\zeta$, & cum sit angularis motus Solis $nd\zeta$, & summa duplorum sinuum in elementum arcus ductorum sit dimidius sinus versus; erit in Solis transitu a linea nodorum ad quadraturas variatio in inclinationis orbitæ Lunæ ad Eclipticam

—

$-\frac{1}{4}n\pi.(1-\text{cos}.\ 2ATB)$: scilicet ob vires Solis perturbatrices media inclinatio quantitate $\frac{1}{4}n\pi$ fiet minor quam esset sine ipsis viribus: & si π denotet sinum illius inclinationis, quæ est vere media, erit sinus correctæ inclinationis $\pi+\frac{1}{4}n\pi.\ \text{cos}.\ 2ATB$.

IV. Dato igitur nodorum loco erit variatio media inclinationis ut rectangulum sinus, ac cosinus distantiæ Solis a nodis ipsis: nulla scilicet erit variatio si nodi sint in quadraturis Solis, vel conjungantur cum Sole ipso, & in octantibus nodorum cum Sole inclinationis variatio fiet maxima. Et quidem dum nodus ascendens lunaris orbitæ a conjunctione Solis tendet ad quadraturas minuetur orbitæ inclinatio, atque inde in reditu ad alteram conjunctionem, cum cosinus distantiæ fiet negativus, augebitur inclinatio iisdem gradibus, & singulis semirevolutionibus nodorum restituetur in gradum pristinum. Summa autem variationum omnium fiet maxima cum Sol a nodis distabit quadrante integro, ac fiet cos. $2ATB=\pm 1$, eritque inclinationis maximæ, ac minimæ differentia $\frac{1}{4}n\pi$. Eadem etiam corollarii antecedentis methodo patebit quod cum sit $-\frac{1}{2}n^2.\ \text{fin}.\ ATB^2.\ d\zeta=-\frac{1}{4}n(1-\text{cos}.\ 2ATB).nd\zeta$, erit prior æquatio medii nodorum motus $\frac{1}{4}n.\ \text{fin}.\ 2ATB$.

V. Si fiat $n=0.0748$, $\pi=0.0898$, erit $\frac{1}{4}n\pi=0.0050378$: & cum sit circuli radius $=206264.808$ binis hisce numeris in se ductis prodibit maxima inclinationis variatio $17'\ 19''$, & si inclinatio, cujus sinus est π, accipiatur illa quæ media est inter maximam, & minimam inclinationem, nimirum $5°\ 9'\ 8''$, erit maxima inclinationis variatio $\pm\ 8'\ 39\frac{1}{2}''$. Newtonus in Propos. XXXV. cum statuisset $\pi=0.0896$, & rationem diametri ad peripheriam assumpsisset $7:22$, ex maximo, quem supputaverat, horario nodorum motu variationem maximam inclinationis proxime eruit $16'\ 23\frac{1}{2}''$. Minores aliæ æquationes motus nodorum, variationisque inclinationis orbitæ, ac latitudinis ex hisce ipsis formulis colligentur in libro altero subsequente postquam valor vectoris radii TL in excentrica Lunæ orbita accuratius fuerit supputatus.

PROBLEMA XX.

Iisdem positis motum Lunæ in sua orbita ad Eclipticæ planum reducere. Sit

Sit in fig. 57. nodus B, locus Lunæ L, ac ſit LF arcus circuli maximi tranſeuntis per L, & T perpendiculariter ad planum Eclipticæ Bab. In triangulo ſphærico rectangulo BLF, ex ſphæricorum elementis, erit ſinus totus ad coſinum anguli LBF ut tangens arcus BL ad tangentem arcus BF, ſive erit tang. $BF = \text{coſ.}\, LBF \,.\, \text{tang.}\, BL$, & differentia tangentium arcuum BL, BF erit $(1 - \text{coſ.}\, LBF)\,.\,\text{tang.}\, BL$. Jam vero ſi π ſit ſinus inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam, & ſit coſ. $LBF = 1 - \frac{1}{2}\pi^2$, quia tangens differentiæ angulorum æqualis eſt differentiæ tangentium diviſæ per ſummam quadrati ſinus totius, & rectanguli tangentium earumdem, erit differentia tangentium $\frac{-\frac{1}{2}\pi^2 \,.\, \text{tang.}\, BL}{1 + (1 - \frac{1}{2}\pi^2)\,.\,\text{tang.}\, BL^2}$, atque ob tang. $BL = \frac{\text{ſin.}\, BL}{\text{coſ.}\, BL}$, & ſin. $BL^2 + \text{coſ.}\, BL^2 = 1$, fiet eadem differentia $\frac{-\frac{1}{2}\pi^2 \,.\, \text{ſin.}\, BL \,.\, \text{coſ.}\, BL}{1 - \frac{1}{2}\pi^2 \,.\, \text{ſin.}\, BL^2}$, ſeu proxime $-\frac{1}{4}\pi^2 \,.\, \text{ſin.}\, 2BL$. Primo igitur ſi præcedentium correctionum ratione habita loco π ſcribamus $\pi + \frac{1}{2} n\pi \,.\, \text{coſ.}\, 2ATB$, & loco ſin. $2BL$ ſcribamus ſin. $(2BL - \frac{1}{4} n \,.\, \text{ſin.}\, 2ATB)$, reſolutis de more terminis erit correcta tangentium differentia $-\frac{1}{4}\pi^2 \,.\, \text{ſin.}\, 2BL - \frac{3}{16} n\pi^2 \,.\, \text{ſin.}\, 2ATB$. Deinde vero ſi nodi motus ſit pz, ſive etiam pZ, & Lunæ motus $Z - \frac{2\varphi}{c} \,.\, \text{ſin.}\, cZ$, & ſit ſin. $2ATB = \text{ſin.}(2Z + 2pZ)$, & ſin. $2BL = \text{ſin.}(2Z + 2pZ - \frac{4\varphi}{c} \,.\, \text{ſin.}\, cZ)$, hoc etiam termino de more reſoluto fiet differentia omnis tangentium, quæ proxime eſt differentia veri motus Lunæ, & motus ad Eclipticam reducti

$$-\frac{1}{4}\pi^2 \,.\, \text{ſin.}(2 + 2p)\,.\,Z + \frac{\varphi\pi^2}{2c} \,.\, \text{ſin.}(2 + 2p + c)\,.\,Z$$

$$-\frac{3}{16} n\pi^2 \,.\, \text{ſin.}(2 - 2n)\,.\,Z - \frac{\varphi\pi^2}{2c} \,.\, \text{ſin.}(2 + 2p - c)\,.\,Z.$$

COROLLARIUM.

Si loco quantitatum π, n, & $\frac{\varphi}{c}$ iidem numeri ſubſtituantur,

qui

qui ſupra; & unitatis loco accipiatur arcus 57.29578°, differentia motus Lunæ in ſua orbita, & motus ad eclipticæ planum relati evadet

$-6'57.5''.\text{ſin.}(2+2p).Z \quad +46''.\text{ſin.}(2+2p+c).Z$

$-23''.\text{ſin.}(2-2n).Z \quad -46''.\text{ſin.}(2+2p-c).Z:$

atque ita motuum lunarium æquatio illa, quæ proprie variatio dicitur, quæque habet pro argumento duplam diſtantiam Lunæ a Sole, motibus ad eclipticæ planum relatis, fiet 23″ minor, quam quæ eſſet in plano lunaris orbitæ.

SCHOLION.

Theoremata præcipua, quibus nodorum motum, variationemque inclinationis orbitæ Lunæ ad eclipticam definierunt Newtonus, Machinius, & Walmeslejus, ſimul collegimus in hoc capite, non ſolum quod ob elegantiam, ſimplicitatemque in faſtis Aſtronomicis mereantur commemorari; verum etiam quod eadem theoremata ſupputandis nodorum motibus, ac variationibus inclinationis orbitarum omnium inter ſe in Planetis, ac Satellitibus ſuperioribus, atque inferioribus, ſola perturbatricium virium ſubſtitutione applicari poſſint. Eulerus Cap. VI. Diſſertationis de inæqualitatibus Jovis, & Saturni omnium primus generalia principia ſtatuit, quibus variatio poſitionis orbitarum ex mutua Planetarum actione orta ſupputari poſſet, & definivit etiam qui motus nodorum & quæ variatio inclinationis orbitæ in Jove, & Saturno haberi debeat. In diſſertatione etiam de variationibus obliquitatis Eclipticæ, quæ in actis Berolinenſibus anni 1754 legitur, problemate generaliter explicato, quæ orbitarum omnium variationes atque in primis quæ imminutio obliquitatis Eclipticæ, Planetarum omnium actione haberi debeat Mathematicus ingenioſiſſimus copioſe oſtendit. Idem etiam argumentum ſua ſinguli methodo optime evolverunt D. Walmesley in Tranſactionibus Philoſophicis anni 1756, & D. la Lande in Actis Pariſienſibus anni 1758, & 1761. In Tranſactionibus etiam anni 1758 ſingulare aliud argumentum pertractare cœpit D. Walmesley cum Mac-Laurini theoremate de attractione ſphæroidum homogenearum nova methodo optime reſoluto definivit inæqualitates motus Satellitum, quæ ex ſphæroidica Primarj Planetæ forma oriri debent. Denique theoriam

omnem sæcularium æquationum motus nodorum, variationisque inclinationis orbitarum omnium ad maxime generales, atque ingeniosas formulas reduxit D. la Grange in Actis Berolinensibus, & Parisiensibus annorum 1774, & 1776, & phœnomena variationum hujusmodi exposuit plane nova, & singularia. Ego nodorum motum, variationemque inclinationis orbitarum omnium supputatam primum exhibui in dissertatione quam usque ab anno 1760 Academiæ Parisiensi obtuleram. Quæ studiis posterioribus, & occasione potissimum Dissertationum D. la Grange pervolvendarum hacce in re adjeci hic traditurus a Walmesley problemate exordiar.

CAPUT SEXTUM.

DE MOTU MEDIO NODORUM IN ALIIS ORBITIS SATELLITUM, AC PLANETARUM.

PROBLEMA XXI.

Definire motum nodorum, qui ob sphæroidicam Primarii Planetæ formam in orbitis Satellitis cujusque haberi potest.

Sit BAb, fig. 57., Satellitis alicujus orbita, & referat Bab planum æquatoris, & T centrum Primarii Planetæ. Sit etiam Bb linea nodorum, & LZ perpendiculum in eamdem lineam ductum ex L, ac sinus inclinationis orbitæ ad planum æquatoris vocetur π, adeoque in puncto quocumque L sit $\pi. \frac{LZ}{LT}$ sinus deviationis Satellitis ab eodem plano. His positis si radius orbitæ Satellitis vocetur a, & sit C semiaxis minor Planetæ ipsius Primarii, B vero differentia semiaxis majoris, ac minoris, & radius ad peripheriam se habeat ut $1:p$, juxta Probl. VII. Lib. II. erit Planetæ attractio secundum LT exercita $\frac{2pC^2}{3a^3}. \overline{C+2B} + \frac{2pC^2B}{5a^4}. \overline{1-3\pi^2. \frac{LZ^2}{LT^2}}$: & si deviatio orbitæ Satellitis a plano æquatoris exigua sit, ac deviationis quadratum

tum negligi possit, juxta Coroll. III. Probl. I. Lib. III., erit $\frac{4p\pi}{5} \cdot \frac{C^4 B}{a^4} \cdot \frac{LZ}{LT}$ illa attractionis pars, quæ perpendiculariter ad planum orbitæ exercebitur in puncto L: eruntque binæ vires inter se quam proxime ut $1 : \frac{6\pi}{5} \cdot \frac{CB}{a^2} \cdot \frac{LZ}{LT}$. Quod si igitur sit LO duplum spatii quod viribus plano orbitæ perpendicularibus absolvi posset quo tempore fertur Satelles ex L in l, eadem methodo Coroll. I. Probl. I. eruetur $LO = \frac{6\pi}{5} \cdot \frac{CB}{a^2} \cdot \frac{LZ . Ll^2}{LT^2}$: & si angularis motus Satellitis $\frac{Ll}{LT}$ vocetur dz, eadem methodo Probl. XVII. eruetur angularis nodorum motus $\frac{LZ . LO}{\pi . TL . Ll} = \frac{6\,CB}{5a^2} \cdot \frac{LZ^2}{LT^2} . dz$, & loco $\frac{LZ^2}{LT^2}$ scribendo $\frac{1}{2}$ fiet motus medius $\frac{3\,CB}{5a^2} . dz$: ac denique si tempus periodicum Satellitis circa Primarium ad tempus revolutionis annuæ se habeat ut $t : T$, erit motus annuus nodorum orbitæ Satellitis, qui ex sphæroidica Primarii Planetæ forma orietur $\frac{3\,CB}{5a^2} \cdot \frac{T}{t} . 360°$.

COROLLARIA.

I. Si fiat $\frac{C}{a} = \frac{1}{60}$, & $\frac{B}{C} = \frac{1}{230}$ patebit motum nodorum lunaris orbitæ in hypothesi Terræ sphæroidicæ, & homogeneæ ne unius quidem minuti secundi singulis Lunæ revolutionibus esse posse, & assumpta alia quavis hypothesi variatæ densitatis nihil inde emergere posse quod sit sensibile. At si fiat $\frac{C}{B} = \frac{1}{12}$, ac loco t, & a assumatur tempus periodicum, & radius orbitæ alicujus Satellitis Jovis fiet motus nodorum annuus $\frac{C^2}{4a^2} \cdot \frac{T}{t} \cdot 72°$, ac substitutis numeris manifestum erit nodorum motum, qui ex sphæroidica Jovis figura oritur, multo majorem esse quam qui ex mutuis actionibus Satellitum oriri potest.

II. Cum orbita primi, & intimi Satellitis jaceat in ipso fere æquatore revolutionis Jovis, si distantiæ secundi, tertii, & quarti Satellitis a centro Jovis statuantur ut antea 9.017, 14.384, 25.299, & sint periodica tempora 5113′, 10302′, 24032′, facta homogeneitatis Jovis hypothesi, erit motus annuus nodorum orbitæ secundi Satellitis 22° 13′, tertii 4° $33\frac{1}{2}'$, quarti $36\frac{1}{3}'$: is vero in singulis Satellitibus fiet minor si materies quæ circa æquatorem Jovis circumponitur sphæræ inclusæ sit rarior, & vis omnis quæ ex differentia sphæræ, & sphæroidis oritur tanto sit minor quam quæ a sphæra eodem modo exerceretur ac si particulæ attrahentes omnes in ipso sphæræ centro essent positæ.

III. Cum variatio inclinationis orbitæ in secundo Jovis Satellite 30 annorum periodum habeat, eamdemque periodum habere debeat motus nodorum, unde oritur inclinationis variatio, nimirum cum in secundo Satellite nodorum motus debeat esse 12° annis singulis, pars autem aliqua primi, ac tertii Satellitis actionibus tribuenda sit; patet circa æquatorem multo magis rarescere materiam Jovis quam circa centrum. Patet etiam, quod supra notatum est, quantitates materiæ primi, & tertii Satellitis ex æquatione empyrica secundi, atque ex æquatione motus nodorum determinari nequaquam posse. Cum enim motus hujusmodi ex sphæroidica Jovis forma præcipue pendeat, lex densitatis Jovis in binis iis æquationibus tertiæ quantitatis incognitæ loco est, & problema adhuc est indeterminatum. In primo Satellite cum ex secundi actione præcipue pendeat empyrica æquatio, satis accurate determinari poterit materiæ quantitas ut in Coroll. I. Probl. IX. dictum est.

PROBLEMA XXII.

Definire motum nodorum orbitæ Satellitis, aut Planetæ alicujus inferioris in plano orbitæ alterius superioris.

Positis omnibus ut in Coroll. I. Probl. I., atque in fig. 58. si L referat inferioris Satellitis, aut Planetæ locum, S superioris, ac fiat $ST = a$, $TL = b$, $TM = c$, ac quadratum inclinationis orbitæ possit negligi, erit

$$LO = \frac{a\pi . TL . Ll^2 . \text{sin.}\, ATB}{M . (a^2 + b^2 - 2ac)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\pi . TL . Ll^2 . \text{sin.}\, ATB}{Ma^3}:$$

&

& cum juxta Probl. XVII. ſit nodorum motus $\frac{LZ.LO}{\pi.TL.Ll} = \frac{LO.\text{ſin}.LTB}{\pi.Ll}$;

loco ſin. LTB ut in Corollario ſecundo problematis ejuſdem ſcribendo ſin. LTD. ſin. ATB, motus nodorum orbitæ BLb in plano orbitæ alterius ſuperioris erit

$$\text{ſin}.ATB^2 . \text{ſin}.LTD . \frac{LT.Ll.}{M}\left(\frac{a}{(a^2+b^2-2at)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{a^2}\right).$$

Scribendo igitur dz loco $\frac{Ll}{LT}$, & $\frac{t}{b}$ loco ſin. LTD, fractionemque omnem in ſeriem evolvendo ut in Probl. VI. factum eſt, negligendoque terminos, in quibus exponens abſciſſæ t eſt imparis dimenſionis, quique in adverſis locis contrario ſigno ſe deſtruunt, motus idem nodorum æquabitur quantitati $\frac{\text{ſin}.ATB^2 . dz}{M}$ ductæ in

$$\frac{3bt^2}{a^4} - \frac{15b^3t^2}{2a^6} + \frac{35bt^4}{2a^6} + \frac{105b^5t^2}{8a^8} - \frac{315b^3t^4}{4a^8} + \frac{693bt^6}{8a^8}.$$

Denique ſi loco ſin. ATB^2 ſcribamus $\frac{1}{2}$, qui valor medius in quadrante quovis exſurgit, & poteſtatum etiam t^4, t^6 valores medii accipiantur $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$, quos in Probl. XCIV. Algebræ invenimus, fiet medius nodorum motus

$$\frac{3b^3dz}{4Ma^4}\left(1 + \frac{15b^2}{8a^2} + \frac{175b^4}{64a^4} + \frac{3675b^6}{1024a^6} \&c\right)$$

COROLLARIA.

I. Cum in primo Jovis Satellite ad ſecundum relato, & in ſecundo etiam relato ad tertium radii orbitarum ſint inter ſe quam proxime ut 5 : 8, ſi maſſa Jovis ad ſuperioris Satellitis maſſam ſe habeat ut $M : 1$, fiet ſingulis inferioris Satellitis revolutionibus nodorum motus $\frac{155\frac{1}{2}^\circ}{M}$, & paulo minor erit motus nodorum tertii Satellitis, qui ex quarti actione orietur, cum radius orbitæ quarti Satellitis paulo ſit major quam ferat ratio illa radiorum 5 : 8. Quare ſi maſſa tertii Satellitis præ Jovis maſſa ſit 0.00007, erit motus annuus

mus nodorum orbitæ secundi Satellitis in plano Satellitis ejusdem tertii 1.12° circiter, eademque ratione in orbitis aliis inferioribus nodorum motus data quantitate materiæ superiorum Satellitum posset determinari.

II. Si requiratur motus nodorum orbitæ Jovis, qui ex Saturni actione in plano orbitæ Saturni ipsius oritur, posito primum $\frac{b}{a} = \frac{51980}{95302} = 0.5454$, fiet $\frac{15b^2}{8a^2} = 0.558$ circiter, $\frac{175b^4}{64a^4} = 0.242$, $\frac{3675b^6}{1024a^6} = 0.095$, & satis celeriter converget series, ut subsequentes termini possint negligi. Deinde posito ut antea $\frac{1}{M} = 0.000303$ fiet motus ipse nodorum singulis Jovis circa Solem revolutionibus $90\frac{1}{2}''$, & annis singulis $7\frac{1}{2}''$. Eulerus §. XC. Dissertationis de inæqualitatibus Jovis & Saturni motum hunc annuum invenit esse 10″. D. la Grange in Actis Parisiensis Academiæ anni 1774, posita eadem fere Saturni massa, invenit 7.564″, qui proxime numeri cum præcedentibus conveniunt.

III. Si requiratur motus nodorum terrestris orbitæ in plano orbitæ Saturni, posito $\frac{b}{a} = \frac{1}{9.53}$, celerrime converget series, ac fiet motus ipse annuus $28\frac{1}{2}'''$. Eulerus in Actis Berolinensibus anni 1754 motum hujusmodi definivit 22‴, la Grange citato in loco dumtaxat 20‴. Terra autem relata ad Jovem, & posito ut supra $\frac{1}{M} = 0.0011113$, & adhuc serie celeriter convergente erit motus nodorum annuus 8.266″. D. la Grange cum massarum rationem in Sole, & Jove statuisset 365412 : 340, seu proxime 1 : 0.00093, ut in Parisiensibus Ephemeridibus statuta est, motum hujusmodi invenit 6.874″: unde posita Jovis massa 0.0011113 fieret 8.22″, quo etiam Euleri numeri in eadem massæ hypothesi reducerentur. Gaudemus igitur numerorum hacce in re tantum consensum esse. Simili ratione annuus motus nodorum Martis in plano orbitæ Jovis eruetur paulo major quam 18″, Veneris paulo minor quam 5″.

Pro-

PROBLEMA XXIII.

Determinare motum nodorum orbitæ alicujus Satellitis, aut Planetæ superioris in plano orbitæ alterius inferiotis.

Si fit dz motus Satellitis, aut Planetæ alterius superioris, & maneant reliqua omnia quæ antea, erit motus nodorum in plano inferioris orbitæ fin. $ATB^2 \cdot \frac{bt \cdot dz}{M} \left(\frac{a}{(a^2+b^2-2at)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{a^2} \right)$.

Quod fi igitur fractio hujufmodi ita in feriem evolvatur ut radius orbitæ Planetæ attracti b denominatores, Planetæ attrahentis a numeratores cujufque termini exhibeat, neglectis terminis fe invicem ambiguitate figni deftruentibus, quæfitus nodorum motus æquabitur quantitati fin. $\frac{ATB^2 \cdot a^2 dz}{M}$ ductæ in

$$\frac{3t^2}{b^4} - \frac{15a^2t^2}{2b^6} + \frac{35a^2t^2}{2b^8} + \frac{105a^4t^4}{8b^8} - \frac{315a^4t^4}{4b^{10}} + \frac{693a^4t^6}{8b^{12}} \text{ \&c:}$$

ac fi infuper loco fin. ATB^2 fcribamus $\frac{1}{2}$, atque etiam pro t^2, t^4, t^6 accipiantur alii valores medii, motus medius nodorum orbitæ fuperioris in plano orbitæ alterius inferioris fingulis fuperioris Satellitis, aut Planetæ revolutionibus eruetur

$$\frac{3a^2 \cdot 360^\circ}{4M \cdot b^4} \left(1 + \frac{15a^2}{8b^2} + \frac{175a^4}{64b^4} + \frac{3675a^6}{1024b^6} \text{ \&c} \right)$$

COROLLARIA.

I. Data igitur ratione maffæ inferioris alicujus Satellitis ad maffam Jovis determinari poterit nodorum motus in orbitis aliis fuperioribus. Ita fi fecundo Satellite relato ad primum fit $\frac{a}{b} = \frac{5}{8}$, & $\frac{1}{M} = 0.00007$, factifque fubftitutionibus aliis omnibus, erit motus annuus nodorum orbitæ fecundi ipfius Satellitis 1.77°, jungendoque 1.12°, qui motus juxta Coroll. I. Probl. XXII. facta hypothefi eadem maffæ, ex actione tertii Satellitis oriretur, ut nodorum, & totius orbitæ nutatio annorum 30, atque ut annuus nodorum motus fit tantum 12°, fupererunt 9.11°: qui motus fphæroidicæ Jovis formæ

mæ juxta Probl. XXI. tribuendus erit, & ignota adhuc lege densitatis Jovis; & ratione massarum primi, ac tertii Satellitis non nisi aliqua hypothesis confingi poterit, qua periodus librationis orbitæ secundi Satellitis explicetur.

II. Si requiratur motus nodorum Eclipticæ, qui in plano orbitæ Veneris haberi debet ipsius actione, & fiat $\frac{a}{b} = 0.7233$, & quantitas materiæ in Terra, ac Venere censeatur eadem, ac juxta Coroll. I. Probl. I. Lib. I. fiat $\frac{1}{M} = 0.00000325$, erit $\frac{15a^2}{8b^2} = 0.9809$, $\frac{175a^4}{64b^4} = 0.7484$, $\frac{3675a^6}{1024b^6} = 0.514$, & hic jam series abrumpi poterit, ac motus nodorum annuus eruetur 5,36″. D. la Grange cum eamdem fere assumpsisset rationem massarum Veneris, & Solis, annuum nodorum motum 6.646″ supputavit. Piguit autem ad numeros inter se propius reducendos quintum seriei nostræ terminum supputare. At cum secundus terminus paulo sit minor primo, qui exprimitur unitate, & secundus ad tertium se habeat proxime ut 4:3, tertius ad quartum ut 3:2, si addamus adhuc dimidium quarti hujus termini, seu fere decimam tertiam seriei totius partem, quæsitus nodorum motus statui poterit integro numero 6″.

III. Si requiratur motus nodorum orbitæ Saturni in plano orbitæ Jovis, & Jovis massa præ massa Solis statuatur 0.0011113, ac numeri alii substituantur ut in corollario secundo problematis antecedentis; erit motus nodorum singulis Saturni ipsius revolutionibus 608.88″, & annis singulis 20.67″. Si massa Jovis statueretur dumtaxat 0.00093, esset motus nodorum annuus 17.3″, quem motum D. la Grange in hac altera massæ hypothesi 17.773″ supputavit. Ita vero cum Jovis, & Saturni actionibus simul junctis communis duarum orbitarum intersectio 28.27″ annis singulis regredietur, revolutio omnis nodorum plusquam 45000 annis absolvetur. Universim autem motus nodorum in inferiore, & superiore orbita singulis Planetæ cujusque revolutionibus se habebit in ratione composita massæ attrahentis,

&

& $\frac{b'}{a'} : \frac{b'}{a''}$, five ex ratione massæ, & radii inferioris orbitæ ad radium orbitæ superiotis.

IV. Cum motus medius nodorum lunaris orbitæ singulis Lunæ revolutionibus circa Terram sit $\frac{3}{4}n^2 . 360°$, & singulis revolutionibus Terræ circa Solem sit $\frac{3}{4}n . 360°$, posito quod $n:1$ sit ratio periodicorum temporum Lunæ, & Terræ; ita si $t:T$ sit ratio periodicorum temporum Satellitis cujuspiam, & Jovis erit $\frac{3t^2}{4T^2} . 360°$ singulis Satellitis revolutionibus, & singulis Jovis revolutionibus circa Solem $\frac{3t}{4T} . 360°$ motus nodorum orbitæ Satellitis, qui ex Solis actione orietur. Erit itaque in tertio Satellite motus nodorum in plano orbitæ Jovis singulis Jovis ipsius revolutionibus circa Solem 27′ circiter, & in aliis Satellitibus major, aut minor erit in simplici ratione temporis periodici Satellitis. Motus nodorum Saturni actione genitus adhuc multo erit minor: is tamen eodem modo ex formulis præcedentibus colligi, ac supputari posset.

V. Motus nodorum ex Solis actione ortus revolutionibus singulis in Luna, & in quovis Jovis Satellite se habebit ut $n^2 . T^2 : t^2$, sive in ratione composita ex duplicata temporum periodicorum Lunæ circa Terram, ac Terræ circa Solem, & duplicata pariter periodicorum temporum Jovis circa Solem, & Satellitis circa Jovem. Newtonus in Propos. XXIII. Lib. III. rationem priorum temporum duplicatam, rationem autem temporum periodicorum Jovis, & Satellitis simplicem dumtaxat statuit, & motum nodorum orbitæ quarti Satellitis 8° 24′ integro sæculo supputavit cum sit 8° 46′: qui Newtoni locus a D. Bailly emendatus est §. XV. de Theoria Satellitum Jovialium. Ex ipso etiam corollario decimo sexto Propos. LXVI. Lib. I., unde id colligit Newtonus, non nisi duplicata temporis cujusque ratio potest colligi, ut ea loca inter se comparanti manifestum erit.

PROBLEMA XXIV.

Dato motu nodorum orbitæ Saturni in plano orbitæ Jovis, & orbi-

orbitæ Jovis in plano orbitæ Saturni, invenire motum nodorum utriusque orbitæ in plano Eclipticæ.

Sit planum Eclipticæ ABC, fig. 65., planum orbitæ Jovis EBF, ω sinus inclinationis ABE orbitæ Jovis ad Eclipticam, planum orbitæ Saturni HCF, ϖ sinus inclinationis ACH orbitæ Saturni ad Eclipticam, ac denique sit π sinus anguli BFC, quo orbita Jovis inclinatur ad orbitam Saturni. Dum nodus F orbitæ Saturni in plano orbitæ Jovis regreditur Jovis ipsius actione, & prior eadem orbita circa vectorem aliquem radium HT nutat, atque inclinatur, erit arcus regressionis nodi ad arcum a puncto F descriptum eodem tempore circa vectorem radium HT ut radius ad tangentem anguli BFC, sive ut $1 : \frac{\pi}{\sqrt{(1-\pi^2)}}$.

Arcus descriptus a puncto F erit ad arcum descriptum eodem tempore a puncto C orbitæ Saturni circa eumdem radium HT ut fin. HF : fin. HC.

Arcus descriptus a puncto C circa HT erit ad regressionem nodi ejusdem C in plano Eclipticæ ABC ut $\frac{\varpi}{\sqrt{(1-\varpi^2)}} : 1$.

Est autem $\text{fin. } HF = \text{fin. } \overline{HC \pm CF} = \text{fin. } HC \, . \, \text{cof. } CF \pm \text{cof. } HC \, . \, \text{fin. } CF$.

Quare posteriore termino omisso, qui in tota Jovis revolutione radiis omnibus HT acceptis ambiguitate signi destruitur, erit motus nodorum orbitæ Saturni in plano orbitæ Jovis ad motum orbitæ Saturni in plano Eclipticæ ut

$$\frac{\text{fin. } HF \, . \, \varpi}{\sqrt{(1-\varpi^2)}} : \frac{\text{fin. } HC \, . \, \pi}{\sqrt{(1-\pi^2)}} = \frac{\text{cof. } CF \, . \, \varpi}{\sqrt{(1-\varpi^2)}} : \frac{\pi}{\sqrt{(1-\pi^2)}}.$$

Est autem fin. BC : fin. CF = fin. BFC : fin. $FBC = \pi : \omega$, adeoque est $\text{cof. } CF = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2 . \text{fin.} BC^2}{\pi^2}\right)}$ Fiet itaque motus utriusque ratio

$$\varpi \sqrt{\left(\frac{\pi^2 - \omega^2 . \text{ fin. } BC^2}{1 - \varpi^2}\right)} : \frac{\pi^2}{\sqrt{(1-\pi^2)}}$$

Ducatur modo ex puncto C arcus circuli maximi, qui in N per-

perpendiculariter fecet bafim BF trianguli fphærici BFC, & finus anguli BCN vocetur λ. Ex notis Trigonometriæ fphæricæ elementis erit $1 : \text{cof.}\, BC = \text{tang.}\, CBF : \text{cotang.}\, BCN = \frac{\omega}{\surd(1-\omega^2)} : \frac{\surd(1-\lambda^2)}{\lambda}$;

atque inde eruetur $\lambda = \frac{\surd(1-\omega^2)}{\surd(1-\omega^2.\text{fin.}BC^2)}$, & $\surd(1-\lambda^2) = \frac{\omega.\text{cof.}\, BC.}{\surd(1-\omega^2.\text{fin.}BC^2)}$

At eft præterea fin. BCN : fin. $FCN = \lambda : \text{fin.}\, \overline{FCB - BCN} = \text{cof.}\, CBF : \text{cof.}\, CFN = \surd(1-\omega^2) : \surd(1-\pi^2)$: atque eft etiam fin. $\overline{FCB - BCN} = \text{fin.}\, FCB.\,\text{cof.}\, BCN - \text{cof.}\, FCB.\,\text{fin.}\, BCN = \frac{\omega\varpi.\text{cof.}\, BC + \surd(1-\varpi^2).\surd(1-\omega^2)}{\surd(1-\omega^2.\text{fin.}\, BC^2.)}$, quod fcilicet

eft $-\text{cof.}\, FCB = \text{cof.}\, BCH = \surd(1-\varpi^2)$. Erit igitur

$\surd(1-\omega^2) : \omega\varpi.\text{cof.}BC + \surd(1-\varpi^2).\surd(1-\omega^2) = \surd(1-\omega^2) : \surd(1-\pi^2)$,

ac fiet $\surd(1-\pi^2) = \omega\varpi.\,\text{cof.}\, BC + \surd(1-\varpi^2).\surd(1-\omega^2)$,

neglectifque altioribus poteftatibus finuum ϖ, & ω erit

$\pi^2 = \omega^2 + \varpi^2 - 2\,\omega\varpi.\,\text{cof.}\, BC$.

Itaque motus nodorum orbitæ Saturni in plano orbitæ Jovis erit ad motum nodorum orbitæ Saturni in plano Eclipticæ ut

$$\varpi\surd\left(\frac{\varpi^2 - 2\omega\varpi.\text{cof.}BC + \omega^2.\text{cof.}BC^2}{1-\varpi^2}\right) : \frac{\omega^2 + \varpi^2 - 2\,\omega\varpi.\,\text{cof.}\, BC}{\surd(1-\varpi^2)\surd(1-\omega^2) + \omega\varpi.\text{cof.}BC} :$$

quæ ratio extracta radice $\pm\,\varpi \mp \omega.\text{cof.}\, BC$, & neglectis altioribus finuum eorumdem poteftatibus evadet $1 : \frac{\omega^2 + \varpi^2 - 2\,\omega\varpi.\text{cof.}\, BC}{\pm\,\varpi^2 \mp \omega\varpi.\,\text{cof.}\, BC}$.

Quod fi denique fcribamus ω loco ϖ, & ϖ loco ω, ratio motus nodorum orbitæ Jovis in plano orbitæ Saturni ad motum nodorum orbitæ Jovis in plano Eclipticæ eodem proceffu calculi eruetur $1 : \frac{\omega^2 + \varpi^2 - 2\,\omega\varpi.\,\text{cof.}\, BC}{\pm\,\omega^2 \mp \omega\varpi.\,\text{cof.}\, BC}$

COROLLARIA.

I. Formula illa $\pi^2 = \omega^2 + \varpi^2 - 2\omega\varpi.\,\text{cof.}\, BC$ inclinationem utriufque orbitæ ad fe invicem exhibet ex data utriufque inclinatione ad Eclipticam, atque ex data diftantia nodorum. Statuamus ad annum 1760 fuiffe longitudinem nodi afcendentis C orbitæ Saturni

111° 36′ 17″: longitudinem nodi ascendentis B orbitæ Jovis 98° 26′: distantiam BC nodi utriusque 13° 10′, cujus sinus est 0.9737116: inclinationem orbitæ Saturni ad Eclipticam 2° 30′ 20′, cujus sinus est proxime 0.043716 $= \varpi$: inclinationem orbitæ Jovis 1° 19′ 10″, cujus sinus est proxime 0.0230266. Factis substitutionibus, & radice extracta prodibit $\pi = 0.021958$, qui est sinus anguli 1° 15 $\frac{1}{2}$′, atque hæc est inclinatio orbitæ Jovis ad orbitam Saturni, quæ assumptæ inclinationi orbitæ utriusque ad Eclipticam respondet.

II. Si ABC referat planum orbitæ a Jove descriptæ circa Solem, & sit HCF orbita unius Satellitis, qui actione Satellitis alterius in plano EBF moti perturbetur, simili modo manifestum erit motum nodi F orbitæ HCF in plano orbitæ alterius Satellitis ad motum nodi C in plano Jovialis orbitæ se habere ut cos. CF. tang. ACH: tang. EFH, sive etiam proxime ut cos. CF. sin. ACH : sin. EFH. Ita cum inclinatio orbitæ quarti Satellitis ad planum orbitæ Jovis assumi possit 2° 24′, cujus sinus est circiter pars radii $\frac{1}{25}$, & inclinatio orbitæ tertii Satellitis 3° 1′, cujus sinus est circiter $\frac{1}{20}$, ac differentia inclinationum 37′ cujus sinus est $\frac{1}{100}$, nodi orbitæ tertii Satellitis regredientur in planis orbitarum quarti Satellitis, & Jovis atque erunt motus ipsi inter se ut 5. cos. CF:1.

III. Hæc vero rationum compositio habebit locum si nodi B, C, F parum distent a se invicem, & in priore etiam quadrante potior sit motus qui circa radios HT inducitur positos extra arcus CF, aut BF. Si in figura 64. referat ABD planum Eclipticæ ac sit Az intersectio Eclipticæ, & Æquatoris, punctum æquinoctii verni A, D punctum solstitii æstivi, B nodus ascendens Eclipticæ in plano orbitæ Planetæ alterius; erit ut antea regressio nodi B ad arcum descriptum eodem tempore a puncto prioris nodi circa vectorem radium LT ut sinus totus ad tangentem inclinationis orbitæ, sive ob exiguam inclinationem ut sinus totus ad sinum inclinationis π. Erit etiam arcus hujus-

hujusmodi ad arcum alium eadem Eclipticæ nutatione circa LT descriptum a puncto A ut $LZ:LN$, radioque LT intra A, & B accepto bini hi motus fient in adversam partem, atque ob $LN =$ sin. $\overline{AB - LB} =$ sin. AB. cos. LB — cos. AB sin. LB, neglecto priore termino, qui in integro semicirculo ambiguitate signi destruitur, fiet motuum duorum ratio $1 : -$ cos. $AB = 1 : - TX$. Cum igitur arcus a puncto A circa LT perpendiculariter ad Eclipticam descriptus se habeat ad motus nodi B Eclipticæ, & Æquatoris ut tangens obliquitatis Eclipticæ ad sinum totum; motus nodi Eclipticæ B in plano orbitæ Planetæ alterius se habebit ad motum puncti æquinoctialis A in ratione composita $1 : - \pi . TX$, & tangentis obliquitatis Eclipticæ ad sinum totum.

IV. Quod si igitur nodus ascendens B sit inter punctum æquinoctii verni A, & æstivi solstitii D, & propius ad hoc accedat quam ad illud, ac Terra transeunte ex A in D nutationis totius radius LT plerumque intra B, & A jaceat; potior erit in puncto A motus qui fiet in partem adversam illi in quam punctum B tendit, & nodo B regrediente in plano orbitæ Planetæ alterius punctum æquinoctiale A actione ipsius Planetæ progredietur in plano Eclipticæ. Hoc autem posito si nodus ascendens B reperiatur puncta inter solstitialia, & punctum æquinoctii autumnalis contrario signo accipiendus erit cosinus arcus AB, & puncta æquinoctialia eamdem habebunt motus directionem cum nodo B, ac regredientur in plano Eclipticæ. Et quidem in primo casu minuetur annua æquinoctiorum præcessio, quæ ex Luna, ac Sole oritur, atque ita anni Solaris tempus, quod ab uno ad alterum æquinoctium vernum supputatur, augebitur, & contrarium accidet in casu altero. Hæc singillatim tradenda erant quod non satis a Cl. Eulero videantur explicata §. XXVIII. Dissertationis de variationibus obliquitatis Eclipticæ, quæ in Actis Berolinensibus anni 1754 legitur.

V. Cum nodus ascendens Veneris gradibus fere 74 a puncto æquinoctii verni, & 16 ab estivo solstitio distet, & nodus ascendens Jovis gradibus fere $7\frac{1}{2}$ ab eodem solstitio distet e plaga æquinoctii autumnalis; annua regressio punctorum æquinoctialium vi Jovis augebitur, & vi Veneris minuetur: unde si motus annuus nodorum

Eclip-

Eclipticæ in plano orbitæ Jovis ſit 8.266", & in plano orbitæ Veneris 6", ut ſupra ſtatutum eſt, & ſint duarum orbitarum ad Eclipticam inclinationes $1^\circ\, 19\frac{1}{2}'$, & $3^\circ\, 23\frac{1}{2}'$, viribus Planetæ utriuſque, quas ad perturbandum motum Terræ præcipuas jam eſſe vidimus, fiet progreſſus annuus punctorum æquinoctialium

$$\frac{6''\,\text{ſin.}\ 16^\circ\,\text{tang.}\ 3^\circ\, 23\frac{1}{2}' - 8.266''\,\text{ſin.}\ 7\frac{1}{2}^\circ\,\text{tang.}\ 1^\circ\, 19\frac{1}{2}'}{\text{tang.}\ 23^\circ\, 28\frac{1}{2}'} = 0.168'',$$

quæ differentia præceſſionis æquinoctiorum vi Lunæ, ac Solis genitæ differentiam 0.67‴ in æquinoctiali anno exhiberet. Iidem adhuc prodirent numeri ſi loco tangentis inclinationis orbitæ cujuſque ad Eclipticam dumtaxat ſinus cum authoribus aliis acciperentur.

VI. Cum igitur ſit adeo exigua Solaris anni variatio, quæ ex Venere, ac Jove oritur, & quæ oritur ex actione aliorum Planetarum ſit multo minor, ea quidem pro anno quovis propoſito negligenda omnino erit: ſumma antem variationum omnium hujuſmodi inregro ſæculo differentiam $16\frac{1}{2}''$ arcus exhiberet, neque amplius in corrigendis obſervationibus vetuſtiſſimis, comparandiſque fixarum locis porerit negligi. Variationum, ac correctionum tabulas pro annis bis mille Eulerus, & pro quatuor mille exhibuit la Grange in Diſſertationibus jam memoratis, & cum eadem proxime a nobis, atque in Ephemeridibus Pariſienſibus maſſæ Veneris, Soliſque ratio aſſumpta ſit, qui maſſæ Jovis, atque inde orti motus nodorum æſtimationem a nobis ſupra propoſitam cenſeret eſſe accuratiorem ſimili calculo tabulas alias exhibere poſſet. Calculus autem variationum omnium loci fixarum quæ ex ſupputato motu punctorum æquinoctialium, & quæ etiam ex nutatione terreſtris axis, atque ex imminuta Eclipticæ obliquitate oriuntur, ad Trigonometriam ſphericam pertinet, & cum jam ſæpius ad hujus ſcientiæ ſcriptores lectorem noſtrum remittere neceſſum fuerit, præcipue nunc memorandus, & commendandus eſt liber a D. Trembley conſcriptus, qui dum hæc eduntur pervenit ad manus noſtras, & in quo Trigonometriæ ſphericæ principia, eorumque ad uſus Aſtronomicos, atque ad hos ipſos caſus applicatio ſic tradita eſt ut nihil videatur nitidius, atque elegantius hacce in re poſſe deſiderari.

SCHO-

SCHOLION.

In Actis Parisiensis Academiæ anni 1774 D. la Grange cum generales formulas motus cujusque orbitæ ad planum aliquod immobile relatæ pro singulis Planetis distincte evolvere, & ad numeros deducere aggressus esset, facta hypothesi circularium orbitarum , & angulos exiguos constituentium inter se , neglectisque aliis quantitatibus , quæ in problematis hujus generis possunt negligi , æquationes differentiales problematum horum omnium duplo plures numero invenit quam sit numerus Planetarum in se invicem agentium , & eas quidem primi ordinis , & quæ coefficientes singulorum terminorum habent constantes : integrales autem æquationes ex iis eruit inter se similes , & expressas seriebus sinuum , & cosinuum anguli circa centrum descripti , qui est tempori proportionalis , aliquoties accepti ; ductique in coefficientes alios qui aliis æquationibus determinantur : aliæ vero æquationes hujusmodi subsidiariæ, & numerus sinuum æquatur numero priorum æquationum differentialium. His omnibus summo ingenio evolutis formularum inde prodeuntium consideratione ostendit ipse motus nodorum ad datam plagam, inclinationisque duarum quarumcumque inter se suos esse limites, atque ut limites singulos determinaret primo Mercurii actionem neglexit , quæ in Terra, ac Planetis aliis non est sensibilis, deinde vero adnotavit motum nodorum, variationemque inclinationis orbitarum Jovis, & Saturni inter se considerari posse veluti si ex actionibus aliorum Planetarum minime penderent . His positis , & ad numeros deductis formulis §. XLIV. invenit lineam nodorum Jovis , & Saturni in dato, atque immobili plano Eclipticæ , a loco dato per datos arcus hinc inde excurrere , & æqualibus librationibus factis in adversas partes medium nodorum locum manere eumdem . Invenit etiam inclinationis maximæ , & minimæ utriusque orbitæ ad planum illud immobile suos esse limites . Loco autem dati atque immobilis plani Eclipticæ assumpsit illud , quod ineunte anno 1760 habebatur : nam si planum Eclipticæ accipiatur ut vere est , neglecta etiam actione Saturni & Jovis in se invicem, atque inde genito nodorum motu , ac spectata tantum actione Saturni, Jovisque

in

in Terram, nodi utriusque orbitæ per totam veræ Eclipticæ peripheriam debent excurrere: qua consideratione in subsequente capite limites maximæ, & minimæ obliquitatis, atque imminutæ obliquitatis periodum determinabimus. Hanc autem periodum & hos limites primus ille, summusque Italiæ Mathematicus minime determinavit, ac §. LIX. Dissertationis ejusdem dumtaxat statuit imminutionem sæcularem obliquitatis Eclipticæ ante bis mille annos fuisse 38.67″, sæculo hoc nostro esse circiter 56″, maximam fore post quatuor sæcula, ac fore tunc 56.76″, post annos tantum bis mille fore tantum 49″. Ut quam resolvendorum horum problematum rationem secutus fuerim, & quas formulas, ac numeros invenerim exponere hoc in loco pergam a simpliciore hypothesi exordiar, qua etiam resolutio problematum fit simplicior: cumque & circulares orbitæ, & exiguæ orbitarum inclinationes statuendæ sint & quantitates aliæ exiguæ sint negligendæ, atque omnino exiguæ sint variationes quæ ex Planetæ unius actione in Planetæ alterius orbita oriuntur, variationes singulas singillatim ad calculum revocare pergam, ac si dum Planeta unus actione Planetæ alterius perturbatur tertii Planetæ actione sensibiliter immutatam positionem orbitæ non haberet: quæ jam in præcedente capite hypothesis assumpta est, & virium perturbatricium exiguitati maxime est consentanea.

CAPUT SEPTIMUM.

DE VARIATIONE INCLINATIONIS ORBITARUM OMNIUM INTER SE.

PROBLEMA XXV.

Dato motu nodorum orbitæ alicujus Planetæ, aut Satellitis superioris, vel inferioris in plano orbitæ Planetæ alterius, invenire variationem mediam inclinationis.

Cum in orbita proxime circulari *BLb*, fig. 57., angularis motus lineæ nodorum *Bb*, juxta Coroll. III. Probl. XIX., se habeat ad variationem inclinationis ut sinus totus ad sinum totius inclinationis,

&

& ſinus ad coſinum diſtantiæ Planetæ attrahentis a nodis ipſis, ſive in ratione ſin. $ATB : \pi . \text{coſ.} ATB$, ſi ſcilicet Planeta attrahens in recta Aa conſtituatur, & ſinus inclinationis utriuſque orbitæ vocetur π; ſi Planeta attrahens ſit ſuperior, & juxta formulam Probl. XXII. dato Planetæ ipſius loco, motus nodorum ad ſignorum ordinem relatus in inferiore orbita ſit

$$-\frac{3 . \text{ſin.} ATB^2 . b^3 dz.}{2Ma^3}\left(1 + \frac{15 b^2}{8a^2} + \frac{175 b^4}{64a^4} + \frac{3675 b^6}{1024a^6} \&c.\right);$$

erit pro dato eodem loco inclinationis orbitæ variatio

$$-\frac{3\pi . \text{ſin.} ATB . \text{coſ.} ATB . b^3 dz.}{2Ma^3}\left(1 + \frac{15 b^2}{8a^2} + \frac{175 b^4}{64a^4} + \frac{3675 b^6}{1024a^6} \&c\right):$$

ac dato pariter inferioris Planetæ loco, juxta formulam aliam Probl. XXIII., erit variatio inclinationis in ſuperiore orbita

$$-\frac{3\pi . \text{ſin.} ATB . \text{coſ.} ATB . a^2 dz}{2M . b^3}\left(1 + \frac{15 a^2}{8b^2} + \frac{175 a^4}{64b^4} + \frac{3675 a^6}{1024b^6} \&c\right).$$

Quia vero ſumma rectangulorum omnium ſin. $ATB . \text{coſ.} ATB$ per integrum quadrantem circuli eſt $\frac{1}{2}$, & ſummam ipſam per quadrantem $\frac{1}{4} p$ dividendo eſt $\frac{2}{p}$ valor medius rectanguli cujuſque; erit pro aſpectu quolibet nodorum, Planetarumque variatio media inclinationis in inferiore orbita $-\frac{3\pi b^3 dz.}{pMa^3}\left(1 + \frac{15 b^2}{8a^2} + \frac{175 b^4}{64a^4} + \frac{3675 b^6}{1024a^6} \&c.\right)$,

in orbita ſuperiore $-\frac{3\pi a^2 dz.}{pMb^3}\left(1 + \frac{15 a^2}{8b^2} + \frac{175 a^4}{64b^4} + \frac{3675 a^6}{1024b^6} \&c\right)$.

COROLLARIA.

I. Generatim igitur in tranſitu Planetæ attrahentis a linea nodorum ad quadraturas minuetur orbitæ inclinatio in ratione compoſita diſtantiæ Planetæ a nodis ipſis, ac deinde in Planetæ, aut Satellitis reditu ad nodorum lineam augebitur iiſdem gradibus inclinatio, quibus antea imminuebatur, & continuis oſcillationibus redibit in ſtatum priſtinum, eademque erit oſcillationis, & librationis orbitæ periodus, qua ſemirevolutio attrahentis Planetæ abſolvitur. In ſingulis Satellitibus tres librationum ſpecies conſiderandæ erunt, quarum una ex figura ſphæroidica Primarii Planetæ oritur, altera ex actione alio-

rum Satellitum inter se, tertia, ex actione Solis: prioris autem librationis periodus erit dimidium tempus periodicum Planetæ, alterius dimidium tempus periodicum Satellitis attrahentis, tertiæ dimidium tempus periodicum Planetæ Primarii circa Solem.

II. Quo autem tempore Planeta uterque, & qui attrahit, & & qui attrahitur, a linea nodorum ad quadraturas transeunt, motus medius nodorum erit ad variationem omnem inclinationis ut $p:4\pi$, sive in ratione composita peripheriæ ad diametrum, & sinus totius ad duplum sinum inclinationis duarum orbitarum inter se. Ita cum motus nodorum orbitæ Jovis in plano orbitæ Saturni sit annis singulis $7\frac{1}{6}''$, & annis $7\frac{1}{2}$, quo tempore Saturnus a linea nodorum tendit ad quadraturas, sit $57''$, ac pariter annis 3, in Jovis transitu a linea eadem nodorum ad quadraturas, motus nodorum Saturni in plano orbitæ Jovis sit $62''$; summam duorum motuum $119''$ ducendo in 0.021958, qui est sinus inclinationis orbitæ utriusque ac deinde ducendo in duplam diametrum, & per peripheriam dividendo, fiet maxima inclinationis variatio, quæ ex mutua duorum Planetarum actione orietur, circiter $1\frac{1}{2}''$, eaque omnino negligi poterit, atque inclinatio orbitæ unius ad alteram censeri poterit invariabilis.

III. Cum juxta Coroll. IV. Probl. XXIII. motus nodorum tertii Jovis Satellitis in plano orbitæ descriptæ a Jove circa Solem quarta parte revolutionis Jovis esse debeat $6.7'$ circiter, & cum orbita tertii ejusdem Satellitis 3 fere gradibus inclinetur ad planum Jovialis orbitæ; erit maxima inclinationis variatio $13''$. In aliis autem Satellitibus cum motus nodorum habitus eodem tempore proportionalis sit tempori periodico Satellitum; variatio inclinationis proportionalis erit tempori eidem periodico, & sinui inclinationis mediæ: & cum media inclinatio orbitæ in singulis Satellitibus fere sit eadem, variatio inclinationis proxime erit in simplici ratione temporis periodici, & in Satellitibus inferioribus fiet circiter duplo minor, in extimo autem Satellite paulo major erit quam dupla. Pariter cum quarta parte unius Saturni revolutionis motus nodorum quinti Satellitis sit fere $\frac{1}{2}^\circ$, & inclinatio orbitæ sit $13^\circ 8'$; erit variatio inclinationis fere $1'$, in aliis autem Satellitibus variatio minor erit in ratione periodici temporis, & sinus inclinationis orbitæ.

PRO-

PROBLEMA XXVI.

Data inclinatione orbitarum Jovis, & Saturni inter se, & dato nodorum motu, invenire limites inclinationis orbitæ utriusque ad Eclipticam.

Si in fig. 66. referat *EBF* orbitam Jovis, *HCF* orbitam Saturni, & *ABC* planum Eclipticæ, in primis dato angulo *EBH*, neglectisque variationibus exiguis inclinationis ex mutua duorum Planetarum actione ortis, manifestum est nodum *F* in dato circulo maximo *FnKk* regredi oportere, & lineam nodorum utriusque orbitæ in uno, eodemque semper plano immobili reperiri. Etenim si π sit sinus anguli *EFH*, & ob exiguitatem anguli censeatur proxime tangenti æqualis, nodo *F* in plano orbitæ Jovis abeunte in *m*, nodoque *m* in plano orbitæ Saturni in *n* abeunte, positis æqualibus orbitarum angulis *HFE*, *hmE*, *hnb*, demissoque ex *n* in *EF* arcu circuli maximi *nN*, erit proxime $\frac{Nn}{Nm} =$ tang. $hmE =$ tang. $HFE = \pi$, & $\frac{Nn}{NF} =$ tang. $KFE =$ sin. $KFE = \frac{\pi . Nm}{Nm + mF}$: atque ita pro loco quolibet nodi *F*, datis motibus mediis *Nm*, *mF*, datoque angulo *HFE*, data jam erit plani *FK* ad plana *EF*, & *bn* inclinatio, & planum idem, in quo jacet nodorum linea, continuata regressione immobile censeri poterit.

His positis, atque ex *F* perpendiculariter ad *ABC* ducto arcu circuli maximi *FV*, ex notis Trigonometriæ sphæricæ elementis angulus *FKC* inclinationis plani illius immobilis *FK* ad planum Eclipticæ *ABC* invenietur si fiat primo 1 : cos. $BF =$ tang. *FBK*: cotang. *BFV*, ac si datis jam angulis *BFV*, & *BFK* fiat deinde sin. *BFV* : sin. $KFV =$ cos. *FBK* : cos. *FKC*. Denique hoc etiam dato manifestum erit quod cum *B*, *F*, *K* simul congruent minima habebitur orbitæ *BF*, ad *BC* inclinatio, eaque æquabitur differentiæ angulorum *FKC*, *BFK*, maxima vero habebitur inclinatio cum nodo *F* ad oppositam plagam transeunte summa duorum angulorum eorumdem accipienda erit: atque ita pariter minima orbitæ *CF* ad Eclipticam inclinatio æquabitur differentiæ, maxima summæ angulorum *FKC*, *KFC*.

COROLLARIA.

I. Primo igitur si juxta Coroll. I. Probl. XXIV. fiat $\pi = 0.021958$, & juxta Coroll. II. Probl. XXII. fiat motus annuus nodorum Jovis $Nm = 7.6''$, & motus nodorum Saturni mF juxta Coroll. III. Probl. XXIII. sit $20.67''$; pro sinu anguli KFE habebimus 0.005903, qui est sinus anguli $20\frac{1}{3}'$ circiter unde cum angulus EFK sit $1^\circ 15\frac{1}{2}'$, pro angulo KFH inclinationis orbitæ Saturni ad planum immobile KF supererunt $55\frac{1}{4}'$. Deinde vero cum sit $\text{sin.}\, BF = \frac{\text{sin.}\, BCF . \text{sin.}\, BC}{\text{sin.}\, BFC}$ si arcus BC assumatur $13^\circ\ 10'$, & angulus BCF sit $2^\circ\ 30\frac{1}{3}'$, ut in Coroll. I. Probl. XXIV. dictum est, prodibit $\text{sin.}\, BF = 0.4535$, qui est sinus circiter $26^\circ\ 58'$. Fiet insuper $\text{cotang.}\, BFV = \text{tang.}\ 1^\circ\ 19\frac{1}{4}' \times \text{cos.}\ 26^\circ\ 58' = 0.020543785 = \text{cotang.}\ 88^\circ 49\frac{1}{2}'$, eritque angulus $KFV = 88^\circ\ 29'$ circiter: ac positis hisce omnibus fiet $\text{cos.}\, FKV = \frac{\text{cos.}\ 1^\circ 19\frac{1}{4}' \times \text{sin.}\ 88^\circ\ 29'}{\text{sin.}\ 88^\circ 49\frac{1}{2}'} = 0.9996$, qui proxime est cosinus anguli $1^\circ\ 37'$.

II. Itaque planum illud immobile KF in quo semper regreditur linea nodorum orbitæ Jovis, & orbitæ Saturni, angulo $1^\circ 37'$ inclinatur ad dictum planum Eclipticæ BKC, addendoque, ac demendo primum $55\frac{1}{4}'$, deinde $20\frac{1}{3}'$, prodibit maxima & minima orbitarum Saturni, & Jovis ad datum planum Eclipticæ inclinatio: erit scilicet

Inclinatio maxima orbitæ Saturni	$2^\circ 32\frac{1}{4}.'$ Juxta D. la Grange	$2^\circ 32' 41.''$
Inclinatio minima	$41\frac{3}{4}.'$	$46' 49.''$
Variatio inclinationis	$1^\circ 50\frac{1}{2}.'$	$1^\circ 45' 52.''$
Inclinatio maxima orbitæ Jovis	$1^\circ 57\frac{1}{3}.'$	$2^\circ\ 2' 18.''$
Inclinatio minima	$1^\circ 16\frac{2}{3}.'$	$1^\circ 17' 15.''$
Variatio inclinationis	$40\frac{2}{3}.'$	$45'\ 3.''$

Fere autem numeri omnes congruerent si motus annuus nodorum Jovis cum Authore ipso clarissimo assumeretur $7.564''$, nodorum Saturni $17.773''$: quo posito angulus KFB prodiret $22\frac{1}{2}'$, & angulus KFC tantum $53'$.

III. Cum autem sit $\text{sin.}\, BKF : \text{sin.}\, BFK = \text{sin.}\, BF : \text{sin.}\, BK$ manifestum est nodo F per planum omne KF excurrente datis binis iis an-

angulis; maximam nodi B distantiam a puncto K haberi oportere cum puncta B, F a se invicem distabunt quadrante integro, ac fiet sin. $BF = 1$. Nostris igitur numeris servatis maximus arcus BK erit $12^\circ 8' 1$ ac simili modo maximus arcus KC eruetur $34^\circ 25'$. Hos igitur habebit limites excursio utriusque nodi citra, & ultra punctum K, eritque $24^\circ 16'$ libratio omnis nodorum orbitæ Jovis in dato Eclipticæ plano BKC, libratio nodorum orbitæ Saturni $68^\circ 50'$. Si angulus KFB esset $22\frac{1}{2}'$, & $53'$ angulus KFC, libratio nodorum Jovis prodiret $26^\circ 50'$, Saturni $66^\circ 16'$. D. la Grange limites hujusmodi invenit $26^\circ 7'$, $64^\circ 8'$, & longitudinem puncti K, circa quod libratio utraque absolvitur invenit $104^\circ 19' 14''$. Si fiat ut sin. $1^\circ 37'$, ad sin. $20\frac{1}{2}'$ ita sinus $26^\circ 25'$ ad quartum prodibit sinus anguli $5^\circ 28'$, eoque angulo addito ad $98^\circ 26'$, quæ est longitudo nodi ascendentis Jovis, prodibit longitudo $103^\circ 54'$.

IV. Ut igitur supputatio motus nodorum ea consideratione redditur facillima, quod ob parvitatem virium perturbatricium nutatio cujusque orbitæ singillatim determinari poteſt ac si aliæ interim orbitæ in dato semper manerent loco; ita etiam dato nodorum motu, atque eo theoremate perspecto, quo diximus lineam nodorum utriusque orbitæ Saturni, & Jovis semper in plano immobili consistere, singularia hæc librationis nutationisque orbitæ utriusque phænomena reducuntur ad simplicem trianguli sphærici resolutionem. Hæc autem phænomena non habent locum nisi neglectis Saturni, & Jovis, aliorumque planetarum actionibus in Terram, atque orbitis Saturni, & Jovis ad datum atque immobile planum Eclipticæ relatis, in quo & media orbitæ utriusque inclinatio, & medius nodorum locus semper est idem. Actionum enim omnium, & potissimum Jovis ratione habita, nodi orbitarum Jovis, & Saturni in vero Eclipticæ plano undique debent excurrere. Hujus tamen excursionis periodus, & quæ inde pendent phænomena, & limites imminutæ obliquitatis Eclipticæ tanto facilius ad calculum revocari poterunt cum ad motum periodicum nodorum Eclipticæ sola spectari debeat Planetarum in Terram actio, nihil autem conferant Saturni, Jovisque actiones in se invicem, quæ locum medium nodorum minime afficiunt.

PRO-

PROBLEMA XXVII.

Dato motu nodorum Eclipticæ in plano orbitæ alicujus Planetæ, invenire variationem inclinationis Eclipticæ, & Æquatoris.

Referat jam in fig. 64. ABD planum Eclipticæ, & fit TO axis plano ipsi perpendicularis in centro T, ac fit Bb plani interſectio cum plano orbitæ alicujus Planetæ superioris, vel inferioris, fit autem Aa interſectio Eclipticæ, & Æquatoris, A punctum æquinoctii verni, ac D punctum solſtitii æſtivi. Poſitis omnibus ut in Coroll. III. Probl. XXIV., & in Probl. XIX., motus nodi aſcendentis B in plano orbitæ Planetæ alterius erit ad motum puncti æquinoctialis A circa vectorem quemcumque radium LT ut $LZ : \pi. LN$, adeoque ad motum poli Eclipticæ O circa eumdem vectorem radium ſe habebit ut $LZ : \pi. TO$. Iſte autem poli motus, quam primum incipit cum parallelus ſit rectæ MT, quæ radio LT inſiſtit ad rectos angulos, erit ad motum parallelum rectæ TK, quæ eſt rectæ Aa perpendicularis ut $MT : TK$, eoque motu axis Eclipticæ, & planum omne circa æquinoctiorum lineam Aa nutabit, & inclinatio Eclipticæ, & Æquatoris variabitur. Cum igitur ob rectos angulos MTL, dTA æquales ſint anguli MTd, LTA, & ſit $TK = NT$ $=$ coſ. $LTA =$ coſ. $\overline{BTA - BTL} =$ coſ. BTA. coſ. BTL $+$ ſin. BTA. ſin. BTL, neglecto priore termino, qui in ſemicirculo BLb oppoſitione ſignorum coſ. BTL deſtruitur; dato quocumque tempore motus nodi aſcendentis B in plano orbitæ Planetæ alterius attrahentis erit ad variationem inclinationis Eclipticæ, & Æquatoris ut $LZ : \pi. NT = 1 : \pi.$ ſin. BTA, ſive in ratione compoſita ſinus totius ad ſinum inclinationis mediæ, & ſinus totius ad ſinum diſtantiæ nodi aſcendentis a punctis æquinoctialibus.

COROLLARIA.

I. Si nodus aſcendens B ſit in ſignis Borealibus Eclipticæ, punctum idem Eclipticæ, in quo eſt nodus, regredi non poterit in plano orbitæ Planetæ alterius niſi excurrendo Auſtrum verſus, hoc eſt accedendo propius ad Æquatorem: contra vero ſi in ſignis Borealibus reperiatur nodus deſcendens, a quo ſcilicet Planeta attrahens ultra Eclipticam verſus polum auſtralem tendit; ſimili retrogradatione idem punctum Eclipticæ recedet ſemper ab Æquatore. Itaque in pri-

mo

mo caſu minuetur inclinatio Eclipticæ, & Æquatoris, augebitur vero in caſu altero: & cum nodi aſcendentes omnium Planetarum ſint modo in ſignis Borealibus Eclipticæ, actione omnium minuetur Eclipticæ obliquitas: & cum nodi per totum Eclipticæ circuitum excurrendo ad plagam oppoſitam pervenient, augebitur iiſdem gradibus Eclipticæ obliquitas, quibus modo imminuitur, & integra nodorum revolutione reſtituetur obliquitas in gradum priſtinum.

II. Si quantitates materiæ Jovis, Veneris, ac Saturni præ quantitate materiæ Solis iiſdem numeris exprimantur qui ſupra, variationes obliquitatis Eclipticæ actione Veneris, Jovis, & Saturni genitæ noſtro ſæculo, & variationes maximæ ſæculares quæ haberi poſſunt, & calculi totius elementa erunt ut ſequitur

ſpectata actione, atque orbita	Veneris.	Jovis.	Saturni.
Sæcularis nodorum motus	600″	826.6.″	28.5.″′
Diſtantia nodorum ab æquinoctiis	74° 31′.	81° 34′.	68° 24′.
Diſtantiæ ejuſdem ſinus	0.96363.	0.989187.	0.9297765.
Orbitæ inclinatio ad Eclipticam	3° 23′.	1° 19′.	2° 30°.
Sinus inclinationis	0.059.	0.0230266.	0.043716.
Sæcularis variatio obliquitatis	34.1″.	18.82″.	1.93″.
Maxima ſæcularis variatio	35.4″.	19.03″.	2.08″.

III. Cum igitur quantitates materiæ Jovis, & Saturni ſatis accurate videantur ſupputatæ in priore problemate libri primi, ſi quantitas materiæ Veneris cenſeatur eadem, quæ in Terra prodit poſita parallaxi mediocri Solis 9″; imminutio omnis obliquitatis Eclipticæ conjunctis viribus Veneris, Jovis, & Saturni eſſet integro hoc ſæculo 54.85″: & cum variatio genita ob vim Saturni ne duo quidem ſecunda exæquet, omnino negligi poterunt variationes aliæ, quæ ex Martis, & Mercurii actionibus oriri poſſent. Nam cum volumen Planetæ utriuſque præ Terræ, & Veneris volumine ſit multo minor, & multo major diſtantia a Terra, diſtantia etiam nodi aſcendentis a punctis æquinoctialibus, & orbitæ inclinatio ad Eclipticam multo minor in Marte eſt quam in Venere. Inſuper non niſi incertæ, & omnino arbitrariæ hypotheſes denſitatis, ac quantitatis materiæ Martis, ac Mercurii aſſumi poſſent. D. la Grange §. LII. memoratæ Diſſertationis Mercurii actionem, in ſua vero Diſſertatione D. Eulerus §. XX. actionem ſimul Mercurii, & Martis neglexit. Si

IV. Si imminutio omnis obliquitatis Eclipticæ sit nostro hoc sæculo tantum 50″, quod mihi accuratius videtur ex D. Maskelinii supputationibus, observationibusque assumi posse, ex Veneris actione 4″ circiter demere oportebit, & quantitas materiæ Veneris decima circiter parte minor statuenda erit quam quantitas materiæ Terræ, & medius nodorum motus, æquationesque medii motus Terræ actione Veneris genitæ decima parte statuendæ erunt minores, quam in Coroll. I. Probl. XIII. dictum sit. Scilicet cum defectu Satellitum quantitas materiæ Veneris directe determinari nequeat, quæ assumitur primum hypothesis nullo alio certiore phænomeno potest corrigi, quam si ad sæcularem imminutionem obliquitatis Eclipticæ comparetur, ut hic præstitimus. Comparatione autem facta quantitas materiæ Terræ decima sui parte major prodiit quam Veneris, rejiciendamque esse patuit aliam hypothesim, quam Eulerus ex collatione massarum Terræ, Jovis, & Saturni derivaverat §. XXI. Dissertationis Berolinensis, quaque constituit Planetarum Soli propiorum densitatem majorem esse in ratione reciproca subduplicata temporum periodicorum.

V. Correcta autem hypothesi quantitatis materiæ Veneris, esset 32″ circiter variatio maxima obliquitatis Eclipticæ, quæ nodo ascendente ad puncta solstitialia delato ob Veneris vim posset gigni, atque esset sæcularis nodorum motus 540″, qui motus respectu fixarum cum sit retrogradus, & cum puncta æquinoctialia vi Lunæ ac Solis 50.3″ annis singulis regrediantur in plano Eclipticæ; nodus ascendens Veneris respectu punctorum eorumdem æquinoctialium 4490″ singulis sæculis progredietur juxta ordinem signorum Eclipticæ, & sæculis fere 140 erit opus ut semirevolutionem unam absolvat, factoque transitu a puncto æquinoctii verni ad punctum æquinoctii autumnalis variatio obliquitatis Eclipticæ haberi incipiat contrario sensu, & obliquitas eadem augeatur. Pariter cum sit 826.6″ sæcularis motus nodorum Eclipticæ in plano orbitæ Jovis fixarum respectu in signa antecedentia, & respectu punctorum æquinoctialium sit sæcularis motus 4203.4″; periodus semirevolutionis nodi erit fere sæculorum 154: nodi autem orbitæ Saturni semirevolutio eamdem fere periodum habebit, quæ est punctorum æquinoctialium, scilicet sæculorum fere $127\frac{1}{2}$.

PRO-

PROBLEMA XXVIII.

Invenire limites maximæ, & minimæ obliquitatis Eclipticæ, & Æquatoris.

Cum dato motu medio nodorum, juxta Probl. XXVII., variatio obliquitatis Eclipticæ sit in ratione composita sinus inclinationis orbitæ Planetæ attrahentis, superioris, vel inferioris ad planum ipsius Eclipticæ, & sinus distantiæ nodi ascendentis a punctis æquinoctialibus: cumque ob exiguam inclinationem, & tanto minores variationes inclinationis, easque periodicas, & se invicem dato tempore compensantes, ut in corollariis Probl. XXV. notatum est, dato jam angulo inclinationis ejusdem mediæ obliquitas Eclipticæ variari debeat in simplici ratione sinus distantiæ nodi ascendentis a punctis æquinoctialibus; in nodi transitu ab uno ad alterum æquinoctium summa sæcularium omnium variationum obliquitatis erit ad summam variationum totidem maximarum ut summa omnium sinuum, qui in integro semicirculo possunt accipi, ad summam totidem radiorum. Jam vero elementum circularis arcus æquatur elemento sinus versi in radium, & per cosinum arcus diviso: summa vero omnium sinuum per elementum arcus ductorum ad summam radiorum totidem similiter acceptorum se habet ut sinus versus arcus propositi ad arcum ipsum: quæ ratio in integro semicirculo est ratio diametri ad semiperipheriam. Data igitur variatione maxima obliquitatis, quæ dato tempore haberi potest, & data periodo temporis integræ semirevolutionis nodi, summam variationum omnium maximarum eidem periodo respondentium minuendo in ratione diametri ad semiperipheriam, prodibit vera obliquitatis Eclipticæ variatio.

COROLLARIA.

I. Positis igitur numeris iisdem omnibus, qui supra, maximæ variationes sæculares obliquitatis Eclipticæ, & periodi semirevolutionum nodi Planetæ attrahentis, & totæ variationes obliquitatis erunt ut sequitur

Spectata actione, atque orbita	Veneris	Jovis	Saturni.
Maximæ variationes sæculares	32″.	19.03″.	2.08″.
Periodi semircvolutionum nodi	sæcul. 140.	154.	$127\frac{1}{2}$.
Totæ variationes obliquitatis	47′ 32″.	30′ 9″.	2′ 49′.

Quod si variationes hujusmodi simul jam omnes accipi possent, esset limes ultimus variationum $1° 20\frac{1}{4}'$: quæ quantitas paulo est major quam in Dissertationibus anno 1761 Lucæ editis, & Part. I. Tom. V. Commentariorum Bononiensium supputavimus, quod hic & Saturni ratio sit habita, & calculus ad minores usque fractiones deductus sit.

II. Determinato autem limite hoc ultimo patet jam falsum esse quod nonnulli authore Herodoto, atque ex veteri traditione Ægyptiorum asseruerunt, Eclipticam fuisse olim æquatori circulo perpendicularem: pariter falsum esse, quod Louvilleus in Actis Lipsiensibus anni 1719 contendebat, Eclipticæ obliquitatem minuto integro singulis sæculis ita imminui, ut demum cum æquatore congruere debeat: atque insuper falsum esse, quod nonnulli suspicabantur, variationem obliquitatis Eclipticæ a vetustissimis temporibus ad hæc usque tam magnam fuisse, ut variæ terrestris globi mutationes, & tempestatum vicissitudines, quæ Historicorum testimonio diversis in regionibus sunt habitæ, colligi inde, atque explicari possint, & cum neque centralis, ut vocant, caloris hypothesis, quam singulari opusculo refutabimus, ad phænomeni explicationem sufficiat, caloris tantum superficialis, & superficiei totius terrestris variationes supererunt ex quibus phænomenon quodcumque hujus generis possit repeti.

III. Quod si autem consideremus ascendentes nodos orbitarum Veneris, & Jovis gradibus fere 24 a se invicem distare, & nodo alterutro ad puncta æquinoctialia delato actione Planetæ unius adhuc imminui posse obliquitatem Eclipticæ dum actione Planetæ alterius augetur, & vice versa; manifestum erit arctiores imminutæ, auctæque obliquitatis Eclipticæ esse limites. Hi autem limites ut accuratius definiantur considerandum est insuper: distantiam nodi ascendentis Jovis a puncto æquinoctii autumnalis esse $81° 34'$: sæculis fere 66 esse opus ut nodus idem ad æquinoctii autumnalis punctum perveniat: differentiam sæcularium motuum utriusque nodi Jovis, & Veneris esse 286.6″, & sæculis $12\frac{1}{2}$ uno gradu nodum orbitæ Jovis ad nodum orbitæ Veneris propius regredi. Hoc enim dato manifestum erit nodum Jovis cum ad punctum autumnalis æquinoctii pervenerit non nisi gradibus fere 19 distare posse: & cum actio Veneris ad im-

imminuendam obliquitatem Eclipticæ præ actione Jovis paulo fit major quam in ratione 3 : 2, statui etiam poterit actionem Veneris ad imminuendam obliquitatem Eclipticæ desinere, & compensari actione contraria Jovis cum nodus ascendens Veneris 8° citra punctum æquinoctii autumnalis, & nodus ascendens Jovis 11° circiter ultra erit.

IV. Cum igitur nodus ascendens Veneris 105° 29′ distet nunc temporis a puncto æquinoctii autumnalis subductis 8°, erit 97° 29′ arcus, quo nodus Veneris excurret antequam Eclipticæ obliquitas imminui pergat, & excursionis periodus erit sæculorum fere 78. Summa autem sæcularium omnium variationum maximarum, quæ sæculis 78 ob vim Veneris, atque ob vim Jovis sæculis 66 haberi possunt, erit 3720″, eamque imminuendo in ratione radii ad quadrantem, erit 39′ 48″ angulus, quo eclipticæ obliquitas conjunctis Veneris, ac Jovis viribus adhuc imminui perget, iidemque fere prodibunt numeri, si calculis scrupulosius institutis summa utraque variationum maximarum minuatur in ratione differentiæ sinuum versorum, ad circularem arcum qui differentiæ propositæ respondet. Omnino autem negligenda est Saturni actio, quod nodus ascendens orbitæ citius ad autumnale æquinoctium pervenire debeat, quodque ultra æquinoctium delato nodo diutius Saturni actio ad augendam obliquitatem Eclipticæ debeat impendi. Positis hisce omnibus cum Eclipticæ obliquitas statui possit nunc temporis 23° 28′ 16″, minima obliquitas, quæ habebitur 78 fere ab hinc sæculis, erit 22° 48′ 28″.

V. Denique ab autumnali æquinoctio ad æquinoctium vernum redeundo cum adhuc propius ad se invicem debeant accedere nodi ascendentes Veneris, & Jovis, ac minoribus arcuum ac temporum differentiis ad æquinoctium idem pervenire, auctæ obliquitatis quantitas ad eam propius accedet, quam in Coroll. I. determinavimus, quæque erat 47′ 32″ ob vim Veneris, & 30′ 9″ ob vim Jovis, neglectaque ob eamdem rationem corollarii antecedentis Saturni actione erit

Maxima Eclipticæ obliquitas	24° 6′ 9″.
Obliquitas minima	22° 48′ 28″.
Obliquitas media	23° 27′ $18\frac{1}{2}$″.

Scilicet obliquitas media non nisi uno circiter minuto primo ab obliquitate illa deficiet, quæ modo habetur, & differentia obliqui-

tatis mediæ ab obliquitate maxima, aut minima erit 38′ 50½″, differentia vero maximæ, & minimæ 1° 17′ 41″, atque ita factis omnibus reductionibus variæ nodorum distantiæ a se invicem arctiores adhuc prodibunt variatæ inclinationis limites quam cum primo theorema hujusmodi protulimus a nobis statutum sit.

APPENDIX I.

DE THEORIÆ TOTIUS CONSECTARIIS.

Hisce jam omnibus præmissis quæstioni a Societate Batava, quæ Harlemi floret, propositæ per partes singulas satisfiet. Cum enim anno 1776 Satellitum Jovialium theoria Harlemi proponi cæpit, postulabatur, 1.° explicatio inæqualitatum motus Satellitum reciprocis eorum attractionibus genita, 2.° determinatio massæ Satellitis cujusque ex observatis motus inæqualitatibus derivata, 3.° inæqualitatis cujusque quantitas, ac periodus. Primo autem inæqualitates motus Satellitum, quæ collatione Astronomicarum omnium observationum satis accurate jam innotuerunt, attractionis universalis, ac mutuæ legibus respondent satis accurate: inæqualitatis cujusque periodus, & quæ ex hujusmodi legibus, & quæ ex observationibus colligitur, eadem est qua Satellites ad eumdem aspectum redeunt inter se: quantitas vero inæqualitatis, quam ferunt observationes, eadem ex attractionis legibus colligetur si in unoquoque Satellite attrahente statuatur data materiæ quantitas. Et quidem massa primi Satellitis, qui juxta Coroll. II. Probl. VIII. a secundo Satellite potissimum perturbatur, satis accurate in Coroll. I. Probl. IX. determinata censeri potest. At vero cum inæqualitas motus secundi Satellitis pendeat a primo simul, & tertio, ex sola hujusmodi inæqualitate & primi simul, & tertii Satellitis massa determinari nequaquam poterit. Nec quidpiam ad hanc massarum determinationem conferret nodorum motus, cujus quantitas in Satellitis cujusque orbita præcipue pendet ex sphæroidica Jovis forma, atque ex quantitate materiæ, quæ circa æquatorem Jovis extra inscriptam sphæram redundat: atque ita datis binis phænomenis motus nodorum, & inæqualitatis motus periodici in secundo Satellite tres essent quantitates de-

determinandæ , maſſa primi , & tertii Satellitis , & ea materiæ circa æquatorem Jovis redundantis quantitas.

Tertii Satellitis inæqualitas ſi ex actione tantum ſecundi , & quarti Satellitis penderet , determinata jam maſſa ſecundi Satellitis ex inæqualitate primi , maſſæ quarti , & extimi determinandæ inſervire poſſet . At in tertio , & quarto Satellite aliud inſuper occurrit elementum , nimirum orbitæ excentricitas , eaque non adhuc ſatis nota eſt nec niſi longa obſervationum ſerie ſic definiri poterit, ut ſubducta æquatione centri innoteſcat quæ actioni reciprocæ Satellitum reliqua inæqualitatum pars tribui debeat. Tota etiam motuum inæqualitas non ita accurate in tertio , ac quarto Satellite videtur determinata , ac in ſecundo , & primo , quorum orbitæ, cum ſatis proxime ſint circulares certiora exhibent motuum elementa : eaque ad uſus Geographicos, atque ad navigationis commodum ſufficiunt. Primi autem Satellitis inæqualitas cum tanta ſit ut ad $29\frac{1}{2}'$ arcus aſcendat non niſi exiguæ illi maſſæ ſecundi Satellitis reſpondet : & ſecundi Satellitis inæqualitas cum ſit uſque $1\frac{1}{2}°$ non niſi maſſas illas exiguas tertii , & primi Satellitis eſſe indicaret , quarum ratio æquatione appendicis antecedentis exhibita eſt : ac ſimili modo tertii Satellitis inæqualitas ſi actioni ſecundi , & quarti omnis deberet tribui non niſi exiguam in quarto Satellite materiæ quantitatem præ maſſa Jovis argueret . Quo jam ſatisfactum eſt dubiis ab illuſtri Societate indicatis cum anno 1779 theoriam Satellitum Jovialium explanandam Mathematicis iterum propoſuit : num ſcilicet ob exiguam maſſam Satellitum , & exiguam a Jove diſtantiam adeo exiguæ ſint inæqualitates motus ortæ ex reciprocis attractionibus ut nequeant omnino percipi . Exiguæ enim maſſæ Satellitum attrahentium in iis exiguis a Jove diſtantiis ſufficiunt ut tantæ habeantur inæqualitates motus quantæ ex obſervationibus Aſtronomicis colliguntur : ad quas quidem obſervationes theoria omnis Satellitum a nobis relata eſt cum expreſſe etiam Harlemenſis Societas poſtulaverit ut theoriæ , & obſervationum comparatio inſtitueretur.

Quod additum poſtremo loco a Societate eſt , num inæqualitates motus Satellitum a ſphæroidica Jovis forma potiſſimum penderent, ſatis jam in problemate vigeſimo primo evolvimus, atque explicavimus.

Ac-

Acceleratio enim, ac retardatio motus periodici ex illa ſphæroidis, aut ſolidi alterius cujuslibet revolutione geniti forma minime pendet quæ traducto per axem revolutionis plano æquales utrimque vires in contrarias partes exhiberet, eademque ratione Satellitem unumquemque circa centrum revolvi ſineret ac ſi Jovis figura eſſet ſphærica. At cum in ſphæroide oblata, præter vim quæ ad centrum dirigitur, alia ſit vis quæ eſt æquatoris plano perpendicularis, & vis etiam omnis in centrum ex binis partibus componatur, quarum una eſt reciproce ut quadratum diſtantiarum, alia vero eſt reciproce ut quarta diſtantiæ poteſtas; & nodi, & apſides ob ſphæroidicam illam formam motum aliquem debent concipere: ut recte animadvertit Eulerus in Actis Berolinenſis Academiæ anni 1763, & ante Eulerum Walmesley in Tranſactionibus Philoſophicis anni 1758. Motum nodorum ex hujuſmodi cauſſa ortum in vigeſimo primo Probleмате ſupputavimus: motum autem apſidum neglеximus quod proxi me circulares ſint orbitæ primi, & ſecundi Satellitis, quorum apud Geographos, & Nautas præcipua conſideratio eſſe debet. At ſi minor ſemiaxis Jovis vocetur C, differentia majoris, & minoris, B, ratio diſtantiæ Satellitis a centro Jovis ad mediocrem Jovis radium $a:1$, & ſit $p:1$ ratio peripheriæ ad radium, ac denique orbita Satellitis in eodem plano æquatoris Jovis cenſeatur eſſe, juxta formulam illam, quam tradidit D. Clairaut §. XLVI. Par. II. de Figura Terræ, eſſet gravitas omnis Satellitis in Jovem $\frac{2pC^2.\overline{C+2B}}{3a^2} + \frac{2pC^2.B}{5a^4}$, atque eſſet $\frac{2pC^2B}{5a^4}$ vis omnis, quæ aberrat a ratione diſtantiæ reciproca duplicata, & qua gignitur motus apſidum. Unde ſi ea orbitæ mobilis aſſumatur hypotheſis, quam Newtonus expoſuit in Propoſ. XLV. Lib. I. Princip., applicatione ſpecierum exempli tertii ejuſdem propoſitionis rite facta, erit ſingulis Satellitis cujuſque circa Jovem revolutionibus motus apſidum $\frac{3C.B.360^\circ}{5a^2}$, & poſito $\frac{B}{C} = \frac{1}{12}$, $\frac{C}{a} = \frac{1}{25}$, erit motus apſidum quarti Satellitis ſingulis circa Jovem revolutionibus $1\frac{1}{4}'$, & anno integro $38'$. In ea igitur orbitæ mobilis hypotheſi, quæ apogæi lunaris motum dimidio minorem exhibet quam ferant obſervationes, motus apſidum

quar-

quarti Jovis Satellitis ne duobus quidem minutis anno integro prodiret major quam juxta Coroll. II. Probl. XXI. esse debeat nodorum motus qui ex sphæroidica Jovis forma proficiscitur. Cl. Eulerus in Actis Berolinensibus jam memoratis alia hypothesi assumpta motum apsidum, qui ex caussa eadem oritur in quarto Jovis Satellite duplo celeriorem nodorum motu esse invenit.

APPENDIX II.

DE METHODO SYNTHETICA, ET ANALYTICA.

CUm summi, ac celeberrimi Mathematici censeant nunc temporis problemata Mathematica revocanda esse ad Analysim, Analysim seposita Synthesi præcipue esse excolendam, quinto hoc libro absoluto, quo calculum syntheticum exhibere studui earum omnium perturbationum motus, quæ in orbitis potissimum circularibus habentur, attente jam considerari, ac perpendi vellem limites maximæ, & minimæ obliquitatis Eclipticæ supputatos esse synthetice, eoque præmisso theoremate, quo diximus lineam nodorum utriusque orbitæ Saturni, & Jovis regredi in plano immobili, limites maximæ, & minimæ inclinationis orbitæ utriusque ad immobile planum Eclipticæ, librationisque intersectionum utriusque orbitæ cum eodem plano, definiri Geometrica trianguli sphærici resolutione, binisque aliis theorematis præmissis ellipseos circa centrum dato ordine revolutæ, & data quantitate Planetam, aut Satellitem attrahentem versus transpositæ æquationes empyricas Satellitum Jovialium ex theoria gravitatis, facillime derivari. Hisce omnibus addi vellem in antecedente libro ex theoremate alio compositionis motuum rotationis erutam esse Geometricam solutionem problematum præcessionis æquinoctiorum, nutationisque axis terrestris, & librationis Lunæ, ac definitos jam esse limites proportionis semiaxium, ac momentorum Lunæ, quibus haberi potest singulare phænomenon intersectionum lunaris æquatoris, & lunaris orbitæ cum plano Eclipticæ inter se semper parallelarum: atque insuper in libris aliis præcedentibus tot alia Geometrice resoluta esse

pro-

problemata quæ figuram Terræ, fluxumque, ac refluxum maris, & parabolicum Cometarum motum, & Planetarum motum ellipticum respiciunt: ac denique in antecedente volumine tot alia Mechanicæ problemata, ac potissimum quæ rotationis motum, velocitatem, axes respiciunt, Geometrice pariter fuisse resoluta: in casibus autem, ac problematis iis omnibus, quæ Mathematici ingeniosissimi ad sublimiorem Analysim revocaverant, easdem formulas, easdem analogias, & satis proxime eosdem numeros Synthetice inveniri. His vero etiam omnibus omissis cur negligenda, atque amandanda modo esset methodus qua Archimedes, Newtonus, Mac-Laurinus, & summi alii Geometræ vetustiores, recentioresque tot, tantisque inventis, ac tam præcipuis Geometriam, Mechanicam, Astronomiam amplificarunt, iisque tam eleganter, perspicue, & facile demostratis ut cum ad analysim revocantur evadant longe difficiliora? Aut cur cum alia inventa iis omnibus a Mathematicis præstantissimis analyseos præsidio nunc temporis fuerint addita, non adhuc curandum erit ut simplicitate, atque elegantia Geometrica, si fieri possit, tradantur, atque adornentur? Ego igitur jam dudum studiis Geometricis assuetus binis præcipue casibus reservari vellem analysim, iis scilicet problematis resolvendis quæ aut magis operose, aut minus accurate resolvi possunt synthetice, aut non omnino possunt resolvi. Prioris casus exempla jam dedimus quam plurima cum in priore volumine Viviani problemata de locis solidis, & de testudine quadrabili, atque Apollonii, Pappi, Simsonii theoremata de linearum multisectione, ac tot alia quæ prolixiorem tractatiorem Geometricam postularent, brevissime ad analysim deduximus. Quæ ad casum alterum pertinent in subsequente libro præcipue expendemus. Cum enim nec quæ in capite quarto antecedentis libri de apogæi lunaris motu fuerunt tradita, nec quæ simili methodo institui possent evectionis Lunæ, minorumque aliarum æquationum in orbita excentrica supputationes satis accuratæ sint, problema trium corporum se se attrahentium, & Lunæ, aliorumque Planetarum in se invicem agentium theoriam generaliter ad analysim revocare, atque analytice tradere ad hujus operis complementum necesse est.

LI-

LIBER SEXTUS.

DE THEORIA LUNÆ (*).

Æquationes omnes lunarium motuum Majerus collatis omnibus observationibus summo studio diligentissime definivit. Et primo quidem æquationem centri, in priori tabularum lunarium editione, maxima sui quantitate statuit $-6° \, 18' \, 44''$ cum angulus anomaliæ mediæ cZ sit graduum 94, aut 266. Hoc autem posito anomaliæ mediæ ejusdem angulo, secunda pars æquationis centri, quæ proportionalis est sinui anomaliæ mediæ bis acceptæ, seu $13'. \text{sin.}\, 2cZ$, evadit $-13'. \text{sin.}\, 8° = -1'48.55''$: atque est pars tertia $-37''. \text{sin.}\, 3cZ = -37''. \text{sin.} -78° = 36.19''$. Quare differentiam $-1' \, 12.36''$ subducendo, pars prior æquationis fiet $-6° \, 17' \, 31.46''$: quæ cum proportionalis sit sinui recto anguli cZ, aucta in ratione sinus totius ad sinum anguli 86°, erit in maxima sui quantitate $-6° \, 18' \, 26''$: ac generatim juxta Majeri tabulas erit omnis æquatio centri lunaris orbitæ $-6° 18' 26''. \text{sin.}\, cZ + 13'. \text{sin.}\, 2cZ - 37''. \text{sin.}\, 3cZ$.

Variationem æquationis centri tabula undecima ita traditæ, sive evectionem Lunæ definivit Majerus duodecima tabula subsequenti: maximam scilicet evectionis quantitatem statuit $-1° \, 20' \, 34''$, & argumentum ipsius esse dixit duplam distantiam Lunæ a Sole

(*) *Theoriam Lunæ aliorumque Planetarum accuratius recognoscere, ac latius explicare aggressus erat Cl. Auctor, ut ex Fragmento, quod huic Volumini adjiciemus, facile dignoscetur. At, cum tantum priora Capita in ordinem redigere ipse potuerit, e re visum est, ne postrema hæc Cosmographiæ pars in hac Operum omnium editione frustra desideraretur, eam ex Cosmographia jam pridem edita excerpere atque isthuc veluti in locum suum inserre. Prudens ac doctus Lector si qua forte, nuperrimis ab Auctore selectis observationibus parum consona offendet, sive anterioribus formulis minus congruenter aptata inveniet, ea supplere ac Theoriæ totius Operis convenienter accomodare studebit. Neque enim poterat Opus præclarissimum magna ex parte jam excussum sine multorum querelis supprimi aut intermitti. Quod si circa finem in hisce adnexis Capitibus aliquid mancum aut deforme obrepere debuit, id non vitio nostro sed adverso Scientiarum fato quod talem ac tantum Virium nimium præmature nobis eripuerit, omnimode erit tribuendum.*

correctam per antecedentes alias æquationes, dempta anomalia Lunæ media correcta: ut si media Lunæ a Sole distantia vocetur X, sine correctionibus aliis aliarum præcedentium tabularum, æquatio tota esse debeat $-\ 1^\circ\ 20'\ 34''.\ \text{sin.}\ 2X - cZ$. Adnotavit vero Alembertius §. XIV. Par. III. de mundi systemate ex ipso tabularum contextu colligi in correctionum numerum minime recensendam esse illam, quæ pendet ex æquatione centri. Tabulas autem Majeri omnes minime exscribimus quod & seorsim, & cum aliis etiam operibus impressæ habeantur.

Tabula decima tertia Majerus primam, & secundam Lunæ variationem simul complexus est: in qua quidem tabula cum prior omnis variatio, quæ proportionalis est sin. $2X$, evanescat posito $X = 90^\circ$, ac tum supersit $-\ 1'\ 57''$; variatio secunda, quæ proportionalis est sin. X, fiet universim $-\ 1'\ 57''.\ \text{sin.}\ X$, ac posito $X = 45^\circ$, & sin. $X = 0.7081$, evadet $-\ 1'\ 23''$. Quare cum totam æquationem maximam Majerus in priori octante post novilunium, & post quadraturam primam statuerit $39'\ 3''$, & in octante post plenilunium, & quadraturam alteram $41'\ 41''$; addita, & dempta quantitate $1'\ 23''$, fiet prima variatio circiter $40\frac{1}{3}'.\ \text{sin.}\ 2X$. Argumentum autem æquationis hujus statuit Majerus non duplam differentiam longitudinis Lunæ, & Solis, sed duplam longitudinem Lunæ per æquationem centri, & æquationem evectionis correctam dempta longitudine Solis non correcta, aut æquata, sed vera.

Sit igitur X distantia medii loci Lunæ a loco vero Solis, seu differentia longitudinis mediæ Lunæ, & longitudinis veræ Solis. Erit variationis primæ argumentum

$2\,(X - 6^\circ\, 18'\, 26''.\ \text{sin.}\,cZ - 1^\circ\, 20'\, 34''.\ \text{sin.}\ \overline{2X - cZ}$, cujus sinus est

$\text{sin.}\,2X - 2(6^\circ\, 18'\, 26'').\text{sin.}\,cZ.\text{cos}.\,2X - 2(1^\circ 20' 34'').\text{sin.}\,\overline{2X - cZ}.\text{cos}.\,2X =$
$\text{sin.}\,2X \mp 6^\circ 18' 26''.\text{sin.}(2X \pm cZ) - 1^\circ 20' 34''.\text{sin.}(4X - cZ) + 1^\circ 20' 34''.\text{sin.}\,cZ.$
Quia radius æquatur arcui 57.29578°, coefficientibus in se ductis, & per radium ipsum divisis, præter æquationem $40\frac{1}{3}'.\ \text{sin.}\ 2X$ æquationes alias habebimus

$\mp\, 4'\, 26''.\ \text{sin.}\,(2X \pm cZ) - 56''.\ \text{sin.}\,(4X - cZ) + 56''.\ \text{sin.}\ cZ.$

Neglecta vero ob parvitatem correctione evectionis fiet secunda Lu-

Ne-

næ variatio $- 1' 57''$. fin. $X \pm 6.4''$. fin. $(2X \pm cZ)$. Et quidem fubducendo $4'\ 19.6''$ a $1^\circ\ 20'\ 34''$ fiet tota evectio refidua $- 1^\circ\ 16'\ 14.4''$. fin. $(2X - cZ)$: æquatio autem $56''$. fin. cZ priorem partem æquationis centri in Majeri tabulis relinquet $- 6^\circ\ 17'\ 30''$. fin. cZ.

Majerus etiam tabula decima, in priori octante lunaris apogæi cum Sole, eamdem cum Newtono retinuit quantitatem $- 3'\ 45''$. femeftris illius æquationis, quæ pro argumento habet duplam diftantiam mediam apogæi ipfius a Sole $2cZ - 2X$. Sed æquationem omnem Majerus diftribuit in binas partes, quarum una eft finui duplæ diftantiæ apogæi a Sole, altera eft finui fimplicis diftantiæ proportionalis. Pars autem prior cum evanefcat pofito $cZ - X = 90^\circ$, atque in hac pofitione apfidum fuperfint $- 29''$, fiet univerfim fecunda æquationis pars $- 29''$. fin. $(cZ - X)$, ac pofito $cZ - X = 45^\circ$ evadet dumtaxat $- 20''$. Cumque infuper juxta tabulam eamdem in diftantia 45°, & 315° apogæi Lunæ a Sole fit maxima æquatio $3'\ 45''$, eaque non fit major $3'\ 4''$ in diftantia 135°, aut 225°, demendo, addendoque $20''$ fiet prior pars æquationis $- 3'\ 25''$. fin. $(2cZ - 2X)$.

Æquationem annuam Majerus in priori eadem editione tabularum ftatuit $11'\ 20''$. fin. Y, pofito quod media Solis anomalia vocetur Y. Aliam etiam recenfuit author ipfe argumenti ejufdem æquationem $- 10'\ 18''$. fin. Y, qua debet corrigi motus annuus nodorum lunaris orbitæ, & quam bis acceperam inverfo figno infervire docuit alteri correctioni anomaliæ mediæ Lunæ. Fit ita anomaliæ correctio $- 6^\circ\ 18' 26''$. fin. $(cZ + 11'\ 20''$. fin. $Y + 20'\ 36''$. fin. $Y)$, atque inde more folito educitur bina æquatio $\mp 1'\ 45''$. fin. $(cZ \pm Y)$: & cum in Majeri tabulis alia occurrat æquatio $40''$. fin. $(cZ - Y)$, fiet omnis æquatio hujus nominis $2'\ 25''$. fin. $(cZ - Y)$. Simili modo pro cZ fcribendo $cZ + 31'\ 56''$. fin. Y, & diftantiam Lunæ a Sole X corrigendo per æquationem annuam $11'\ 20''$. fin. Y, & loco $2X$ fcribendo $2X + 22'\ 40''$. fin. Y, fiet tota evectio juxta Majeri tabulas correcta $- 1^\circ 20'\ 34''$. fin. $(2X - cZ - 9'\ 16''$. fin. $Y) =$
$- 1^\circ 20' 34''$. fin. $(2X - cZ) \pm 13''$. fin. $(2X - cZ \pm Y)$.

Addidit autem Majerus binas alias æquationes ejufdem nominis

 $1'\ 48''$.

1′ 48″. sin.$(2X - cZ + Y)$ + 1′ 12″. sin. $(2X - cZ - Y)$: unde erit totus argumenti prioris coefficiens 2′ 1″, posterioris 59″, Pariter cum apud ipsum occurrat æquatio 1′ 30″. sin. $(2X + cZ)$, copulando æquationem — 4′ 20″. sin.$(2X + cZ)$, quæ prodiit jam variationem per æquationem centri corrigendo, supererit hujus generis æquatio — 2′ 50″. sin. $(2X + cZ)$. Aliæ in Majeri tabulis occurrunt æquationes — 54″. sin.$(2X + Y)$ — 1′ 2″. sin.$(2X - Y)$. atque insuper binæ aliæ habentur æquationes, quæ pendent ex loco nodi. Prima habet pro argumento duplam distantiam Lunæ a nodo dempta dupla distantia Lunæ a Sole: & si S denotet distantiam mediam Lunæ a nodo ascendente orbitæ apud Majerum est hujusmodi æquatio — 47″. sin. $(2S - 2X)$, ut etiam a Newtono statuta fuerat in scholio theoriæ lunaris. Altera æquatio est 58″. sin. $(2S - cZ)$. Æquatio reductionis motus Lunæ ad eclipticam juxta Majerum est — 6′ 57″. sin. $2S$, eaque debet corrigi per æquationem centri, ut sit correctio ipsius reductionis 2 (6′ 57″) (6° 18′ 26″). sin.cZ. cos.$2S$: quæ binas alias æquationes de more suppeditabit 46″. sin.$(2S + cZ)$ — 46″. sin. $(2S - cZ)$: unde posteriori termino addendo 58″. sin. $(2S - cZ)$ supererit dumtaxat 12″. sin. $(2S - cZ)$.

In editione altera tabularum, quæ anno 1767. Londini prodiit; ordinem, & coefficientes æquationum singularum Majerus paululum immutavit. Eæ vero facile ad priorum normam reduci possunt. Primo enim si evectio — 1° 20′ 36″. sin.$(2X - cZ)$, quæ quinto loco occurrit in novis hujuscemodi tabulis, per æquationes alias anomaliæ Solis corrigatur, præbebit $\pm$ 13″. sin.$(2X - cZ \pm Y)$, jungendoque æquationem sextam, & septimam earumdem tabularum habebimus 2′ 13″. sin.$(2X - cZ + Y)$ + 34″. sin.$(2X - cZ - Y)$. Deinde vero æquatio centri, quæ duodecima est, quæque ascendit ad — 6° 18′ 11″, similiter per æquationes anomaliæ Solis correcta præbebit $\mp$ 1′ 45″. sin. $(cZ \pm Y)$: correcta vero per evectionem præbebit insuper 4′ 21″. sin. $2X$ — 4′ 21″. sin. $(2cZ - 2X)$: jungendoque octavam, & decimam æquationem supererit
2′ 13″. sin. $(cZ - Y)$ — 3′ 21″. sin.$(2cZ - 2X)$. Tertio ob partem

tem alteram correctionis hujus variatio, quæ tertiodecimo loco statuitur 35′ 47″. sin. $2X$, evadet 40′ 8″. sin. $2X$: & prior variationis quantitas 35′ 47″. sin. $2X$ per æquationem centri, & evectionem correcta exhibebit alias æquationes ∓ 3′ 56″. sin. $(2X \pm cZ)$ — 50″. sin. $(4X - cZ)$ + 50″. sin. cZ. Ita vero supererit æquatio centri — 6° 17′ 21″. sin. cZ: eritque tota evectio residua — 1° 16′ 40″. sin. $(2X - cZ)$: & loco quartæ æquationis exsurget — 3′ 7″. sin. $(2X + cZ)$. Ultima tabularum æquatio est — 6′ 51″. sin. $2S$: unde ope æquationis centri ut antea eruitur ± 46″. sin. $(2S \pm cZ)$: ac loco penultimæ æquationis Majeri prodit 40″. sin. $(2S - cZ)$.

Æquationibus hisce omnibus Majerus locum Lunæ in sua orbita tam accurate definiri dixit ut in calculo longitudinis non nisi error 1′ 27″ collatione observationum astronomicarum prodeat. Latitudinis æquationes Majerus decem exhibuit, easque intra 20″ tantum accuratas esse contendit. Retentis autem iisdem nostris denominationibus, neglectisque aliquot aliis correctionibus, quæ ex reductionibus mediorum motuum ad veros oriri possent, & quæ in coefficientibus reducendis nullum sensibilem errorem parerent; si sit cZ anomalia media Lunæ, Y anomalia media Solis, X distantia loci medii Lunæ a loco Solis vero, S distantia loci ejusdem medii Lunæ a loco nodi correcto, simul collectis terminis omnibus ejusdem nominis, longitudinis æquationes ex posterioribus Majeri tabulis esse debent ut in priori columna subsequenti, iisdemque servatis argumentis coefficientes priorum tabularum esse debent ut in altera columna

— 6°.	17′.	21″.	sin. cZ.	— 6°.	17′.	30″.
	+ 12.	52.	sin. $2cZ$.		+ 13.	
		— 37.	sin. $3cZ$.			— 37.
	— 1.	55.	sin. X.		— 1.	57.
	+ 40.	8.	sin. $2X$.		+ 40.	20.
		+ 2.	sin. $3X$.			
		+ 14.	sin. $4X$.			
— 1.	16.	40.	sin. $2X - cZ$.	— 1.	16.	14.
		— 50.	sin. $4X - cZ$.			— 56.
		+ 26.	sin. $4X - 2cZ$.			
						— 3.

— 3.′	7.″	sin. 2 X + c Z.	— 2.′ 50.″
	— 16.	sin. c Z — X.	— 29.
— 3.	21.	sin. 2 c Z — 2 X.	— 3. 25.
+ 11.	14.	sin. Y.	+ 11. 20.
	— 4.	sin. 2. Y.	
— 1.	45.	sin. c Z + Y.	— 1. 45.
+ 2.	13.	sin. c Z — Y.	+ 2. 25.
	— 58.	sin. 2 X + Y.	— 54.
— 1.	13.	sin. 2 X — Y.	— 1. 2.
+ 2.	13.	sin. 2 X + Y — c Z.	+ 2. 1.
	+ 34.	sin. 2 X — Y — c Z.	+ 59.
	— 51.	sin. 2 S — 2 X.	— 47.
— 6.	51.	sin. 2 S.	— 6. 57.
	+ 46.	sin. 2 S + c Z.	+ 46.
	+ 40.	sin. 2 S — c Z.	+ 12.

Latitudinis æquationes in posterioribus Majeri tabulis sunt

5°.	8′.	30″.	sin. S.
	+ 8.	47.	sin. 2 X — S.
		— 8.	sin. 2 X — S + Y.
		— 5.	sin. 2 X — S — Y.
		— 3.	sin. 2 X — S + c Z.
		+ 16.	sin. 2 X — S — c Z.
		— 16.	sin. S — c Z.
		— 29.	sin. S — 2 c Z.
		+ 3.	sin. S — 3 c Z.
		+ 6.	sin. 2 X — 2 c Z + S.

CA-

CAPUT PRIMUM.

DE PRIORI ÆQUATIONE PROBLEMATIS TRIUM CORPORUM SE SE ATTRAHENTIUM.

PROBLEMA I.

SI corpus aliquod gravitate, quæ ſit reciproce ut quadratum diſtantiæ, ellipſim circa focum deſcribat, & viribus aliis quibuſcumque abducatur a perimetro ellipſeos, invenire elementum temporis, quod elemento cuilibet angularis motus reſpondet.

Sit φ excentricitas, & 1 major ſemiaxis illius ellipſeos, quæ deſcriptæ orbitæ eſt propior, & quæ viribus decreſcentibus in duplicata ratione auctarum diſtantiarum deſcribi poſſet. Velocitas in circulo radii $1+\varphi$, juxta Theor. II. Lib. I., ea eſt, qua corpus eadem vi centripeta $\frac{1}{(1+\varphi)^2}$ decideret per altitudinem $\frac{1}{2}.\overline{1+\varphi}$: ſive juxta Coroll. I. Probl. XI. Mechanicæ velocitas hujuſmodi eſſe debet $\sqrt{\left(\frac{1}{1+\varphi}\right)}$.

Velocitas autem in circulo, per Coroll. II. Theor. IX. Lib. I., eſt ad velocitatem in vertice ellipſeos ad eamdem diſtantiam deſcriptæ ut $\sqrt{\overline{2+2\varphi}}$ ad radicem lateris recti principalis, quod eſt $2.\overline{1-\varphi^2}$. Eſt igitur velocitas in vertice ellipſeos $\sqrt{\left(\frac{1-\varphi}{1+\varphi}\right)}$: & cum ob areas temporibus proportionales velocitas radio vectori perpendicularis variari debeat in ratione inverſa vectoris radii, ſi radius vector vocetur x, fiet univerſim quadratum velocitatis perpendicularis $\frac{\overline{1+\varphi}.\overline{1-\varphi}}{x^2}$, & vis centrifuga $\frac{1-\varphi^2}{x^3}$. At inſuper ſector ellipticus in ſumma apſide æquari debet ſpatio percurſo in $\frac{1}{2}.\overline{1+\varphi}$ ducto: ſpatium vero eſt productum elementi temporis in projectionis velocitatem $\sqrt{\left(\frac{1-\varphi}{1+\varphi}\right)}$. Quod ſi igitur elementum temporis ſit $d\theta$,

erit

erit sector ellipticus $\frac{1}{2} \surd (1 - \varphi^2) . d\theta$, augebiturque in simplici ratione temporis. Et iis quidem spectatis tantum viribus perturbatricibus, quæ juxta vectorem radium diriguntur, abducetur corpus a perimetro ellipseos, efficieturque ut radius vector x a radio elliptico differat: areæ vero circa focum descriptæ adhuc erunt proportionales temporibus. At vires perpendiculares radio, cum corpus accelerent, aut retardent, efficient etiam ut alia sit lex arearum, & sector $\frac{1}{2} x d\zeta$, qui radio x, & elemento eodem temporis $d\theta$ describitur, quique qui ad focum subtendit angulum $d\zeta$, sectore elliptico major, vel minor sit. Et quia, data vi acceleratrice, spatia percursa sunt ut quadrata temporum, si vis perpendicularis radio vocetur ω, erit $\omega d\theta^2$, spatium eodem elemento temporis percursum, & elementum variationis areæ erit $\frac{1}{2} x . \omega d\theta^2$, & tota sectoris elliptici variatio erit $\frac{1}{2} \int \omega x d\theta^2$, sive $\frac{1}{2} d\theta . \int \omega x d\theta$, vel proxime $\frac{1}{2} d\theta . \int \omega x^2 d\zeta$. Primo enim ob parvitatem vis perturbatricis negligi poterit productum quantitatis $\frac{1}{2} \int \omega x d\theta$ in variationem elementi temporis $d\theta$, quæ oritur ex vi ω, quæque aliqua ipsius potentia debet exprimi: deinde vero in producto $\omega d\theta$ negligi poterit differentia sectoris $\frac{1}{2} x^2 d\zeta$, & sectoris elliptici $\frac{1}{2} \surd (1 - \varphi^2) . d\theta$, & loco $\omega x d\theta$ substitui poterit $\omega x^2 d\zeta$. Erit igitur $\frac{1}{2} \surd (1 - \varphi^2) . d\theta = \frac{1}{2} x^2 d\zeta - \frac{1}{2} d\theta . \int \omega x^2 d\zeta$, &

$$d\theta = \frac{x^2 d\zeta}{\surd (1 - \varphi^2) + \int \omega x^2 d\zeta} .$$

COROLLARIA.

I. Si iisdem positis denominationibus gravitas in mediocri distantia ut antea vocetur 1, & universim sit $\frac{1}{x^2}$; erit $\frac{1 - \varphi^2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$ vis omnis, qua corpus in orbita elliptica juxta vectorem radium ascendet, vel descendet. Cum enim vis centripeta ad centrifugam in summa apside ellipseos se habere debeat reciproce ut radius osculi ad foci distantiam, sive directe ut: $1 : 1 - \varphi$, ac sit ibidem gravitas $\frac{1}{(1 + \varphi)^2}$; erit vis centrifuga $\frac{1 - \varphi}{(1 + \varphi)^2}$: quæ cum variari debeat in ratione $x^3 : (1 + \varphi)^3$, erit ad distantiam quamcumque x vis centrifuga $\frac{1 - \varphi^2}{x^3}$.

Quia

II. Quia vero quadratum ſpatii diviſum per quadratum temporis $\frac{x^4\,dz^2}{1-\phi^2+2\int\omega x^3\,dz}$ æquatur quadrato velocitatis; ſpectatis viribus perturbatricibus erit quadratum velocitatis radio vectori perpendicularis $\frac{x^2\,dz^2}{d\theta^2} = \frac{1-\phi^2+2\int\omega x^3\,dz}{x^2}$: & vis centrifuga, quæ in orbita elliptica jam erat $\frac{1-\phi^2}{x^3}$, ob vires ipſas perturbatrices fiet $\frac{1-\phi^2+2\int\omega x^3\,dz}{x^3}$: eritque ipſius vis centrifugæ; ac gravitatis differentia $\frac{1-\phi^2+2\int\omega x^3\,dz}{x^3} - \frac{1}{x^2}$.

III. Si vires omnes perturbatrices accipiantur ut in Prob. I. Lib. V., & ſit mediocris vis perturbatrix juxta vectorem radium exercita $\frac{1}{2}n^2 x\,.\,\overline{1-\frac{1}{2}\pi^2}$, & vires aliæ juxta eumdem radium agentes vocentur ϖ; erit vis omnis qua Luna juxra vectorem radium aſcendet, vel deſcendet $\frac{1-\phi^2+2\int\omega x^3\,dz}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}n^2 x\,.\,\overline{1-\frac{1}{2}\pi^2} + \varpi$.
Vis enim ω, cum ſit radio perpendicularis, non alia ratione motum Lunæ accedendi, aut recedendi a Terra juxta radium ipſum afficiet, quam quod velocitatem perpendicularem, & vim centrifugam minuat, vel augeat: tota autem velocitas eadem perpendicularis, & velocitas juxta vectorem radium ob vires alias exſurgens ſemitam omnem Lunæ determinant.

PROBLEMA II.

Iiſdem poſitis invenire æquationem differentialem vectoris radii.

In primis ſi radius quicumque vector ſit x, & dx elementum radii, atque univerſim ſit dv elementum velocitatis, qua corpus aliquod ob vim quamcumque acceleratricem F juxta radium ipſum aſcendit, vel deſcendit; erit $F.\,d\theta = dv$: & cum ſit $v = \frac{dx}{d\theta}$, elementis de more ſumptis fiet $F.d\theta = \frac{ddx\,.\,d\theta - dx\,.\,dd\theta}{d\theta^2}$, ſive

$F.d\theta^2 = ddx - dx.\frac{dd\theta}{d\theta}$: ad quam generalem formulam motus omnis variabilis reducitur. In casu autem problematis antecedentis erit

$$d\theta = \frac{x^2 d\zeta}{\sqrt{(1-\varphi^2)} + \int \omega x^3 d\zeta}$$

$$dd\theta = \frac{2 x dx d\zeta}{\sqrt{(1-\varphi^2)} + \int \omega x^3 d\zeta} - \frac{x^2 d\zeta . \omega x^3 d\zeta}{1 - \varphi^2 + 2\int \omega x^3 d\zeta}$$

$$- dx.\frac{dd\theta}{d\theta} = -\frac{2 dx^2}{x} + \frac{\omega x^3 dx d\zeta}{\sqrt{(1-\varphi^2)} + \int \omega x^3 d\zeta}.$$

Quod si igitur loco F substituamus expressionem ipsam corollarii posterioris, generalis variabilium motuum formula abibit in hanc aliam

$$F.d\theta^2 = ddx - \frac{2dx^2}{x} + \frac{\omega x^3 dx d\zeta}{\sqrt{(1-\varphi^2)} + \int \omega x^3 d\zeta}$$

$$= x d\zeta^2 - \frac{x^4 d\zeta^2}{1 - \varphi^2 + 2\int \omega x^3 d\zeta} + \frac{(\frac{1}{2} n^2 x . \overline{1 - \frac{1}{2}\pi^2} + \varpi) . x^4 d\zeta^2}{1 - \varphi^2 + 2\int \omega x^3 d\zeta}.$$

Neglectis itaque ob parvitatem quadratis virium perturbatricium, & potestatibus excentricitatis plusquam quadraticis æquatio differentialis orbitæ hoc ordine disponi poterit

$$\frac{x ddx - 2 dx^2}{d\zeta^2} = x^2 - \frac{x^3}{1-\varphi^2} + \frac{(\frac{1}{2} n^2 x^4 . \overline{1 - \frac{1}{2}\pi^2} + \varpi x^4)}{1 - \varphi^2}$$

$$+ \frac{2 x^3 \int \omega x^3 d\zeta}{1 - 2\varphi^2} - \omega x^4 . \frac{dx}{d\zeta}.$$

COROLLARIA.

I. Si fiat $\frac{1}{x^2} - \frac{3}{2} n^2 x . \overline{1 - \frac{1}{2}\pi^2} - \varpi = \psi$, & $1 - \varphi^2 = g^2$, prior æquatio differentialis hanc aliam formam induet

$$x d\zeta^2 - ddx + \frac{2dx^2}{x} = \frac{\psi x^4 d\zeta^2}{g^2 + 2\int \omega x^3 d\zeta} + \frac{\omega x^3 dx d\zeta}{g + \int \omega x^3 d\zeta}:$$

& quia quantitas ω exigua est, g vero proxime accedit ad unitatem, proxime etiam statui poterit

$$x d\zeta^2 - ddx + \frac{2dx^2}{x} = \left(\psi + \frac{\omega dx}{x d\zeta}\right) . \frac{x^4 d\zeta^2}{g^2 + 2\int \omega x^3 d\zeta}.$$

Quod

II. Quod si fiat insuper $x = \frac{1}{u}$, $dx = -\frac{du}{u^2}$, $\frac{dx^2}{x} = \frac{du^2}{u^3}$;
$ddx = -\frac{u^2 ddu + 2udu^2}{u^4}$, & $xd\zeta^2 - ddx + \frac{2dx^2}{x} = \frac{d\zeta^2}{u} + \frac{ddu}{u^2}$,
aequatio eadem differentialis in hanc aliam transformabitur

$$u\,d\zeta^2 + ddu - \frac{\frac{d\zeta^2}{g^2 u^2}\left(\psi - \frac{\omega\, du}{u\, d\zeta}\right)}{1 + \frac{2\int \omega\, d\zeta}{g^2 u^2}} = 0.$$

PROBLEMA III.

Iisdem positis invenire aequationem differentialem differentiae vectoris radii, quae gignitur actione virium perturbatricium.

Si excentricitas orbitae ellipticae ut antea vocetur φ, & distantia medioeris a foco exprimatur unitate, per Coroll. III. Probl. III. Lib. I. erit radius vector ellipseos $\frac{1-\varphi^2}{1-\varphi.\operatorname{cos}.c\zeta}$: & si insuper t designet spatium illud exiguum, quo corpus actione virium perturbatricium abducitur a perimetro ellipseos, neglectis plusquam quadraticis excentricitatis potestatibus fiet ordine

$$x = 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \varphi.\operatorname{cos}.c\zeta + \tfrac{1}{2}\varphi^2.\operatorname{cos}.2c\zeta + t$$

$$\frac{dx}{d\zeta} = -\varphi c.\operatorname{sin}.c\zeta - \varphi^2 c.\operatorname{sin}.2c\zeta + \frac{dt}{d\zeta}$$

$$-\frac{2dx^2}{d\zeta^2} = -\varphi^2 c^2 + \varphi^2 c^2.\operatorname{cos}.2c\zeta - \frac{2dt^2}{d\zeta^2}$$
$$+ 4\varphi c.\operatorname{sin}.c\zeta.\frac{dt}{d\zeta} + 4\varphi^2 c.\operatorname{sin}.2c\zeta.\frac{dt}{d\zeta}$$

$$\frac{ddx}{d\zeta^2} = -\varphi c^2.\operatorname{cos}.c\zeta - 2\varphi^2 c^2.\operatorname{cos}.2c\zeta + \frac{ddt}{d\zeta^2}$$

$$x^2 = 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + 2\varphi.\operatorname{cos}.c\zeta + \tfrac{1}{2}\varphi^2.\operatorname{cos}.2c\zeta + \overline{2-\varphi^2}.t$$
$$+ 2\varphi t.\operatorname{cos}.c\zeta + \varphi^2 t.\operatorname{cos}.2c\zeta + t^2$$

$$x^3 = 1 + 3\varphi.\operatorname{cos}.c\zeta + 3\varphi^2.\operatorname{cos}.2c\zeta + \overline{3-\tfrac{3}{2}\varphi^2}.t$$
$$+ 6\varphi t.\operatorname{cos}.c\zeta + \tfrac{9}{2}\varphi^2 t.\operatorname{cos}.2c\zeta + 3t^2$$

 $x^4 =$

$$x^4 = 1 + \varphi^2 + 4\varphi\,.\,\text{cos.}\,c\zeta + 5\varphi^2\,.\,\text{cos.}\,2c\zeta + 4t + \varphi'\,\text{cos.}\,c\zeta + \&c.$$

$$x^5 = 1 + \tfrac{5}{2}\varphi^2 + 5\varphi\,\text{cos.}\,c\zeta + \frac{15}{2}\varphi^2\,.\,\text{cos.}\,2c\zeta + 5t\ \&c.$$

$$x^6 = 1 + \tfrac{9}{2}\varphi^2 + 6\varphi\,.\,\text{cos.}\,c\zeta + \frac{21}{2}\varphi^2\,.\,\text{cos.}\,2c\zeta + \overline{6 + 5\varphi^2}\,.\,t + 30\varphi t\,.\,\text{cos.}\,c\zeta$$

$$x^7 = 1 + 7\varphi^2 + 7\varphi\,.\,\text{cos.}\,c\zeta\ \&c.$$

$$\frac{\tfrac{1}{2}n^2 x^6}{1-\varphi^2} = \tfrac{1}{2}n^2\,.\,1 + \frac{11}{2}\varphi^2 + n^2 t\,.\,3 + \frac{11}{2}\varphi^2 + 3n^2\varphi\,.\,\text{cos.}\,c\zeta$$

$$+ \frac{21}{4}n^2\varphi^2\,.\,\text{cos.}\,2c\zeta + 15\varphi n^2 t\,.\,\text{cos.}\,c\zeta$$

$$-\omega x^4\,.\,\frac{dx}{d\zeta} = \omega\varphi c x^4\,.\,\text{fin.}\,c\zeta + \omega\varphi^2 c x^4\,\text{fin.}\,2c\zeta - \frac{\bar{\omega}\,dt}{d\zeta}$$

$$x^3 - \frac{x^3}{1-\varphi^2} = -\tfrac{1}{2}\varphi^2 - \varphi\,.\,\text{cos.}\,c\zeta - \tfrac{1}{2}\varphi^2\,.\,\text{cos.}\,2c\zeta - (1 + \tfrac{5}{2}\varphi^2)\,.\,t$$

$$-4\varphi t\,.\,\text{cos.}\,c\zeta - \tfrac{7}{2}\varphi^2 t\,.\,\text{cos.}\,2c\zeta - 2t^2$$

$$\frac{x\,ddx - 2\,dx^2}{d\zeta^2} = x\,.\left(\frac{ddt}{d\zeta^2} - \varphi c^2\,.\,\text{cos.}\,c\zeta - 2\varphi^2 c^2\,.\,\text{cos.}\,2c\zeta\right) - \frac{2dt^2}{d\zeta^2}$$

$$-\varphi^2 c^2 (1 - \text{cos.}\,2c\zeta) + (\text{fin.}\,c\zeta + \varphi\,.\,\text{fin.}\,2c\zeta)\,.\,4\varphi c\,.\,\frac{dt}{d\zeta}$$

$$-\varphi c^2 x\,.\,\text{cos.}\,c\zeta = -\varphi c^2\,.\,\text{cos.}\,c\zeta - \tfrac{1}{2}\varphi^2 c^2\,.\,(1 + \text{cos.}\,2c\zeta) - \varphi c^2 t\,.\,\text{cos.}\,c\zeta$$

Collectis itaque, atque ordinatis terminis, fuperioris problematis æquatio abibit in hanc aliam

$$\frac{x\,ddt}{d\zeta^2} + \left(1 - 3n^2\,.\,\overline{1 - \tfrac{1}{2}\pi^2} + \tfrac{1}{2}\varphi^2 - \frac{11}{2}n^2\varphi^2\right)\,.\,t$$

$$= \tfrac{1}{2}n^2\,.\left(1 + \frac{11}{2}\varphi^2\right) + \varphi\,.\,(c^2 - 1 + 3n^2)\,.\,\text{cos.}\,c\zeta$$

$$+ \frac{21}{4}n^2\,.\,\varphi^2\,.\,2c\zeta + \tfrac{1}{2}\varphi^2\,.\,(c^2 - 1)(1 + \text{cos.}\,2c\zeta)$$

$$-(4 - c^2 - 15n^2)\,.\,\varphi t\,\text{cos.}\,c\zeta + - \tfrac{1}{2}\varphi^2 t\,.\,\text{cos.}\,2c\zeta$$

$$+ (\text{fin.}\,c\zeta + \varphi\,.\,\text{fin.}\,2c\zeta)\left(\varphi\omega c x^4 - 4\varphi c\,.\,\frac{dt}{d\zeta}\right)$$

$$-2t^2 - \frac{\omega\,dt}{d\zeta} + \frac{2dt^2}{d\zeta^2}$$

$$+ \frac{\varpi x^6}{1-\varphi^2} + \frac{2x^3\int\omega x^3\,d\zeta.}{1-2\varphi^2}$$

Quod

Quod si denique in priori termino substituatur valor vectoris radii, dividaturque æquatio omnis per $1+\frac{1}{2}\varphi^2+\frac{1}{2}n^2\pi^2$, ut coefficiens secundi termini fiat $1-3n^2+2n^2\varphi^2$, ac rursus æquatio exsurgens dividatur per $1+2n^2\varphi^2$ ut pro eodem coefficiente superfit tantum $1-3n^2$, neglectis inferiorum ordinum fractionibus erit quæsita æquatio

$$\frac{ddt}{d\zeta^2}+(1-3n^2).t$$

$$=\frac{1}{2}n^2-3n^2\varphi^2+(c^2-1+3n^2).\frac{\varphi.\text{cos}.\,c\zeta}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}$$

$$+\frac{21}{4}n^2\varphi^2.\text{cos}.\,2c\zeta+\frac{1}{2}\varphi^2(c^2-1)(1+\text{cos}.\,2c\zeta)$$

$$-(4-c^2-15n^2).\frac{\varphi t.\text{cos}.\,c\zeta}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}-\frac{1}{2}\varphi^2 t.\text{cos}.\,2c\zeta$$

$$+(\text{sin}.\,c\zeta+\varphi.\text{sin}.\,2c\zeta)\left(\varphi\omega c x^4-4\varphi\frac{c.dt}{d\zeta}\right)$$

$$-(\varphi.\text{cos}.\,c\zeta+\frac{1}{2}\varphi^2.2c\zeta-3\varphi^2-\frac{1}{2}n^2\pi^2+t)\frac{ddt}{d\zeta^2}$$

$$-2t^2-\frac{\omega dt}{d\zeta}+\frac{2dt^2}{d\zeta^2}+\frac{\varpi x^2}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}+\frac{2x^3\int\omega x^2 d\zeta.}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}$$

COROLLARIA.

I. Hæc cum sit generalis æquatio curvæ, quæ spectatis viribus omnibus juxta vectorem radium, & perpendiculariter ad radium ipsum agentibus a Luna describeretur, patet primo quod si in expressione vectoris radii fiat $c=1$, & motus omnis ad ellipsim illam referatur, quæ sine viribus perturbatricibus, apsidibus immobilibus, describeretur in plano immobili; essent priores æquationis termini $\frac{ddt}{d\zeta^2}+(1-3n^2).t=n^2(\frac{1}{2}+3\varphi.\text{cos}.\,\zeta)-3n^2\varphi^2(1-\frac{1}{4}\text{cos}.\,2\zeta)$ &c., & juxta formulas quas in Probl. XCV. Algebræ exposuimus erueretur $t=\frac{1}{2}n^2\frac{(1-\text{cos}.\sqrt{(1-3n^2)}.\zeta}{1-3n^2}+\frac{3n^2\varphi}{1-3n^2-1}(\text{cos}.\,\zeta-\text{cos}.\sqrt{(1-3n^2)}.\zeta)$ seu proxime $t=-\varphi.\text{cos}.\,\zeta+\varphi.\text{cos}.\sqrt{(1-3n^2)}.\zeta$.

Quod

II. Quod si igitur alii omnes termini, qui simplicem differentiam t involvunt, sive qui ex quantitate $\frac{2x^2 \int \omega x^2 dz}{1 + \frac{1}{2}\varphi^2}$, sive qui ex termino $-2t^2$ possunt exsurgere, in æquatione differentiali satis proxime, ut inferius videbimus, se se invicem compensent; integrata æquatione fiet postmodum radius vector

$x = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \varphi \cdot \text{cos}.\, z + t = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \varphi \cdot \text{cos}.\, \sqrt{(1 - 3n^2)} \cdot z$.

Scilicet qui prior erat radii vectoris terminus $\varphi \cdot \text{cos}.\, z$, quique in ellipsi immobili anomaliæ angulum exhibebat æqualem angulari motui circa focum concepto, evanescet, & loco ipsius novus exsurget terminus $\varphi \cdot \text{cos}.\, \sqrt{(1 - 3n^2)} \cdot z$, atque angulari motui z respondebit anomaliæ angulus $\sqrt{(1 - 3n^2)} \cdot z$: cumque coefficiens $\sqrt{(1 - 3n^2)}$ sit unitate minor, angularis etiam distantia a summa apside fiet minor angulari motu circa focum, & apsides in eamdem plagam ferentur juxta ordinem signorum in consequentia.

III. Si fiat anomaliæ angulus $\sqrt{(1 - 3n^2)} \cdot z = 360^\circ$, erit angularis motus circa focum $z = \frac{360^\circ}{\sqrt{(1 - 3n^2)}}$, atque erit motus utriusque ratio $\sqrt{(1 - 3n^2)} : 1$. Cum sit igitur $n = \frac{27^d\, 7^h\, 43'}{365^d\, 6^h\, 9'} = 0.0748017$, & $n^2 = 0.0055953$, erit $1 - 3n^2 = 0.9832141$, & $\sqrt{(1 - 3n^2)} = 0.99157$, ac fiet $z : z - \sqrt{(1 - 3n^2)} \cdot z = 1 : 0.00843$. Quare cum motus diurnus Lunæ juxta Majeri tabulas sit $13^\circ\, 10'\, 35''$, erit progressus apsidum diebus singulis $6'\, 40''$, qui juxta easdem tabulas $6'\, 40''\, 56'''$ deberet esse; si fractionibus etiam aliis exiguis supputatis, subductisque numeris omnibus statui posset coefficiens secundi æquationis differentialis termini $0.9831714 = c^2$, & $c = 0.99155$, fieret etiam motus diurnus apsidum $6'\, 40''\, 49.5'''$, & motus annuus $40^\circ\, 40'$, proxime ut ferunt Astronomicæ observationes.

SCHOLION.

Qui theoriam lunarem ex legibus gravitatis eruendam sibi assumpserunt summi, ac clarissimi Mathematici sua singuli methodo in eamdem inciderunt æquationem differentialem lunaris orbitæ, quæ in Coroll. I. Probl. II. facilius modo ex prioribus motus notionibus eru-

ta

ta eſt, Eulerus, Alembert, Clairaut, Majerus, Simpſonius, Melander, & Riccatus. Apud Alembertum enim pag. 55. par. I. de Mundi Syſtemate eſt $g^2 = \frac{R^4}{1+3\varphi^2}$, & juxta antecedentes noſtras denominationes eſſe debetet $R = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\varphi^2}$ quam proxime, adeoque eſſet $g^2 = 1 - \varphi^2$. Quo poſito non alia exſurgeret in comparandis æquationibus differentia, quam quod apud nos occurrat terminus $\frac{\omega x^3 dx dz}{g+\int \omega x^3 dz}$ loco $\frac{\omega x^3 dx dz}{g^2+2\int \omega x^3 dz}$: quæ differentia exigua cum ex neglectis quantitatibus inferiorum ordinum pendeat, nihil ad calculi totius progreſſum faciet: etenim ob parvitatem vis perturbatricis ω, & differentiæ z radii vectoris x, in tota calculi ſerie ſupputandus dumtaxat occurret terminus $\omega x^3 dx dz$ ſupra erutus ex æquatione temporis $d\theta = \frac{x^2 dz}{\sqrt{(1-\varphi^2)+\int \omega x^3 dz}}$, quæ nobis, & memoratis Authoribus eſt communis. Æquationes alias magis compoſitas pro generali ſolutione problematis trium corporum ſe ſe attrahentium nupperime authores alii ingenioſiſſimi tradiderunt. Ex iis vero ad ultimas uſque motuum lunarium æquationes cum minime appareat qui progreſſus haberi poſſit, cumque non niſi approximationibus problemata omnia hujus generis ultimo poſſint reſolvi; ut approximationes ſimplicitate, ac brevitate accuratiores efficeremus, poſt indicatam in Coroll. II. Probl. II. communem priorum Authorum reductionem, æquationem differentialem in Probl. III. ad novam formam traduximus, in qua radius vector ad ſextam uſque potentiam aſcendit, & cujus commodum in ſupputando apogæi motu, majoribuſque, & minoribus Lunæ æquationibus determinandis inferius patebit.

CA-

CAPUT SECUNDUM.

DE VIRIUM PERTURBATRICIUM RESOLUTIONE ; ET DE APOGÆI MOTU.

PROBLEMA IV.

DEterminare vires omnes perturbatrices lunaris orbitæ, & quæ juxta vectorem radium diriguntur, & quæ ſunt radio perpendiculares.

Sit $1 : n$ ratio mediorum motuum Lunæ, & Solis, atque inſuper medius Lunæ motus ad motum angularem Terræ ab aphelio ſe habeat ut $1 : m$, & motus Solis ſe habeat ad motum medium nodorum lunaris orbitæ ut $n : p$, ac denique motus Lunæ verus ut antea vocetur z, medius Z, anomalia vera cz, media cZ, & excentricitas terreſtris orbitæ ut antea vocetur δ, lunaris φ. Erit motus medius Solis nZ, angularis Terræ diſtantia ab aphelio mZ, ac dempta æquatione centri erit verus Solis motus quam proxime $nZ - 2\delta . \text{ſin.}\, mZ$. Et quia juxta formulam Probl. IV. Lib. I. eſt
$$Z = z + \frac{2\varphi}{c} . \text{ſin.}\, cz + \frac{3\varphi^2}{4c} . \text{ſin.}\, 2cz \text{ \&c.},$$
in minoribus fractionibus loco $\frac{1}{c}$ ſcribendo unitatem, erit
$$nZ - 2\delta . \text{ſin.}\, mZ = nz + 2\varphi n . \text{ſin.}\, cz + \tfrac{1}{4}\varphi^2 n . \text{ſin.}\, 2cz - 2\delta . \text{ſin.}\, mz,$$
atque in fig. 58. erit diſtantia Lunæ a ſole $STL =$
$$z - nz - 2\varphi n . \text{ſin.}\, cz - \tfrac{1}{4}\varphi^2 n . \text{ſin.}\, 2cz + 2\delta . \text{ſin.}\, mz.$$

His poſitis ſi juxta formulas trigonometricas reſolvantur termini, ob parvitatem quantitatum φ, δ, & n, erit
$$\text{coſ.}\, STL = \text{coſ.}\, (1 - n) . z \mp \delta . \text{coſ.}\, (1 - n \mp m) . z \text{ \&c.}$$
$$\text{coſ.}\, 2STL = \text{coſ.}\, (2 - 2n) . z \mp 2\delta . \text{coſ.}\, (2 - 2n \mp m) . z$$
$$\pm 2\varphi n . \text{coſ.}\, (2 - 2n \mp c) . z + \tfrac{1}{4}\varphi^2 n . \text{coſ.}\, (2c + 2n - 2) . z :$$
& cum motus Solis a nodo ATB, in fig. 57., ſit $nz + pz$, loco productorum coſ. TSs. coſ. $2STL$, & coſ. $2ATB$. coſ. $2STL$ ſimili modo accipiendo dimidium coſinuum ſummæ, ac differentiæ duorum angulorum, neglectiſque aliis inferiorum ordinum fractionibus

bus, posita vi mediocri perturbatrice $\frac{1}{2} n^2 x. (1 - \frac{1}{2} \pi^2)$, ut in Probl. I. Lib. V., fiet vis reliqua juxta vectorem radium exercita

$$\varpi = \frac{9 n^2 x^2}{8 a} . \text{cos.} (1 - n) . z$$
$$+ \frac{1}{2} n^2 x . (1 - \frac{1}{2} \pi^2) . \text{cos.} (2 - 2n) . z$$
$$+ \frac{15 n^2 x^2}{8 a} . \text{cos.} (3 - 3n) . z$$
$$\pm 3 \varphi n^2 x . \text{cos.} (2 - 2n \mp c) . z$$
$$+ \frac{3}{2} \varphi^2 n^2 . \text{cos.} (2c + 2n - 2) . z$$
$$- \frac{1}{2} \delta n^2 x . (1 - \frac{1}{2} \pi^2) . \text{cos.} mz$$
$$- 3 \delta n^2 x (\frac{1}{2} \pm 1) . \text{cos.} (2 - 2n \mp m) . z$$
$$- \frac{9 \delta n^2 x^2}{4 a} (1 \pm \frac{1}{2}) . \text{cos.} (1 - n \mp m) . z$$
$$+ \frac{1}{4} \pi^2 n^2 x . \text{cos.} (2n + 2p) . z$$
$$+ \frac{1}{8} \pi^2 n^2 x . \text{cos.} (2 - 2n \pm 2n \pm 2p) . z .$$

Pariter erit sin. $STL =$ sin. $(1 - n) . z \mp \delta$. sin. $(1 - n \mp m) . z$; & sin. $2 STL =$ sin. $(2 - 2n) . z \mp 2 \delta$. sin. $(2 - 2n \mp m) . z$

$\pm 2 \varphi n$. sin. $(2 - 2n \mp c) z - \frac{1}{2} \varphi^2 n$. sin. $(2c + 2n - 2) . z$.

Quare si in eadem fig. 58. intelligamus Lunam a syzigiarum linea *TS* digressam usque ad *L* retardari actione Solis, & vim ω perpendicularem vectori radio agere in adversam partem, similibus substitutionibus ex posteriori formula Probl. I. Lib. V. eruetur

$$\omega = - \frac{3 n^2 x^2}{8 a} . \text{sin.} (1 - n) . z$$
$$- \frac{1}{2} n^2 x . (1 - \frac{1}{2} \pi^2) . \text{sin.} (2 - 2n) . z$$
$$- \frac{15 n^2 x^2}{8 a} . \text{sin.} (3 - 3n) . z$$
$$\mp 3 \varphi n^2 x . \text{sin.} (2 - 2n \mp c) . z$$
$$+ \frac{3}{2} \varphi^2 n^2 . \text{sin.} (2c + 2n - 2) . z$$
$$+ 3 \delta n^2 x (\frac{1}{2} \pm 1) . \text{sin.} (2 - 2n \mp m) . z$$
$$+ \frac{3 \delta n^2 x^2}{4 a} (1 \pm \frac{1}{2}) . \text{sin.} (1 - n \mp m) . z$$
$$- \frac{1}{8} \pi^2 n^2 x . \text{sin.} (2 - 2n \pm 2n \pm 2p) . z .$$

COROLLARIA

I. Quia, si constantium quantitatum valor consideretur, coefficiens $2 - 2n - c$ a coefficiente secundi æquationis differentialis termini parum differre debet, atque exigua est quantitas $2c + 2n - 2$; ob rationes illas, quas sub finem præmissorum lemmatum attigimus, in terminis argumenti $(2 - 2n - c).\zeta$, & $(2c + 2n - 2).\zeta$ quantitates etiam inferiorum ordinum supputare oportebit. E contra vero cum exiguus coefficiens illius termini, qui pro argumento habet $(2 - 2n + 2c).\zeta$, utraque problematis integratione imminui debeat, in supputandis viribus perturbatricibus negligi omnino poterit.

II. Pariter cum ob lentissimum motum apsidum terrestris orbitæ sit proxime $m = n$, ex binis terminis argumenti $(1 - n \mp m).\zeta$ præcipuus erit qui inferiori signo afficietur. Ex binis etiam terminis argumenti $(2 - 2n \pm 2n \pm 2p).\zeta$, qui afficietur superiori signo dumtaxat in potestatem aliquam radii vectoris ductus, ac debite resolutus binos alios terminos exhibebit argumenti $(2 + 2p - c).\zeta$, & $(2 + 2p - 2c).\zeta$, quorum unus priore, alter vero secunda integratione problematis ob easdem rationes potissimum augebitur.

III. Contra si correctione medii nodorum motus, & mediæ inclinationis lunaris orbitæ adhibita, loco $p\zeta$ scribamus $p\zeta - \frac{1}{4}n.\,\text{sin.}(2+2p).\zeta$, & loco π^2 scribamus $\pi^2\,\overline{(1 + \frac{1}{4}n.\text{cos}.2n\zeta + 2p\zeta)}$, ex posterioribus virium perturbatricium terminis nullum alium eruemus terminum argumenti $2n\zeta + 2p\zeta$, cujus potior ratio, ob parvitatem quantitatis $2n + 2p$, haberi debeat. Quod satis erit hic indicasse ut subsequentium calculorum seriem evolvendo ex se lector facile intelligat cur neglectis quibusdam terminis nonnullos alios ad quantitates usque inferiorum ordinum supputaverimus.

PROBLEMA V.

Expressionem vis perpendicularis in differentiali æquatione substituere.

Si valor radii vectoris x ex tertio, & valor vis perpendicularis ω ex quarto superiore Problemate accipiantur, in expressione quantitatis ωx^3, quæ differentiali æquationi obvolvitur, resolutis de more terminis evadet

$$-\frac{3n^2x^2}{8a}.\text{fin.}(1-n).z = -\frac{3n^2}{8a}.\text{fin.}(1-n).z$$
$$+\frac{15\varphi n^2}{16a}.\text{fin.}(c+n-1).z$$

$$-\tfrac{3}{2}n^2x^4(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\text{fin.}(2-2n).z = -\tfrac{3}{2}n^2.(1+\varphi^2)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\text{fin.}(2-2n).z$$
$$+3n^2(\varphi-\tfrac{1}{4}\varphi^3)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\text{fin.}(2-2n\mp c).z$$
$$+\frac{15}{4}n^2\varphi^2.(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\text{fin.}(2c+2n-2).z$$

$$-3\varphi n^2x^4.\text{fin.}(2-2n-c).z = -3\varphi n^2.\text{fin.}(2-2nc).z$$
$$+6\varphi^2n^2.\text{fin.}(2c+2n-2).z$$

$$+\frac{3\delta}{8a}n^2x^4.\text{fin.}(1-n+m).z = \frac{3\delta n^2}{8a}.\text{fin.}(1-n+m).z$$
$$+\frac{15\varphi\delta n^2}{16a}.\text{fin.}(1-n+m-c).z$$

$$-\tfrac{1}{4}\delta n^2x^4.\text{fin.}(2-2n+m).z = -\tfrac{1}{4}\delta n^2.\text{fin.}(2-2n+m).z$$
$$-\tfrac{1}{2}\varphi\delta n^2.\text{fin.}(2-2n+m-c).z$$

$$+\frac{21}{4}\delta n^2x^4.\text{fin.}(2-2n-m).z = \frac{21}{4}\delta n^2.\text{fin.}(2-2n-m).z$$
$$+\frac{21}{2}\varphi\delta n^2.\text{fin.}(2-2n-m-c).z$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi^2n^2x^4.\text{fin.}(2+2p).z = -\tfrac{1}{2}\pi^2n^2.\text{fin.}(2+2p).z$$
$$-\tfrac{1}{4}\varphi\pi^2n^2.\text{fin.}(2+2p-c).z$$
$$-\frac{15}{16}\varphi^2\pi^2.\text{fin.}(2+2p-2c).z.$$

Cum itaque fumma omnium finuum fit finus verfus per coefficientem variabilis anguli divifus, fi F denotet fummam coefficientium omnium conftantium inverfo figno acceptorum, erit

$$\int\omega x^2dz = F + \frac{3n^2}{8a.(1-n)}.\text{cof.}(1-n).z$$
$$+\tfrac{1}{4}n^2.\left(\frac{1+\varphi^2}{1-n}\right)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\text{cof.}(2-n).z$$
$$+\frac{5n^2}{8a(1-n)}.\text{cof.}(3-3n).z$$

$$+\frac{3n^2(\phi-\frac{1}{8}\phi^3)}{2-2n\mp c}(1-\tfrac{3}{2}\pi^2).\,\text{cos}.(2-2n\mp c).z$$
$$+3\phi n^2.\,\text{cos}.(2-2n-c).z$$
$$-\frac{15\phi n^2}{16a(c+n-1)}.\,\text{cos}.(c+n-1).z$$
$$-\frac{3\phi^2 n^2}{16}\left(\frac{10+19n}{c+n-1}\right)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\,\text{cos}.(2c+2n-2).z$$
$$-\frac{3\delta n^2}{8a}.\,\text{cos}.(1-n+m).z$$
$$-\frac{15\phi\delta n^2}{16a(1-c)}.\,\text{cos}.(1-m+m-c).z$$
$$-\frac{3\delta n^2}{4.(2-n)}.\,\text{cos}.(2-2n+m).z$$
$$-\frac{21\delta n^2}{4(2-3n)}.\,\text{cos}.(2-2n-m).z$$
$$+\frac{3\phi\delta n^2}{2(2-n-c)}.\,\text{cos}.(2-2n+m-c).z$$
$$-\frac{21\phi\delta n^2}{2(2-3n-c)}.\,\text{cos}.(2-2n-m-c).z$$
$$+\frac{3}{16}\pi^2 n^2.\,\text{cos}.(2+2p).z$$
$$+\tfrac{3}{4}\phi\pi^2 n^2.\,\text{cos}.(2+2p-c).z$$
$$+\frac{15\phi^2\pi^2 n^2}{32(1+p-c)}.\,\text{cos}.(2+2p-2c).z.$$

COROLLARIA.

I. Ut quantitas conſtans F numeris exprimatur; in primis aſſumi poterit medius nodorum motus $p = \frac{3}{4}n^2$. Deinde, ut in locis aliis præcedentibus, ſtatuendum erit $n = m = 0.0748017$, $n^2 = 0.0055953$, $\phi = 0.0547$, $\delta = 0.0168$, $\pi = 0.0898$, $\frac{1}{a} = \frac{9''}{3438''} = \frac{1}{382}$. Denique ob tarditatem motus apogæi Lunæ ſtatui etiam poſſet quam proxime $c = 1$. Tum enim qui exſurget valor quantitatis quæſitæ F ad verum quam proxime accedet, ac poſtmodum apogæi motu, & valore coefficientis c ac-

accuratius supputato; posset omnino corrigi. At cum correctio hujusmodi exigua sit, ne approximationes iterum reassumpto calculo repetamus, juxta observationes, & ad normam Coroll. III. Probl. III. statuemus $c = 0.99155$, & numeris hisce omnibus substitutis suo loco singulis habebimus

$$
\begin{aligned}
\int \omega x^3 dz = & -0.0051615 + 0.00000594 \,.\, \text{cos}\,(1-n).z \\
& + 0.0045313 \,.\, \text{cos}\,(2-2n).z \\
& + 0.00001 \,.\, \text{cos}\,(3-3n).z \\
& + 0.001133067 \,.\, \text{cos}\,(2-2n-c).z \\
& + 0.0003216 \,.\, \text{cos}\,(2-2n+c).z \\
& - 0.0000113 \,.\, \text{cos}\,(c+n-1).z \\
& - 0.000540333 \,.\, \text{cos}\,(2c+2n-2).z \\
& - 0.0000015 \,.\, \text{cos}\,(1-n+m-c).z \\
& + 0.0000366 \,.\, \text{cos}\,(2-2n+m).z \\
& - 0.000278 \,.\, \text{cos}\,(2-2n-m).z \\
& - 0.0000688 \,.\, \text{cos}\,(2-2n-m-c).z \\
& + 0.000008 \,.\, \text{cos}\,(2-2n+m-c).z \\
& + 0.000008 \,.\, \text{cos}\,(2+2p).z \\
& + 0.0000018 \,.\, \text{cos}\,(2+2p-c).z \\
& + 0.000005 \,.\, \text{cos}\,(2+2p-2c)
\end{aligned}
$$

PROBLEMA VI.

Iisdem positis Apogæi lunaris motum invenire.

Si valor quantitatis $\int \omega x^3 dz$ ex Problemate superiore accipiatur ducanturque termini omnes in alios terminos, qui radii vectoris cubum x^3, juxta Probl. II., exprimunt, & eadem semper ratione, ope expressionum trigonometricarum, producta cosinuum omnium resolvantur, posito brevitatis gratia $\frac{10+19n}{8(c+n-1)} = k$, erit

$$
\begin{aligned}
\frac{2x^3 \int \omega x^3 dz}{1+\frac{1}{2}\varphi^2} = & \frac{2F}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}\left(1+3\varphi.\text{cos}\,cz+\overline{3-\tfrac{1}{2}\varphi^2}\,\iota.+3\iota^2\right) \\
& + \frac{3n^2}{4a}\left(\frac{1-\frac{1}{2}\varphi^2}{1-n}\right)\text{cos}\,(1-n).z \\
& + \tfrac{1}{2}n^2\left(1-\tfrac{1}{2}\pi^2\right)\left(\frac{1+\varphi^2}{1-n}+6\varphi^2.\overline{n+\frac{1}{2-2n+c}+\frac{1}{2-2n-c}}\right).c.(2-2n).z
\end{aligned}
$$

+

$$+\frac{5n^2}{4a(1-n)}\cdot\text{cos}.(3-3n).z$$

$$+3n^2\varphi(1-\tfrac{1}{2}\pi^2)\left(\frac{3}{4-4n}+\frac{2}{2-2n-c}+3n-\tfrac{1}{2}\varphi^2 k\right).c.(2-2n-c).z$$

$$+3n^2\varphi(1-\tfrac{1}{2}\pi^2)\left(\frac{3}{4-4n}+\frac{2}{2-2n+c}\right).\text{cos}.(2-2n+c).z$$

$$-\frac{3n^2\varphi}{8a}\left(\frac{5}{c+n-1}-\frac{3}{1-n}\right).\text{cos}.(c+n-1).z$$

$$-3n^2\varphi^2(1-\tfrac{1}{2}\pi^2)\left(k-\frac{3}{4-4n}-\frac{3}{2-2n-c}-3n\right).c.(2c+2n-2).z$$

$$-\frac{3n^2\delta}{4a}.\text{cos}.(1-n+m).z$$

$$+\frac{3n^2\delta}{4-2n}.\text{cos}.(2-2n+m).z$$

$$-\frac{21n^2\delta}{4-6n}.\text{cos}.(2-2n-m).z$$

$$-\tfrac{1}{2}n^2\varphi\delta.\left(\frac{1}{2-n-c}+\frac{3}{4-2n}\right).\text{cos}.(2-2n+m-c).z$$

$$-21n^2\varphi\delta\left(\frac{1}{2-3n-c}+\frac{3}{8-12n}\right.\text{.cos}.(2-2n-m-c).z$$

$$+\tfrac{1}{2}n^2\pi^2.\text{cos}.(2+2p).z$$

$$+\frac{33}{16}n^2\pi^2\varphi.\text{cos}.(2+2p-c).z$$

$$+\frac{15n^2\pi^2\varphi^2}{16(1+p-c)}.\text{cos}.(2+2p-2c).z$$

His positis si in priori seriei termino substituantur numeri iidem, qui supra, & sit

$$\frac{2F}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}(1+3\varphi.\text{cos}.cz+\overline{3-\tfrac{1}{2}\varphi^2}).t=$$

$$-0.010308(1+3\varphi.\text{cos}.cz+\overline{3-\tfrac{1}{2}\varphi^2})t,$$

constanti termino -0.010308 jungendo terminos alios $\frac{1}{2}n^2-3n^2\varphi^2$, qui in postrema æquationis differentialis reductione in Probl. III. occurrebant, erunt priores æquationis ejusdem termini

ddt

$$\frac{ddt}{dz^2} + (1 - 3n^2).t = -0.007527 - 0.010308\,(3 - \tfrac{1}{2}\varphi^2).t - 2t^2$$

$$+ (c^2 - 1 + 3n^2 - (4 - c^2 - 15n^2 t)\,t.)\frac{\varphi.\text{cof.}\,cz}{1 + \frac{1}{2}\varphi^2}$$

$$- 0.030924.\varphi.\text{cof.}\,cz - \tfrac{1}{2}\varphi^2 t.\,\text{cof.}\,2cz\ \&c.$$

Quod ſi denique pro eliminando conſtanti termino fiat

$$t = -\frac{0.007527}{1 - 3n^2} + T = -0.0076555. + T$$

$$-2t^2 = +0.030622.T - 2T^2,$$

ſupputatis viribus omnibus, & quæ ſunt radio perpendiculares, & quæ juxta vectorem radium diriguntur, ſecundus æquationis differentialis terminus, qui apogæi lunaris motum exhibet, & priores alii termini ſubſequentes erunt ordine ut ſequitur

$$\frac{ddT}{dz^2} + 0.98347.T = -0.00004727.\text{cof.}\,cz - \tfrac{1}{2}\varphi^2 T.\text{cof.}\,2cz - 2T^2$$

$$+ (c^2 - 1 + 3n^2 - (4 - c^2 - 15n^2).T).\frac{\varphi.\text{cof.}cz}{1 + \frac{1}{2}\varphi^2}\ \&c.$$

COROLLARIA.

I. Primo igitur cum $\omega x^3 dz$, juxta Probl. I., actionem vis perpendicularis exprimat, atque ex ipſius quantitatis evolutione pro priori parte differentiæ quæſitæ t oriatur terminus -0.0076555; patet actione virium omnium perturbatricium diſtantiam mediocrem Lunæ a Terra paulo minorem effici; quam eſſet in ellipſi illa, quæ ſine hujuſmodi vis projectilis variatione, ſola gravitate in Terram, deſcriberetur. Ita quidem ut ſi ſit b ſemiaxis major ellipſeos, t differentia omnis vectoris radii, quæ ob perturbatrices vires inducitur, -0.0076555 pars conſtans ipſius differentiæ, T pars alia, quæ ſolis quantitatibus variabilibus exprimitur; univerſim radius vector eſſe debeat

$$x = b - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \varphi.\text{cof.}\,cz\ \&c. + t$$
$$= b - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \varphi.\text{cof.}\,cz\ \&c. - 0.0076555 + T.$$

Quare unitatis loco accipiendo quantitatem omnem conſtantem $b - 0.0076555$, quæ vere media diſtantia eſt, & differentiæ t ex con ſtanti, & variabili termino compoſitæ ſubſtituendo terminum

tan-

tantum variabilem T, resolutio quantitatum x, x^2, x^3 &c. manebit eadem, quæ in Probl. II., & III. assumpta est, eaque orietur tantum differentialis æquationis variatio, quam in præsenti Problema indicavimus.

II. Deinde reassumpto calculo Coroll. I. Probl. III., & posito primum $c = 1$, scilicet motu omni ad primitivam ellipsim illam relato, quæ lunari orbitæ est propior, & quæ eadem velocitate media projectionis viribus centripetis decrescentibus in duplicata ratione auctarum distantiarum describeretur in plano immobili; evanescet rursus ex æquatione integrata, atque ex vectoris radii expressione terminus $\varphi . \cos. z$, atque ipsius loco novus exsurget terminus $\varphi . \cos. \sqrt{(0.98347)} . z = \varphi . \cos. 0.9917 . z$. Posito autem $c = 0.9917$, & $1 - c = 0.0083$, annuus apogæi motus $\frac{15}{845}$ minor prodibit, quam ferant Astronomicæ observationes, ut in Coroll. III. Probl. III. dictum fuit. Et quidem cum dissensus hic omnis calculi, & observationum ex differentia tantum 0.0003 in supputando coefficiente secundi termini oriatur: coefficiens autem hujusmodi ex tot simul elementis, reductionibusque, ac correctionibus aliis pendeat, atque hæ rursus pendeant ex quantitatibus φ, π, δ &c: quarum valoribus paululum immutatis differentia omnis potest evanescere; superioribus calculis problemati satis esse factum censebimus; inferius autem ut scrupulis, ac dubiis omnibus aditum præcludamus priores eosdem æquationis differentialis terminos hoc ordine disponemus

$$\frac{ddT}{dz^2} + 0.9831714 . T = -0.0004727 . \cos. cz - 0.0003 . T - 2T^2 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 T . \cos. 2cz$$
$$+ (c^2 - 1 + 3n^2 - (4 - c^2 - 15n^2) . T) . \frac{\varphi . \cos. cz}{1 + \frac{1}{2}\varphi^2} \text{ \&c.}$$

III. Ita disposita æquatione cum coefficiens secundi termini observationibus apogæi motus optime respondeat, in termino alio exiguo $- 0.0003$. T' satis erit valorem differentiæ variabilis T prioribus approximationibus erutum substituere, & calculum ea ratione prosequi, quam in terminis $- 2T^2 + \frac{\omega\, dT}{dz}$ &c. servabimus.

Ge-

Genesim autem coefficientis ejusdem considerando manifestum erit coefficientem omnem, atque inde prodeuntem apogæi lunaris motum, non ex termino tantum $(1 - 3n^2).T$, quem vires perturbatrices juxta vectorem radium agentes exhibent, sed ex binis etiam aliis terminis pendere, qui proxime se se destruunt, quique exsurgunt ex quantitatibus $\frac{2x^3 \int \omega x^3 dz}{1 + \frac{1}{2}\varphi^2}$, & $-2t^2$. Prior autem terminus expressionem involvit virium perpendicularium radio vectori lunaris orbitæ: alter ex differentia oritur terminorum x^2, & $\frac{x^3}{1 - \varphi^2}$, adeoque etiam ex differentia gravitatis, ac vis centrifugæ, ut patet ex Coroll. II. Probl. I., & ex Probl. III. Itaque vires omnes Lunam sollicitantes ad promovendum apogæi locum conducent, & quæ juxta radium diriguntur, & quæ sunt radio perpendiculares, aliis autem viribus proxime se compensantibus apogæi motus expressioni mediocris vis perturbatricis juxta vectorem radium agentis fere omnis respondebit.

IV. Posito etiam $c^2 = 0.9831714$, & numeris aliis ut antea substitutis fiet $(c^2 - 1 + 3n^2).\varphi = 0.0000273$, atque ita terminus argumenti cz in differentiali æquatione supererit tantum $-0.0004454.\text{cos}.\,cz$: is autem, ut inferius videbimus, aliis ejusdem generis terminis, qui ex evolutione quantitatum $2x^3 \int \omega x^3 dz$, π, x^4 &c. oriuntur, sic imminuetur, ut habita approximationum ratione, in differentiali æquatione debeat omnino negligi. Hoc denique termino omisso, & præcedentibus aliis substitutionibus statuendo $-(4 - c^2 - 15n^2 - \frac{15}{2}.\varphi^2).\varphi T.\text{cos}.\,c\zeta = -2.91046.\varphi T.\text{cos}.\,c\zeta$, ac $3\varphi^2 + \frac{1}{2}n^2\pi^2 = 0.009179$, & loco $\frac{2x^3 \int \omega x^3 dz}{1 + \frac{1}{2}\varphi^2}$ intelligendo alios omnes seriei terminos subsequentes præter primum, cujus rationem jam in hoc problemate habuimus, differentialis æquatio Probl. III. hanc aliam formam induet

$$\frac{ddT}{dz^2} + c^2 T = \frac{\varpi x^4}{1 + \frac{1}{2}\varphi^2} + \frac{2x^3 \int \omega x^3 dz}{1 + \frac{1}{2}\varphi^2} - 0003.T - 2T^2$$

$$+(\text{fin.}\, cz + \varphi . \text{fin.}\, 2cz)\left(\varphi \omega c x^4 - 4\varphi c . \frac{dT}{dz}\right)$$

$$-2.9146 . \varphi T . \text{cof.}\, cz - \tfrac{1}{2}\varphi^2 T . \text{cof.}\, 2cz + \frac{\omega dT}{dz}$$

$$-(\varphi . \text{cof.}\, cz + \tfrac{1}{2}\varphi^2 . \text{cof.}\, 2cz - 0.009179 + T) . \frac{ddT}{dz^2} + \frac{2\, dT^2}{dz^2} .$$

SCHOLION.

Hac igitur methodo, ac ratione inquirendi aberrationes Lunæ ab orbita elliptica, quæ ob vires omnes perturbatrices Solis induci possunt, æquatione differentiali sic resoluta ut radius vector ad sextam usque potestatem in iis terminis ascendat, qui vim mediocrem juxta vectorem radium exercitam involvunt, illud inprimis commodi habuimus quod vis eadem apogæi motum observationibus satis conformem illico exhibeat, alii autem termini analogi, & qui ex vi perpendiculari, & qui ex differentia gravitatis, ac vis centrifugæ exsurgunt, proxime se se destruant. Et quidem differentia illa exigua $-0.0003\, T$ facile evanesceret æquatione omni differentiali in Probl. III. rursus divisa per constantem quantitatem, quæ coefficientem secundi termini tribus decem millesimis partibus majorem faciat. Ita enim apogæi motus cum observationibus penitus consentiet, aliorum vero coefficientium, & æquationum inde prodeuntium nulla orietur variatio, quæ possit sensibilis evadere. Ut vero nullus jam scrupulus in re difficillima supersit, in qua summorum Geometrarum studia, atque inventa non penitus aliis Geometris satisfacere visa sunt, posteriorem selegimus æquationis differentialis dispositionem. Ita enim, salvo apogæi motu, in termino exiguo $-0.0003T$ valorem differentiæ T ex prioribus approximationibus elicitum substituendo, patebit postmodum non nisi evectionis æquationem 6″ circiter minui oportere, aliosque terminos nova hac correctione sensibiliter non immutari. Hac autem differentiæ primo erutæ substitutione exiguos omnes æquationis differentialis terminos posse corrigi, & verum differentiæ ipsius valorem propius erui, apud Geometras minime in dubium revocabimur.

CA-

CAPUT TERTIUM.

DE ÆQUATIONE DIFFERENTIALI, ET RADIO VECTORE LUNARIS ORBITÆ.

PROBLEMA VII.

Æquationem differentialem lunaris orbitæ per partes singulas resolvere.

Si qua ratione terminus $\frac{2x^3 \int \varpi x^3 dz}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}$ in superiore problemate fuit evolutus, in termino etiam ϖx^3 valor quantitatis ϖ ex Probl. IV., & valor potestatum x^3, x^2 ex Probl. III. accipiatur, statuaturque

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}n^2 x^2 . \text{cof.}(2-2n).z = &\tfrac{1}{2}n^2(1+\tfrac{3}{2}\varphi^2).\text{cof.}(2-2n).z\\ &+\tfrac{1}{2}n^2\varphi.\text{cof.}(2-2n\pm c).z\\ &+\frac{63}{8}n^2\varphi^2.\text{cof.}(2c+2n-2).z\end{aligned}$$

terminis aliis simili modo reductis, atque collectis fiet

$$\begin{aligned}\frac{\varpi x^3}{1+\frac{1}{2}\varphi^2} = &\frac{9n^2}{8a}(1+\frac{11}{2}\varphi^2).\text{cof.}(1-n).z\\ &+\tfrac{1}{2}n^2(1+3\varphi^2)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\text{cof.}(2-2n).z\\ &+\frac{15n^2}{8a}.\text{cof.}(3-3n).z\\ &+\tfrac{1}{2}n^2\varphi(1-\tfrac{1}{3}n)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\text{cof.}(2-2n\pm c).z\\ &+\frac{63n^2\varphi}{16a}.\text{cof.}(c+n-1).z\\ &+\frac{9n^2\varphi^2}{8}(7+9n)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\text{cof.}(2c+2n-2).z\\ &+\tfrac{1}{2}n^2\delta(1+3\varphi^2)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\text{cof.}\,m\,z\\ &-\tfrac{1}{2}n^2\varphi\delta.\text{cof.}(c\pm m).z\\ &-\frac{9n^2\delta}{8a}.\text{cof.}(1-n+m).z\\ &+\tfrac{1}{4}n^2\delta.\text{cof.}(2-2n+m).z\end{aligned}$$

$$-\frac{21}{4} n^2 \delta . \text{cos.} (2 - 2n - m) . z$$
$$+ \frac{9}{4} n^2 \varphi \delta . \text{cos.} (2 - 2n + m - c) . z$$
$$- \frac{63}{4} n^2 \varphi \delta . \text{cos.} (2 - 2n - m - c) . z$$
$$+ \frac{1}{4} n^2 \pi^2 (1 - \tfrac{1}{2} \varphi^2) . \text{cos.} (2n + 2p) . z$$
$$+ \frac{1}{8} n^2 \pi^2 . \text{cos.} (2 + 2p) . z$$
$$+ \frac{9}{8} n^2 \varphi \pi^2 . \text{cos.} (2 + 2p - c) . z$$
$$+ \frac{63}{32} n^2 \varphi^2 \pi^2 . \text{cos.} (2 + 2p - 2c) . z .$$

Iisdem etiam ſubſtitutionibus, eademque ſemper ratione eruetur

$$\omega \varphi c x^4 . \text{ſin.} cz = \mp \tfrac{1}{4} n^2 c \varphi (1 - \tfrac{1}{2} \pi^2) . \text{cos.} (2 - 2n \mp c) . z .$$
$$+ 3 n^2 \varphi^2 . \text{cos.} (2 - 2n) . z$$
$$- \frac{3 n^2 c \varphi}{16 a} . \text{cos.} (c + n - 1) . z$$
$$- \tfrac{1}{2} n^2 c \varphi^2 (\tfrac{1}{4} + n) . \text{cos.} (2c + 2n - 2) . z$$
$$- \tfrac{3}{8} n^2 \varphi \delta . \text{cos.} (2 - 2n + m - c) . z$$
$$+ \frac{21}{8} n^2 \varphi \delta . \text{cos.} (2 - 2n - m - c) . z .$$
$$- \frac{3}{16} n^2 \pi^2 \varphi . \text{cos.} (2 + 2p - c) . z$$

$$\omega c \varphi^2 x^4 . \text{ſin.} 2cz = - \tfrac{1}{4} n^2 c \varphi^2 (1 - \tfrac{1}{2} \pi^2) . \text{cos.} (2c + 2n - 2) . z$$
$$- \frac{3}{16} n^2 \pi^2 \varphi^2 . \text{cos.} (2 + 2p - 2c) . z .$$

Ut vero exiguorum etiam terminorum habeatur ratio; in quibus occurrit eadem, quæ quæritur, differentia radii elliptici, & veri vectoris radii, ducta in exiguas quantitates φ, φ^2, aut n^2; loco differentiæ quæſitæ T ex priorum terminorum integratione aſſumemus terminum quemcumque formæ $\mu . \text{cos.} \Delta z$, ut ſit $dT = - \mu \Delta . \text{ſin.} \Delta z . dz$, & $ddT = - \mu \Delta^2 . \text{cos.} \Delta z . dz^2$. Sic fiet

$$- 2.91046 . \varphi T . \text{cos.} cz = - 1.45523 \mu \varphi . \text{cos.} (\Delta \pm c) . z$$
$$- 4 \varphi c . \text{ſin.} cz \frac{dT}{dz} = \mp 2 c \mu \varphi \Delta . \text{cos.} (\Delta \pm c) . z$$
$$- \varphi . \text{cos.} cz . \frac{ddT}{dz^2} = \tfrac{1}{2} \mu \varphi \Delta^2 . \text{cos.} (\Delta \pm c) . z$$

—

$$-\tfrac{1}{2}\varphi^2 T.\,\text{cof.}\,2cz = -\tfrac{1}{4}\mu\varphi^2.\,\text{cof.}\,(\Delta \pm 2c).z$$

$$-4\varphi^2.\,\text{fin.}\,2cz.\frac{dT}{dz} = \mp 2\mu\varphi^2\Delta.\,\text{cof.}\,(\Delta \pm 2c).z$$

$$-\tfrac{1}{2}\varphi^2.\,\text{cof.}\,2cz.\frac{ddT}{dz^2} = \tfrac{1}{4}\mu\varphi^2\Delta^2.\,\text{cof.}\,(\Delta \pm 2c).z.$$

Ex terminis etiam $-2T^2 + \frac{2dT^2}{dz^2} - \frac{T.ddT}{dz^2}$ eruetur terminus alius $-\mu^2(1 + \tfrac{1}{2}\Delta^2).\,\text{cof.}\,2\Delta z$: neglectoque ob parvitatem $\frac{\omega dT}{dz}$, & terminis omnibus fimul collectis, atque ordinatis æquatio differentialis Coroll. IV. Probl. VI. in hanc aliam refolvetur $\frac{ddT}{dz^2} + c^2T$

$$= \frac{3n^2}{4a}\left(\frac{1-\tfrac{1}{2}\varphi^2}{1-n} + \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{11}{2}\varphi^2\right)\right).\,\text{cof.}\,(1-n).z$$

$$+\tfrac{1}{2}n^2\left(\frac{1+\varphi^2}{1-n} + 1 + \varphi^2\left(3 + 8n + \frac{6}{2-2n-c} + \frac{6}{2-2n+c}\right)\right)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\text{c.}(2-2n).z$$

$$+\frac{25n^2}{8a}.\,\text{cof.}\,(3-3n).z$$

$$+3n^2\varphi\left(\tfrac{1}{2} + \frac{3}{4-4n} + \frac{2}{2-2n-c} - \tfrac{1}{4}c + 3n - \tfrac{1}{2}\varphi^2 k\right)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\text{cof.}(2-2n-c).z$$

$$+3n^2\varphi\left(\tfrac{1}{2} + \frac{3}{4-4n} + \frac{2}{2-2n+c} + \tfrac{1}{4}c\right)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\,\text{cof.}\,(2-2n+c).z$$

$$-\frac{3n^2\varphi}{8a}\left(\frac{5}{c+n-1} - 13\right).\,\text{cof.}\,(c+n-1).z$$

$$-3n^2\varphi^2\left(k + \frac{7c}{8} - \frac{21}{8} - \frac{3}{4-4n} - \frac{3}{2-2n-c} - \frac{47n}{8}\right)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\,\text{cof.}(2c+2n-2).z$$

$$-\tfrac{1}{2}n^2\delta(1 + 3\varphi^2)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\,\text{cof.}\,mz$$

$$-\tfrac{1}{2}n^2\varphi\delta.\,\text{cof.}\,(c+m).z$$

$$-\tfrac{1}{2}n^2\varphi\delta.\,\text{cof.}\,(c-m).z$$

$$-\frac{15n^2\delta}{8a}.\,\text{cof.}\,(1-n+m).z$$

$$+\tfrac{1}{4}n^2\delta\left(\frac{4-n}{2-n}\right).\,\text{cof.}\,(2-2n+m).z$$

$$-\frac{21}{4} n^2 \delta \left(\frac{4 - 3n}{2 - 3n}\right) . \operatorname{cos}. (2 - 2n - m) . z$$
$$+ \tfrac{1}{2} n^2 \varphi \delta \left(\frac{1}{2 - n - c} + \frac{3}{4 - 2n} + \frac{5}{4}\right) . \operatorname{cos}. (2 - 2n + m - c) . z$$
$$- 21\, n^2 \varphi \delta \left(\frac{1}{2 - 3n - c} + \frac{3}{8 - 12n} + \frac{5}{8}\right) . \operatorname{cos}. (2 - 2n - m - c) . z$$
$$+ \tfrac{3}{4} n^2 \pi^2 (1 - \tfrac{1}{2} \pi^2) . \operatorname{cos}. (2n + 2p) . z$$
$$+ \tfrac{3}{4} n^2 \pi^2 . \operatorname{cos}. (2 + 2p) . z$$
$$+ 3 n^2 \varphi^2 \pi^2 . \operatorname{cos}. (2 + 2p - c) . z$$
$$+ \frac{3}{16} n^2 \varphi^2 \pi^2 \left(\frac{5}{1 + p - c} + 9 \tfrac{1}{2}\right) . \operatorname{cos}. (2 + 2p - 2c) . z$$
$$+ \mu \varphi (\tfrac{1}{2} \Delta^2 \mp 2 c \Delta - 1.45523) \operatorname{cos}. (\Delta \pm c) . z$$
$$+ \mu \varphi^2 (\tfrac{5}{4} \Delta^2 \mp 2 \Delta - \tfrac{1}{4}) \operatorname{cos}. (\Delta \pm 2c) . z$$
$$- 0.009179 . \mu \Delta^2 . \operatorname{cos}. \Delta z - \mu^2 (1 + \tfrac{1}{2} \Delta^2) . \operatorname{cos}. 2 \Delta z .$$

COROLLARIA.

I. Novemdecim priores, potioresque æquationis totius termini pertinent ad formam illam, cujus accurate integrandæ methodum in Probl. XCV. Algebræ jam exposuimus. Termini autem quatuor posteriores, cum sint exigui, ad eamdem formam facile reducentur, si valor differentiæ vectoris radii ex priorum omnium terminorum integratione erutus in ipsis terminis posterioribus qua indicavimus ratione substituatur, ac deinde reassumpto calculo priores termini, posterioresque, alii ex aliis, corrigantur, ut moris est in seriebus infinitis. Et cum novæ hujusmodi correctiones reassumpto calculo minores fiant, nec nisi valde exiguæ sint omnes, ita ad verum vectoris radii valorem accedere quisque poterit quantum voluerit.

II. Ex ipsa vero, qua coefficientes simul collegimus, ratione manifestum est, quæ in distinguendis classibus, atque ordinibus, superioribus, & inferioribus quantitatum omnium sit difficultas. Scilicet cum quantitates exiguæ φ, δ, π, n, $\frac{1}{a}$ ejusdem ordinis censeri debeant, non tamen ita exiguæ sunt singulæ, ut ob coefficientium

tium varietatem inferioris etiam ordinis dimenſio quantitatem conſtituat ordinis non ſuperioris. Quæ cum difficultas ſpeciebus numeros ſubſtituendo evaneſcat, cumque ita quantitates illæ dumtaxat negligi certo poſſint, quæ decimales inferiorum ordinum conſtituunt; ut totam calculi ſeriem, apud authores alios ſuppreſſam, exponamus per partes ſingulas, ſpeciebus decimales numeros ſubſtituemus, ut etiam in Corollario Probl. V. præſtitimus.

PROBLEMA VIII.

Æquationis ejuſdem integratione definire vectorem radium lunaris orbitæ.

Calculi ſatis moleſti ſeriem pro duobus precipuis terminis exſcribemus argumenti $(2-2n).\zeta$, & $(2-2n-c).\zeta$. Et primo quidem ſi pro ſpeciebus c, n, φ, π iidem numeri ſubſtituantur, quos in corollario eodem Probl. V. indicavimus, poſito $c^2-(2-2n)^2=-2.440796$, & $c^2-(2-2n-c)^2=0.245554$, juxta Probl. XCV. Algebræ priori integratione prodibit

$$T=\frac{0.01773861}{-2.440796}.\text{coſ.}(2-2n).\zeta+\frac{0.004130097}{0.245554}.\text{coſ.}(2-2n-c).\zeta.$$

Dinde poſito $\mu=-\dfrac{0.01773861}{2.440796}=-0.00726755$, & $\Delta=2-2n=1.8503966$, qua ſupra innuimus correctionis methodo evadet

$$\frac{-0.009179}{-2.440796}.\mu\Delta^2.\text{coſ.}\Delta\zeta=-0.00009358.\text{coſ.}(2-2n).\zeta,$$

ac fiet primus integratæ æquationis terminus $-0.00736113.\text{c.}(2-2n).\zeta$,
Poſito etiam $\Delta=2-2n$, & $\mu=-0.00736113$, fiet
$\mu\varphi(\frac{1}{2}\Delta^2+2c\Delta-1.45523).\text{c.}(\Delta-c).\zeta=-0.0015809297.\text{c.}(2-2n-c).z$, atque exceſſum ſuperioris numeri 0.004130097 dividendo per 0.245554 pro coefficiente integrati termini habebimus 0.0103813, & quia poſito $\mu=0.0103813$, & $\Delta=2-2n-c=0.8588466$ prodit $\dfrac{-0.009179}{0.245554}.\mu\Delta^2=-0.0002862$, erit totus hujuſmodi terminus
$0.0100951.\text{coſ.}(2-2n-c).z.$

At rurſus poſito $\mu=0.0100951$, & $\Delta=2-2n-c$, ex termino

μφ

$\mu\varphi(\frac{1}{2}\Delta^2 - 2c\Delta - 1.45523).\cos.(\Delta + c).z$ alius in differentiali æquatione exſurget rerminus $- 0.001540422.\cos.(2 - 2n).z$: eoque per $- 2.440796$ diviſo, æquationi integratæ accedet $0.00063112.\cos.(2 - 2n).z$, ac fiet denuo correctus argumenti hujus terminus $- 0.00673.\cos.(2 - 2n).z$. Qua vero ratione ex priori termino $- 0.00736113.\cos.(2 - 2n).z$ in æquatione differentiali eruebatur terminus $- 0.0015809297.\cos.(2 - 2n - c).z$, eadem etiam ex termini prioris correctione $0.00063112.\cos.(2 - 2n).z$ eruetur terminus alius $0.00013554.\cos.(2 - 2n - c)z$: ac ſimili modo integrando, & diviſione coefficientis per 0.245554 facta, integrali æquationi accedet terminus $0.0005519.\cos.(2 - 2n - c).z$: & reaſſumpta ſimiliter præcedenti alia correctione, terminum hunc ipſum minuendo partibus $\frac{2862}{106470}$ fiet totus argumenti ejuſdem terminus $0.010632.\cos.(2 - 2n - c)z$

Quod ſi continuato calculo aſſumamus $\mu = -0.00673$, & $\Delta = 2 - 2n$, fiet

$$\mu\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta^2 - 2c\Delta - 1.45523).\cos.(\Delta + c).z = 0.0012712.\cos.(2 - 2n + c).z$$

$$\mu\varphi^2(\tfrac{1}{4}\Delta^2 + 2\Delta - \tfrac{1}{4}).\cos.(\Delta - 2c).z = -0.00007665.\cos.(2c + 2n - 2).z:$$

ac pariter aſſumendo $\mu = 0.010632$, & $\Delta = 2 - 2n - c$ prodibit

$$\mu\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta^2 + 2c\Delta - 1.45523).\cos.(\Delta - c).z = 0.0003588.\cos.(2 - c + 2n - 2).z$$

$$\mu\varphi^2(\tfrac{1}{4}\Delta^2 - 2\Delta - \tfrac{1}{4}).\cos.(\Delta + 2c).z = -0.0000727\cos.(2 - 2n + c).z:$$

Cum igitur binis aliis coefficientibus terminorum ejuſdem nominis ex æquatione differentiali ſuperioris problematis acceptis, ac ſpeciebus ſingulis ut antea in numeros converſis ſit

$$3n^2\varphi\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4 - 4n} + \frac{2}{2 - 2n + c} + \frac{1}{4}c\right)(1 - \tfrac{1}{2}\pi^2) = 0.00298329$$

$$-3n^2\varphi^2\left(k + \frac{7c}{8} - \frac{21}{8} - \frac{3}{4 - 4n} - \frac{3}{2 - 2n - c} - \frac{47n}{8}\right)(1 - \tfrac{1}{2}\pi^2) = -0.000751134$$

jungendo ſimul coefficientes, & pro habenda integratione terminum argumenti $(2 - 2n + c).z$ dividendo per $c^2 - (2 - 2n + c)^2 = -7.0935$, terminum vero argumenti alterius $(2c + 2n - 2).z$ per $c^2 - (2c + 2n - 2)^2 = 0.96556$, habebimus in æquatione integrali duos alios terminos

$$-0.0005895.\cos.(2 - 2n + c).z - 0.0004857.\cos.(2c + 2n - 2).z.$$

Ex his autem poſterioribus terminis integralis ipſius æquationis, atque ex aliis æquationis differentialis terminis $\mu\varphi$

$\mu\varphi(\frac{1}{2}\Delta^2 \mp 2c\Delta - 1.45523).\cos.(\Delta \pm c).z$, & $\mu\varphi^2(\frac{1}{4}\Delta^2 \mp 2\Delta - \frac{1}{4})\cos.(\Delta \pm 2c).z$, novæ orientur priorum terminorum correctiones, quæ licet exiguæ ſint, ad majorem tamen approximationum diligentiam minime omitti debent. Videlicet ſi fiat primo $\mu = -0.0005895$, $\Delta = 2 - 2n + c$, ac deinde $\mu = -0.0004857$, $\Delta = 2c + 2n - 2 = 0.1327034$, & uterque terminus argumenti $2z - 2nz$, & $2z - 2nz - cz$ ex correctionibus illis prodiens in æquatione differentiali iiſdem, quibus antea, diviſionibus integretur, alii integrales termini habebuntur $0.000109.\cos.(2 - 2n).\zeta + 0.0000918.\cos.(2 - 2n - c).z$. eruntque ultimo correcti termini hujus nominis

$-0.006621.\cos.(2 - 2n).z + 0.0107238.\cos.(2 - 2n - c).z$.

In aliis terminis, cum ſingulas correctiones ob parvitatem non ita longe perducere oporteat, calculus etiam omnis erit facilior. Sic poſito $\frac{1}{a} = \frac{1}{382}$, $c^2 - (1 - n)^2 = 0.12718$, & in aliarum ſpecierum locum, ut antea, numeris ſubſtitutis, fiet alter integratæ æquationis terminus $0.00022492.\cos.(1 - n).z$. Deinde poſito $\mu = 0.00022492$, & $\Delta = 1 - n = 0.9251983$ fiet $-0.009179\mu\Delta^2 = -0.000001767$, dividendoque per 0.12718, & quotum ſimul copulando reſiduus hujuſmodi termini coefficiens evadet 0.00021103. Iiſdem etiam valoribus ſpecierum μ, & Δ ſubſtitutis fiet

$\mu\varphi(\frac{1}{2}\Delta^2 + 2\Delta c - 1.45523).\cos.(\Delta - c).z = 0.0000095.\cos.(c + n - 1).z$;

copulandoque coefficientem $-\frac{3n^2\varphi}{8a}\left(\frac{5}{c+n-1} - 13\right) = -0.000019145$, dividendoque per $c^2 - (c + n - 1)^2 = 0.97877$, novus in integrali habebitur terminus $-0.000009855.\cos.(c + n - 1).\zeta$ Rurſus ſi hic ipſe terminus loco differentiæ T accipiatur, ſeu loco $\mu.\cos.\Delta z$, ob parvitatem quantitatis $c + n - 1$ aliis correctionibus neglectis erit $-1.45523\mu\varphi.\cos.(\Delta - c).z = 0.00000078447.\cos.(1 - n).z$, dividendoque per 0.12718, ut in æquatione integrali ſit coefficientis correctio 0.00000617, erit terminus integer $0.0002172.\cos.(1 - n).z$.

Quod ſi inſuper aſſumamus excentricitatem terreſtris orbitæ $\delta = 0.0168$, & quantitates m, & n ſtatuamus proxime inter ſe æquales, erit

$-\frac{1}{2}\delta n^2.(1+3\phi^2)(1-\frac{1}{2}\pi^2).\frac{\cos. mz}{c^2-m^2}=-0.000143789.\cos. mz$:

ac deinde posito $\Delta=m=n$, & $\mu=-0.000143789.$, erit

$-\mu\phi(1.45523\pm 2\Delta).\cos.(\Delta\pm c).z=0.000012622.\cos.(c+m).z$
$+0.0000102626.\cos.(c-m).z.$

Cum itaque in æquatione differentiali esse debeat

$-\frac{1}{2}n^2\phi\delta.\cos.(c\pm m).z=-0.0000231 3836.\cos.(c\pm m).z$

signi superioris terminum dividendo per $c^2-(c+m)^2=-0.154$, terminum autem signi inferioris per 0.1427; in integrali æquatione binos alios terminos obtinebimus

$+0.0000683.\cos.(c+m).z-0.0000903.\cos.(c-m).z$

At insuper posito $\Delta=c\pm m$, & coefficientibus substitutis, ex correctione omni $\mu\phi(\frac{1}{2}\Delta^2\mp 2\Delta-1.45523)\cos.(\Delta\pm c).z$, pro differentiali æquatione addendus exsurget terminus $0.0000007112.\cos. mz$. Hunc igitur dividendo per c^2-m^2, correctus argumenti ejusdem terminus erit dumtaxat $-0.00014306.\cos. mz$.

Erit etiam $-\frac{15n^2\delta}{8a}.\frac{\cos.(1-n+m).z}{c^2-1}=0.0000274.\cos.(1-n+m).z$:

ex quo termino cum solitis substitutionibus eruatur

$0,0000015.\cos.(1-n+m-c).z$, cumque in differentiali æquatione iisdem, quibus supra, calculis alius argumenti hujus terminus erui possit, cujus coefficiens sit

$-\frac{3n^2\phi\delta}{8a}\left(\frac{5}{1-c}-10\frac{1}{2}\right)=-0.0000029$, & cum denique coefficiens termini hujusmodi in differentiali, atque integrali æquatione proxime idem manere debeat, fiet integer terminus

$-0.0000014.\cos.(1-n+m-c).z$. Hic vero rursus neglectis ob parvitatem quantitatibus $\frac{dT}{dz}$, & $\frac{ddT}{dz^2}$, erit

$-1.45523.\mu\phi.\cos.(\Delta+c).z=0.00000011144.\cos.(1-n+m).z$, dividendoque per $c^2-1=-0.01683$, & superiorem terminum copulando terminus omnis correctus erit $0.0000208.\cos.(1-n+m).z$.

Insuper continuata substitutionum earumdem methodo prodibit

$\frac{1}{4}n^2\delta\left(\frac{4-n}{2-n}\right).\frac{\cos.(2-2n+m).z}{c^2-(2-n)^2}=-0.00005279.\cos.(2-2n+m).z$

—

$$-\frac{21}{4}n^2\delta\left(\frac{4-3n}{2-3n}\right)\text{cos.}\frac{(2-2n-m).z}{c^2-(2-3n)^2}=0.00048368.\text{cos.}(2-2n-m).z.$$

Inde autem ope termini $\mu\phi(\frac{1}{2}\Delta^2+2c\Delta-1.45523).\ \text{cos.}(\Delta-c).z$ more solito eruentur pro differentiali æquatione bini alii termini

$-0.000012273.\ \text{cos.}\ (2-2n+m-c).z$

$+0.000096367.\ \text{cos.}\ (2-2n-m-c).z.$

Cum itaque ex æquatione ipsa excerptis argumenti ejusdem terminis, & substitutis numeris sint bini coefficientes

$$\frac{1}{4}n^2\phi\delta\left(\frac{1}{2-n-c}+\frac{3}{4-2n}+\frac{5}{4}\right)=0.00002391$$

$$-21n^2\phi\delta\left(\frac{1}{2-3n-c}+\frac{3}{8-12n}+\frac{5}{8}\right)=-0.0002508135,$$

& coefficientibus homologis simul junctis, & divisione prioris quidem per 0.11147, alterius vero per 0.368515 facta, erunt alii integrales termini

$0.00001044.\ \text{cos.}\ (2-2n+m-c)z$

$-0.0004191.\ \text{cos.}\ (2-2n-m-c).z.$

At rursus posteriore hoc termino pro $\mu.\ \text{cos.}\ \Delta z$ assumpto evadet $\mu\phi(\frac{1}{2}\Delta^2-2c\Delta-1.45523).\ \text{cos.}(\Delta+c).z=0.00006 2263.\ \text{cos.}(2-2n-m).z,$ dividendoque per $c^2-(2-3n)^2=-2.16958$, & quotum -0.0000287 a coefficiente alio subtrahendo, fiet terminus correctus $0.000454.\ \text{cos.}\ (2-2n-m).z.$ Simili correctione terminus alter evadet $-0.0000523.\ \text{cos.}\ (2-2n+m).z.$ Et ne quidpiam in correctionibus hisce exiguis omittamus, sicuti ex termino $0.00048368.\ \text{cos.}\ (2-2n-m).z$ eruebatur correctio $0.000096367.\ \text{cos.}\ (2-2n-m-c).z$, ita etiam ex differentia $-0.0000287.\ \text{cos.}(2-2n-m).z$ eruetur correctio alia $-0.000005718.\ \text{cos.}\ (2-2n-m-c).z$: dividendoque per 0.368515, & quotum superiori termino adjungendo prodibit coefficiens -0.0004347: ac pariter si neque alia quantitatis $-0.009179.\mu\Delta^2.\ \text{cos.}\ \Delta z$ correctio exigua negligatur, fiet omnis argumenti hujus terminus $-0.0004281.\ \text{cos.}\ (2-2n-m-c).z.$

Denique cum sit $p=\frac{1}{4}n^2$, substitutis numeris ordine habebimus

$$\frac{1}{4}n^2\pi^2.\frac{\text{cos.}(2+2p).z}{c^2-(2+2p)^2}=-0.0000112.\ \text{cos.}(2+2p).z$$

$$\frac{1}{2} n^2 \pi^2 . \frac{\text{cof.}(2n+2p).z}{c^2-(2n+2p)^2} = 0.00003526.\text{cof.}(2n+2p).z$$

$$3 n^2 \pi^2 \varphi . \frac{\text{cof.}(2+2p-c).z}{c^2-(2+2p-c)^2} = -0.000146.\text{cof.}(2+2p-c).z:$$

Pofito autem $\mu = -0.000146$, & $\Delta = 2+2p-c = 1.016843$, erit

$$\mu\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta^2 \mp 2\Delta - 1.45523).\text{cof.}(\Delta \pm c).z = 0.0000236.\text{cof.}(2+2p).z$$
$$-0.0000008344.\text{cof.}(2+2p-2c).z:$$

& priorem coefficientem dividendo per $c^2-(2+2p)^2$, feu proxime -3, fiet totus hujus generis terminus $-0.000019.\text{cof.}(2+2p).z$, pofteriori vero coefficienti adjungendo

$$\frac{3}{16} n^2 \pi^2 \varphi^2 \left(\frac{5}{1+p-c} + 9\tfrac{1}{2}\right) = 0.000010155,$$ & differentiam dividendo per $c^2-(2+2p-2c)^2 = 0.98253$, denique habebimus $0.00000184.\text{cof.}(2+2p-2c).z$.

Eadem calculi ferie minores alii quicumque termini fupputari poffent qui ex evolutione quantitatum $2x^2\int \omega x^2 dz$, & $\varpi x^4 dz$ fimiliter exfurgerent. Ii vero ob coefficientium parvitatem ad calculorum luxum augendum potius quam perficiendam Lunæ theoriam conducerent. Ut ergo terminis præcedentibus contenti fimus, qui cum Majeri tabulis, æquationibufque libri hujus initio recenfitis comparari poffunt, collectis omnibus in unam fummam, & juxta formulas trigonometricas jam citatas pro coefficiente argumenti cz addita fumma coefficientium aliorum omnium inverfo figno acceptorum, erit differentia vectoris radii lunaris orbitæ, quæ ob perturbatrices vires inducitur,

$$\begin{aligned}
T = {} & 0.0002172.\text{cof.}(1-n).z \\
& -0.006621.\text{cof.}(2-2n).z \\
& -0.000007.\text{cof.}(3-3n).z \\
& +0.0107238.\text{cof.}(2-2n-c).z \\
& -0.0005895.\text{cof.}(2-2n+c).z \\
& -0.00009855.\text{cof.}(c+n-1).z \\
& -0.0004857.\text{cof.}(2c+2n-2).z \\
& -0.00014306.\text{cof.}mz \\
& +0.0000683.\text{cof.}(c+m).z
\end{aligned}$$

$- \; 0.0000903. \; \text{cos.} \; (c - m).z$

$+ \; 0.0000208. \; \text{cos.} \; (1 - n + m).z$

$- \; 0.0000014. \; \text{cos.} \; (1 - n + m - 1).z$

$- \; 0.0000523. \; \text{cos.} \; (2 - 2n + m).z$

$+ \; 0.000454. \; \text{cos.} \; (2 - 2n - m).z$

$+ \; 0.00001044. \; \text{cos.} \; (2 - 2n + m - c).z$

$- \; 0.0004281. \; \text{cos.} \; (2 - 2n - m - c).z$

$+ \; 0.00003526. \; \text{cos.} \; (2n + 2p).z$

$- \; 0.000019. \; \text{cos.} \; (2 + 2p).z$

$- \; 0.000146. \; \text{cos.} \; (2 + 2p - c).z$

$+ \; 0.00000184. \; \text{cos.} \; (2 + 2p - c).z$

$- \; 0.002938. \; \text{cos.} \; cz.$

COROLLARIA.

I. Ex tota calculi ſerie manifeſtum eſt coefficientes plurium terminorum, qui in æquatione differentiali exigui ſunt, integratione habita maxime augeri. Patet etiam terminos alios, qui in differentiali, atque integrali æquatione exigui manent, multiplicatione facta per ſinus, & coſinus quarumdam angulorum evolvi in terminos, qui integratione maxime augentur. Ita ex termino exiguo argumenti $2z + 2pz$ bini alii educuntur termini, qui pro argumento habent $2z + 2pz - cz$, & $2z + 2pz - 2cz$, quorum prior priori hac integratione, coefficientem multo auctum habet, alter ſequenti integratione, cum variationes motus ex variationibus vectoris radii colligentur, fere tantundem augebitur. Eamdem eſſe rationem aliorum terminorum in corollariis Probl. IV. jam adnotavimus.

II. Falſum eſt igitur aut æquationes augeri in ſimplici ratione temporum, aut poſſe in æquatione integrata negligi terminos, qui in æquatione differentiali præ cæteris exigui ſunt, aut univerſim in tractandis problematis trium corporum ſe ſe attrahentium eſſe aliquid, quod ſola coefficientium parvitate debeat negligi. Idcirco erronea eſt ea methodus, qua in elementis motuum variabilium Lunæ, aut etiam Jovis, & Saturni accipiendis, negliguntur quædam elementa, quæ præ cæteris videntur ordinis inferioris. Æquationes motus Jovis, & Saturni accurata methodo in ſubſequenti libro ſupputabimus. Ut ſatis accuratum motum lunarium calculum hic

hic ineamus terminos illos tantum omisimus, qui binis integrationibus sensibiles nequeunt evadere, easque tantum neglexìmus coefficientium correctiones, quæ decimalem aliquam notam notæ dumtaxat ultimæ adjicerent.

III. Potiorem autem radii vectoris terminum formæ $h.\ \text{cos}.(2-n-c).\ z.$ considerando manifestum est, quod cum $\varphi.\ \text{cos}.\ cz$ sit prior terminus variabilis, qui vectorem radium definit in ellipsi circa terram descripta, posito quod excentricitas constans sit φ, & angularis distantia a summa apside cz; terminus $h.\ \text{cos}.\ (2-2n-c).\ z$ exprimet differentiam vectoris radii in ellipsi, in qua excentricitas ad tempus datum sit $\varphi + h.\ \text{cos}.\ (2c+2n-2).\ z$, & aberratio apsidum a loco medio $\dfrac{h.\ \text{sin}.\ (2c+2n-2).\ z.}{\varphi + h.\ \text{cos}.(2c+2n-2).z}$ Has enim quantitates excentricitatis variabilis, & inæqualis progressus apsidum substituendo, loco φ cos. $c\zeta$ habebimus

$$(\varphi + h\,\text{cos}.\,(2c+2n-2).\,z).\,\text{cos}.\left(\frac{cz+h\,\text{sin}.(2c+2n-2).\,\zeta}{\varphi+h.\,\text{cos}.\,(2c+2n-2).\,\zeta}\right):$$

quæ quantitas more solito resoluta abibit in hanc aliam $\varphi.\ \text{cos}.\ c\zeta + h.\ \text{cos}.\ (2-2n-c.)\zeta.$

IV. Atque inde eruetur elegans theorema, quod initio Lib. II. indicavimus, & quod Newtonus ex observationibus potius visus est quam ex theoria collegisse. Scilicet si locus Terræ sit T, fig. 67., & sit TC excentricitas media lunaris orbitæ, centroque C, ac radio CB, qui exæquet coefficientem eumdem h, describatur circulus DBA, accipiaturque angulus BCD æqualis duplæ distantiæ Solis a loco apogæi medio $2c\zeta + 2n\zeta - 2\zeta$, exprimet TK, seu TD excentricitatem veram pro dato apogæi loco, & BTD æquationem motus mediocris apogæi Lunæ. Est enim $c\zeta$ distantia Lunæ ab apogæo, & $\zeta - n\zeta$ distantia lunæ a Sole, adeoque est Solis distantia ab apogeo $c\zeta + n\zeta - \zeta$. Et quidem cum linea apsidum lunaris orbitæ ad Solem dirigetur, posito cos. $(2c+2n-2).\zeta = 1$, excentricitas fiet maxima, & contra in quadraturis apsidum cum Sole evadet minima. Apogæum insuper progredietur ultra locum medium quando in oppositione, vel conjunctione Solis versabitur, ac

ae regredietur in quadraturis, eritque tota excentricitatis variatio 0.0107238., quam Newtonus aſſumpſit partium $0.01172\frac{1}{4}$, & aberratio apſidum a loco medio erit $\frac{107.238}{547}$, qui eſt ſinus 11° 19'.

V. Erunt etiam bini alii termini, qui reſpondent radio vectori ellipſeos Terræ concentricæ, circa centrum revolutæ, & Solem verſus tranſpoſitæ $-\frac{1}{151} . \text{coſ.}\,(2-2n).\,z + \frac{1}{4604} . \text{coſ.}\,(1-n).\,\zeta$: & ſi prioris termini coefficiens, ſeeluſis correctionibus omnibus, aſſumatur ut primo prodiit, fiet -0.00726755, ſive $\frac{1}{139}$, ut etiam alibi ſtatutum eſt. Alios autem terminos omnes conſiderando manifeſtum erit quibus apogæi, nodorum, Soliſque aſpectibus radius vector lunaris orbitæ aliqua ſui parte augeri, aut minui debeat. Et quia parallaxis horizontalis Lunæ æqualis eſt Lunæ diametro per vectorem radium diviſæ; ſi parallaxis mediocris aſſumatur ut antea 57' 18", dividaturque per $1 + 0.0547\ \text{coſ.}\ cz - 0.006621.\ \text{coſ.}\,(2-2n).\,z + 0.0107238.\ \text{coſ.}\,(2-2n-c).\,\zeta$ &c., habebuntur æquationes omnes parallaxeos ejuſdem horizontalis. Erunt autem præcipuæ

$$57'\ 18'' - 3'\ 8''.\ \text{coſ.}\ cz - 36.87''.\ \text{coſ.}\,(2-2n-c).\,\zeta$$
$$+\ 22.75''.\ \text{coſ.}\,(2-2n).\,\zeta + 2''.\ \text{coſ.}\,(2-2n+c).\,\zeta\ \&c.$$

SCHOLION.

Bini autem termini, qui anomaliæ angulum involvunt, ſingillatim conſiderari debent, & qui ultimo in æquatione integrata prodiit $-0.002938.\ \text{coſ.}\ c\zeta$, & qui primo in æquatione differentiali Coroll. IV. Probl. VI. occurrebat $-0.0004454.\ \text{coſ.}\ c\zeta$. Et quidem integralis terminus $-0.002938.\ \text{coſ.}\ cz$, cum indicet æquationem centri aliquantulum ob vires perturbatrices minorem effici, ſuperiores omnes productorum x^2, x^3 &c. reſolutiones minime afficiet, ſi in expreſſione vectoris radii $x = 1 + \varphi.\,\text{coſ.}\,cz$ &c. $+ T$ pro quantitate φ aſſumatur, ut ſupra fecimus excentricitas vere mediocris, & ſit φ coſ. cz terminus omnis argumento $c\zeta$ reſpondens, ac T referat alios terminos, qui alios angulos in argumen-

tis

tis admixtos referunt. Quod vero ſpectat ad exiguum illum æquationis differentialis terminum — 0.0004454, coſ. cz, qui juxta Coroll. III. Probl. XCV. Algebræ integratione facta ad circulares arcus deduceret, obſervandum eſt quantitatum omnium minorum ratione habita alios ejuſdem generis terminos exſurgere, qui priorem terminum fere deſtruunt. Reaſſumptis enim calculis ſuperioribus, præter quantitates illas, quas recenſuimus, ex evolutione terminorum

$2x^2 \int \omega x^2 dz$ eruentur $-12n^2 \int . T dz . \text{ſin.}(2-2n).z$

termini $+ \frac{9}{2} n^2 T . \text{coſ.}(2-2n).z$

$+ 18 \phi n^2 T . \text{coſ.}(2-2n-c).z$

ϖx^2 $\qquad + 9n^2 T . \text{coſ.}(2-2n).z$

$\frac{\omega . dT}{dz}$ $\qquad + \frac{3}{2} n^2 . \frac{dT.}{dz} \text{ſin.}(2-2n).z$

Loco igitur differentiæ radii vectoris T ſcribendo 0.0107238. coſ. $(2-2n-c).z$, ex terminis ductis in ſinum, aut coſinum anguli $2z - 2nz$ more ſolito eruetur 0.00075898. coſ. cz: & loco T ſcribendo — 0.006621. coſ. $(2-2n).z$; ex termino alio $18 \phi n^2 T$. coſ. $(2-2n-c).z$ eruetur — 0.00001824. coſ. cz. Simili modo in reliquis æquationis differentialis terminis $-2T^2 + \frac{2dT^2 - T.ddT}{dz^2}$ loco T alternatim ſtatuendo præcipuos terminos argumenti $(2-2n).z$, & $(2-2n-c).z$, prodibit inſuper — 0.0002314. coſ. cz, ac fiet reſiduus hujus generis terminus + 0.00004. coſ. cz. Quin vero alias omnes quantitates hujuſmodi exiguas ſupputemus, ſubducamuſque a ſe invicem, obſervandum eſt ex quot conſtantium quantitatum elementis, ex quot terminorum comparatione, quibuſque approximationibus, & correctionibus terminus 0.00004. coſ. cz exſurgat. Quæ cum approximationes omnes, correctioneſque in tam multiplici operationum ſerie adeo accuratæ eſſe nequeant, ut tam exiguos coefficientes certo exhibeant, minime colligendum inde erit in expreſſione vectoris radii eſſe opportere terminum aliquem formæ 0.00002.z. ſin. cz, qui aucto motu angulari z continue augeatur. Æquatione enim differentiali ad formam Probl. III. deducta poſteriores aliquot termini

mini nulla alia ratione integrari possunt, quam pro differentia vectoris radii substituendo valorem ex priorum terminorum integratione erutum, atque ita illos ad horum formam accommodando. Quæ si omnino accurata esset methodus, non in terminis tantum $-2T^2 + \frac{2\,dT^2 - T.ddT}{d\zeta^2}$ &c. loco T substitui posset quantitas formæ $\mu.\cos.\Delta\zeta$, sed in terminis etiam antecedentibus $\frac{ddT + c^2 T}{d\zeta^2}$; quo dato nulli amplius essent circulares arcus, & differentialis æquatio aliam penitus formam indueret. Aliunde etiam manifestum est lunarem orbitam ab ellipsi, & circulo non admodum abludere: vires perturbatrices exiguas esse, & in adversa parte orbitæ agere contrario sensu: adeoque vires in circulari orbita se se invicem destruere, in orbita vero quæ accedat proxime ad circulum, aberrationes semper exiguas esse, singulas suis periodis reverti, neque lunarem orbitam ad aliam penitus formam abduci posse.

CAPUT QUARTUM.

DE ÆQUATIONIBUS MOTUS LUNÆ IN LONGITUDINEM.

PROBLEMA IX.

Invenire æquationes medii motus Lunæ in longitudinem.

Si elementum temporis assumatur ut in Probl. II., & III., substituanturque valores in corollario Probl. V. antea inventi, erit

$$d\theta = \frac{x^2 d\zeta}{1 - \frac{1}{2}\phi^2 + \int \omega x^2 d\zeta}$$

$$= x^2 d\zeta \left(1 + \frac{1}{2}\phi^2 - \int \omega x^2 d\zeta\right)$$

$$= d\zeta(1 + (2\phi - \phi^3).\cos.c\zeta + \frac{1}{2}\phi^2.c.2c\zeta + \phi^3.c.3c\zeta + (2 - \phi^2).T + 2\phi T.c.c\zeta.$$
$$(1.0051615 - 0.0045313.c.(2-2n).\zeta - 0.001133067.c.(2-2n-c).\zeta \&c.))$$

Jam vero quia motus medius dZ est tempori proportionalis, & summa motuum omnium mediorum Z singulis revolutionibus fit

motui vero ζ æqualis ; si æquatio superior dividatur per coefficientem constantem illius termini, qui elementum veri motus $d\zeta$ involvit, erit elementum medii motus $d\zeta = \frac{d\theta}{1.0051615}$. Aliis autem valoribus differentiæ vectoris radii ex præcedenti problemate desumptis fiet

$$
\begin{aligned}
(2 - \phi^2) . T = {} & 0.00043375 . \text{cos.} (1 - n) . \zeta \\
& - 0.01322214 . \text{cos.} (2 - 2n) . \zeta \\
& - 0.000014 . \text{cos.} (3 - 3n) . \zeta \\
& + 0.02141543 . \text{cos.} (2 - 2n - c) . \zeta \\
& - 0.00117723 . \text{cos.} (2 - 2n + c) . \zeta \\
& - 0.000019783 . \text{cos.} (c + n - 1) . \zeta \\
& - 0.000969943 . \text{cos.} (2c + 2n - 2) . \zeta \\
& - 0.00028569 . \text{cos.}\, m\zeta \\
& + 0.0001364 . \text{cos.} (c + m) . \zeta \\
& - 0.0001803 . \text{cos.} (c - m) . \zeta \\
& + 0.0000416 . \text{cos.} (1 - n + m) . \zeta \\
& - 0.0000028 . \text{cos.} (1 - n + m - c) . \zeta \\
& - 0.0001045 . \text{cos.} (2 - 2n + m) . \zeta \\
& + 0.000907 . \text{cos.} (2 - 2n - m) . \zeta \\
& + 0.00002085 . \text{cos.} (2 - 2n + m - c) . \zeta \\
& - 0.000855 . \text{cos.} (2 - 2n - m - c) . \zeta \\
& + 0.00007042 . \text{cos.} (2n + 2p) . \zeta \\
& - 0.000036 . \text{cos.} (2 + 2p) . \zeta \\
& - 0.000292 . \text{cos.} (2 \pm 2p - c) . \zeta \\
& + 0.00000368 . \text{cos.} (2 \pm 2p - 2c) . \zeta .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2\phi T . \text{cos.}\, c\zeta = {} & 0.00001188 . \text{cos.} (c + n - 1) . \zeta \\
& - 0.00036217 . \text{cos.} (2 - 2n \pm c) . \zeta \\
& + 0.00058659 . \text{cos.} (2 - 2n - c \pm c) . z \\
& - 0.000032245 . \text{cos.} (2 - 2n - c \pm c) . \zeta \\
& - 0.00002647 . \text{cos.} (2c + 2n - 2 \pm c) . \zeta \\
& - 0.00000782 . \text{cos.} (c \pm m) . \zeta \\
& + 0.00000186 . \text{cos.} (1 - n + m - c) . \zeta \\
& + 0.000002483 . \text{cos.} (2 - 2n - m - c) . z \\
& - 0.0000233 . \text{cos.} (2 - 2n - m) . \zeta
\end{aligned}
$$

+

$$+\ 0.000007986.\ \text{cof.}\ (z + 2p - 2c).z$$

$$\frac{-2\varphi.\text{cof.}\,cz.\int \omega x' dz}{1.0051615} = -\ 0.0002466.\ \text{cof.}\ (2 - 2n \pm c).z$$
$$-\ 0.0000616.\ \text{cof.}\ (2 - 2n - c \pm c).z$$
$$-\ 0.0000175.\ \text{cof.}\ (2 - 2n + c \pm c).z$$
$$+\ 0.0000294.\ \text{cof.}\ (2 - 2n - c).z$$
$$+\ 0.0000006.\ \text{cof.}\ (1 - n).z$$
$$-\ 0.000002.\ \text{cof.}\ (2 - 2n + m - c).z$$
$$+\ 0.0000152.\ \text{cof.}\ (2 - 2n - m - c).z$$
$$+\ 0.00000375.\ \text{cof.}\ (2 - 2n - m).z.$$

Ex termino etiam $\varphi^2 T.$ cof. $2cz$ eruetur $-0.00001.$ cof. $(2c + 2n - 2).z$, aliusque rursus argumenti, & coefficientis ejusdem terminus eruetur ex $-\frac{1}{2}\varphi^2.$ cof. $2cz. \int \omega x' dz$. Itaque reliquis valoribus quantitatis $-\int \omega x' dz$ acceptis ex corollario Probl. V., ac per 1.0051615 similiter divisis, omnibus autem terminis, pro integratione obtinenda, divisis per coefficientes angulorum variabilium $1 - n, 2 - 2n, 2 - 2n - c$ &c., quorum valores numericos suo loco singulos indicavimus, prodibit

$$Z = z + \frac{2\varphi - \varphi^2}{c}.\ \text{fin.}\ cz + \frac{3\varphi^2}{4c}.\ \text{fin.}\ 2cz + \frac{\varphi^2}{3c}.\ \text{fin.}\ 3cz$$
$$+\ 0.000464.\ \text{fin.}\ (1 - n).z$$
$$-\ 0.00934934.\ \text{fin.}\ (2 - 2n).z$$
$$-\ 0.0000086.\ \text{fin.}\ (3 - 3n).z$$
$$+\ 0.02291718.\ \text{fin.}\ (2 - 2n - c).z$$
$$-\ 0.000741.\ \text{fin.}\ (2 - 2n + c).z$$
$$+\ 0.0000503.\ \text{fin.}\ (c + n - 1).z$$
$$+\ 0.0005487.\ \text{fin.}\ (2c + 2n - 2).z$$
$$-\ 0.0038193.\ \text{fin.}\ mz$$
$$+\ 0.0001206.\ \text{fin.}\ (c + m).z$$
$$-\ 0.0002052.\ \text{fin.}\ (c - m).z$$
$$+\ 0.0000416.\ \text{fin.}\ (1 - n + m).z$$
$$+\ 0.000066.\ \text{fin.}\ (1 - n + m - c).z$$
$$-\ 0.0000733.\ \text{fin.}\ (2 - 2n + m).z$$
$$+\ 0.000656.\ \text{fin.}\ (2 - 2n - m).z$$
$$+\ 0.0000114.\ \text{fin.}\ (2 - 2n + m - c).z$$
$$-\ 0.0009802.\ \text{fin.}\ (2 - 2n - m - c).z$$

$+ \; 0.0004458. \text{ fin.} (2n + 2p).z$
$- \; 0.000022. \text{ fin.} (2 + 2p).\zeta$
$- \; 0.000288. \text{ fin.} (2 + 2p - c).z$
$+ \; 0.000264. \text{ fin.} (2 + 2p - 2c).\zeta$

COROLLARIUM.

Priores formulæ hujus terminos cum aliis Probl. IV. Lib. I. comparando manifeftum erit æquationem centri lunaris orbitæ, calculo accuratiffime inftituto, prodire aliquantulum minorem. Eadem autem ratione, ac methodo, qua in fubfequenti alio problemate ad feriem variationum veri motus eruendam jam ufi fumus, loco $\frac{2\phi}{c}$. fin. cz fcribendo $\frac{2\phi - \phi'}{c}$. fin. cz prodibit

$$\zeta = Z - \left(\frac{2\phi - \frac{1}{4}\phi'}{c}\right). \text{fin. } cZ + \frac{5\phi'}{4c}. \text{fin. } 2cZ - \frac{13\phi'}{12c}. \text{fin. } 3cZ$$
$$= Z - 0.11012665. \text{fin. } cZ + 0.003772. \text{fin. } 2cZ - 0.0000175. \text{fin. } 3cZ.$$

PROBLEMA X.

Datis æquationibus medii motus æquationes motus veri Lunæ invenire.

Inprimis fi fiat $\zeta = Z - a.$ fin. $c\zeta + b.$ fin. $\Delta\zeta$, & coefficientes a, & b exigui fint, eadem methodo citati Problematis ftatuendo primum

$$z = Z - a. \text{fin.} (cZ - ac. \text{fin. } c\zeta + bc. \text{fin. } \Delta z)$$
$$+ b. \text{fin.} (\Delta Z - a\Delta. \text{fin. } c\zeta + b\Delta. \text{fin. } \Delta\zeta),$$

ac deinde loco fin. cz, & fin. Δz fcribendo femper fin. $(cZ - ac. \text{fin. } c\zeta)$ &c. refolutis, reductifque, ac collectis terminis omnibus denique habebitur

$$\zeta = Z - a(1 - \tfrac{1}{8}a^2c^2 - \tfrac{1}{4}b^2c^2). \text{fin. } cZ \quad \mp \tfrac{1}{2}ab.(\Delta \pm c). \text{fin.} (\Delta \pm c).Z$$
$$+ b(1 - \tfrac{1}{8}b^2\Delta^2 - \tfrac{1}{4}a^2\Delta^2). \text{fin. } \Delta Z \quad \pm \tfrac{1}{8}a^2b.(2c \pm \Delta)^2. \text{fin.} (2c \pm \Delta).Z \text{ \&c.}$$
$$+ \tfrac{1}{2}b^2\Delta. \text{fin. } 2\Delta Z \text{ \&c.}$$

Primo igitur æquatio centri, quæ ex precædentibus reductionibus eruebatur, ratione virium perturbatricium imminuenda erit producto ipfius in quartam partem fummæ quadratorum coefficientium omnium conftantium: cumque fpectatis præcipuis terminis argumenti $2 - 2n - c, 2 - 2n, m$, fit quarta pars fummæ hujufmodi 0.0001568, atque aliis terminis omnibus fpectatis fatis proxime cenferi poffit 0.0001575, loco -0.11012665. fin. cZ habebimus -0.1101093. fin. cZ. At infuper in fe ductis coefficientibus, fubductifque argumentis $2 - 2n$,

& 2

& $2 - 2n - c$, ex termino $+\frac{1}{2}ab(\Delta - c)$. fin. $(\Delta - c)$. Z alius eruetur terminus 0.0001062. fin. c Z. Quare neglectis aliis minoribus reductionibus terminus omnis hujusmodi censeri poterit — 0.110003. fin. cZ.

Deinde vero posito $b = -0.02291718$, & $\Delta = 2 - 2n - c$, supputatisque quantitatibus $b(1 - \frac{1}{4}b^2\Delta^2 - \frac{1}{4}a^2\Delta)$, atque insuper pro correctione alia $\frac{1}{2}ab(\Delta - c)$. fin. $(\Delta - c)$. Z posito $a = 0.11012665$, $b = 0.009349934$, & $\Delta = 2 - 2n$, æquatio, quæ evectionis dicitur, evadet — 0.0224136. fin. $(2 - 2n - c)$. Z. Pro alia vero æquatione argumenti $2 - 2n + c$ observandum est, præter correctionem illam, quæ ex termino $-\frac{1}{2}ab(\Delta + c)$.fin.$(\Delta + c)$.Z similiter potest erui, secundam correctionem esse, quæ ex termino $\frac{1}{2}a^2b(2c + \Delta)^2$. fin. $(2c + \Delta)$. Z educitur, si fiat scilicet $\Delta = 2 - 2n - c$: atque ita evadet æquatio omnis hujusmodi — 0.001004. fin. $(2 - 2n + c)$. Z.

Posito etiam $\Delta = 2 - 2n - c$, & $b = -0.02291718$ ex termino $\frac{1}{2}b^2\Delta$. fin. $2c$ Z eruetur 0.0002255. fin. $(4 - 4n - 2c)$. Z. Quia vero ex priori æquatione differentiali reassumpto termino $-\mu^2(1 + \frac{1}{2}\Delta^2)$. cos. $2\Delta\,\zeta$, & loco μ. cos. $\Delta\, z$ scribendo 0.0107238. cos. $(2 - 2n - c)$. z accederet æquationi eidem terminus — 0.0001574. cos. $(4 - 4n - 2c)$. z, atque in integrali æquatione haberetur insuper 0.0000787. cos. $(4 - 4n - 2c)$. z, unde colligi posset veri motus variatio — 0.000092. fin. $(4 - 4n - 2c)$. Z; coefficientibus junctis fiet omnis hujus generis terminus 0.0001335. fin. $(4 - 4n - 2c)$. Z. Simili modo supputari poterit terminus 0.00005. fin. $(4 - 4n)$. Z.

Aliorum terminorum brevior erit reductio, atque ex jam dictis facile colligitur. Omnibus autem terminis simul collectis fiet

$$
\begin{aligned}
z = Z &- 0.110003.\ \text{fin.}\ c\,Z \\
&+ 0.003772.\ \text{fin.}\ 2c\,Z \\
&- 0.000175.\ \text{fin.}\ 3c\,Z \\
&- 0.000464.\ \text{fin.}\ (1 - n).\ Z \\
&+ 0.011662958.\ \text{fin.}\ (2 - 2n).\ Z \\
&+ 0.0000086.\ \text{fin.}\ (3 - 3n).\ Z \\
&+ 0.00005.\ \text{fin.}\ (4 - 4n).\ Z \\
&- 0.0224136.\ \text{fin.}\ (2 - 2n - c).\ Z\ .
\end{aligned}
$$

$- 0.001004. \text{ fin.}(2 - 2n + c).Z$
$- 0.00029. \text{ fin. }(4 - 4n - c).Z$
$+ 0.0001335. \text{ fin. }(4 - 4n - 2c).Z$
$- 0.0000517. \text{ fin. }(c + n - 1).Z$
$- 0.0007161. \text{ fin. }(2c + 2n - 2).Z$
$+ 0.0038193. \text{ fin. } mZ$
$- 0.0003447. \text{ fin. }(c + m).Z$
$+ 0.0003981. \text{ fin.}(c - m).Z$
$- 0.0000416. \text{ fin. }(1 - n + m).Z$
$- 0.000066. \text{ fin. }(1 - n + m - c).Z$
$+ 0.0000725. \text{ fin. }(2 - 2n + m).Z$
$- 0.0007447. \text{ fin. }(2 - 2n - m).Z$
$- 0.0000077. \text{ fin. }(2 - 2n + m - c).Z$
$+ 0.000952. \text{ fin. }(2 - 2n - m - c).Z$
$- 0.0004458. \text{ fin.}(2n + 2p).Z$
$+ 0.000022. \text{ fin. }(2 + 2p).Z$
$+ 0.000288. \text{ fin. }(2 + 2p - c).Z$
$- 0.000264. \text{ fin. }(2 + 2p - 2c).Z.$

COROLLARIUM.

In hac igitur reductione medii motus ad verum patet ex priori feriei termino $-a(1 - \frac{1}{4}b^2 c^2 \&c.). \text{ fin. } cZ$ æquationem centri ob alias fimul æquationes omnes, quæ ex viribus perturbatricibus oriuntur, minorem fieri, quam quæ effet in illipfi circa focum defcripta viribus decrefcentibus in duplicata ratione auctarum diftantiarum. Patet fimiliter ex termino altero $b(1 - \frac{1}{4}a^2\Delta^2\&c.). \text{ fin. } \Delta Z$ unamquamque æquationem ob alias fimul omnes primum imminui oportere, ac deinde ob pofteriores binos feriei terminos varie corrigi.

PROBLEMA XI.

Æquationes eafdem veri motus ad tabularum formam reducere.

Ut æquationes omnes ad tabularum aftronomicarum formam reducantur, & comparari cum ipfis poffint, motum Solis, non medium, fed verum, & anomaliam pariter veram affumere oportet, æquationefque a plano lunaris orbitæ ad planum eclipticæ traducere. Sit igitur Y vera Solis diftantia a loco fummæ apfidis, & fit anomalia media $mZ = Y + 2\delta. \text{ fin. } Y$. Sit etiam X angularis diftantia loci me-

medii Lunæ a loco vero Solis, ac fit propterea

$X = Z - nZ + 2\delta.\ \text{fin.}\ Y$

$\text{fin.}(2-2n-c).Z = (1-4\delta^2).\text{fin.}(2X-cZ) \mp 2\delta.\text{fin.}(2X-cX-cZ \pm Y).$

Refolutionibus aliis de more factis prodibit

$$-0.0224136.\ \text{fin.}\ (2-2n-c).Z = -0.0224111.\ \text{fin.}\ 2X - cZ$$
$$\pm 0.000753.\ \text{fin.}\ 2X - cZ \pm Y$$
$$+0.011662958.\ \text{fin.}(2-2n).Z = 0.01165.\ \text{fin.}\ 2X$$
$$\pm 0.0003918.\ \text{fin.}\ 2X \pm Y$$
$$+0.0039193.\ \text{fin.}\ mZ = +0.0038182.\ \text{fin.}\ Y$$
$$+0.000064.\ \text{fin.}\ 2Y$$

In aliis terminis omnibus fatis erit fcribere X loco $Z - nZ$, & Y loco mZ, nullæque aliæ exorientur correctiones, quæ fint fenfibiles. Pariter fi fit S media Lunæ diftantia a nodo, neglectis aliis minoribus correctionibus, ftatui poterit $2S$ loco $2Z + 2pZ$, & $2S - 2X$ loco $2nZ + 2pZ$: atque his denominationibus ex prioribus Probl. Lib. V. accipi poterunt æquationes reductionis motus Lunæ ad Eclipticam. Denique fi neque alius negliatur exiguus terminus $-0.0003.T$, qui in pofteriori reductione Probl. VI. libri hujus fupererat, ftatuendo $T = 0.0107238.\ \text{cof.}\ (2-2n-c).z$, dividendoque primum per 0.245554, ac deinde per 0.8588466, & quotum figno inverfo bis accipiendo, exfurget correctio alia $6.3''.\ \text{fin.}\ 2X - cZ$.

Quare collectis terminis, & unitatis loco fcribendo $206264.808''$, erit motus verus Lunæ in longitudinem ad Eclipticam reductus

$$\begin{aligned}
z = Z &- 6^\circ\ 18'\ 9''.\ \text{fin.}\ cZ \\
&+ 12'\ 58''.\ \text{fin.}\ 2cZ \\
&- 36''.\ \text{fin.}\ 3cZ \\
&- 1'\ 36''.\ \text{fin.}\ X \\
&+ 39'\ 40''.\ \text{fin.}\ 2X \\
&+ 2''.\ \text{fin.}\ 3X \\
&+ 10''.\ \text{fin.}\ 4X \\
&- 1^\circ\ 16'\ 56''.\ \text{fin.}\ 2X - cZ \\
&- 3'\ 27''.\ \text{fin.}\ 2X + cZ \\
&- 59.7''.\ \text{fin.}\ 4X - cZ \\
&+ 27.5''.\ \text{fin.}\ 4X - 2cZ \\
&- 10.6''.\ \text{fin.}\ cZ - X
\end{aligned}$$

$- 2' \, 27 . 7''. \text{ fin. } 2cZ - 2X$
$+ 13' \, 7 . 5''. \text{ fin. } Y$
$+ 13''. \text{ fin. } 2Y$
$- 1' \, 11''. \text{ fin. } cZ + Y$
$+ 1' \, 22''. \text{ fin. } cZ - Y$
$- 8. \, 6''. \text{ fin. } X + Y$
$- 13. \, 5''. \text{ fin. } X + Y - cZ$
$- 1' \, 2''. \text{ fin. } 2X + Y$
$- 1' \, 13''. \text{ fin. } 2X - Y$
$+ 2' \, 38''. \text{ fin. } 2X + Y - cZ$
$+ 41''. \text{ fin. } 2X - Y - cZ$
$- 6' \, 53''. \text{ fin. } 2S$
$- 1' \, 32''. \text{ fin. } 2S - 2X$
$+ 46''. \text{ fin. } 2S + cZ$
$+ 13''. \text{ fin. } 2S - cZ$
$- 54''. \text{ fin. } 2S - 2cZ.$

COROLLARIA.

I. Singulæ igitur æquationes ex generali folutione problematis derivatæ intra aliquot fecundorum limites cum Majeri tabulis confentiunt, fola excepta æquatione annua $13' \, 7\frac{1}{2}''$. fin. Y, quæ plus quam minuto uno, ac dimidio inde difcrepat. Et quidem cum in priori integratione, atque in calculis fubfequentibus minorum etiam fractionum ratio fit habita, fi vere in maxima fui quantitate ab ea deficiat æquatio quam Hallejus ex obfervationibus primum collegerat, excentricitatem etiam terreftris orbitæ paulo minorem partibus 0.0168 radii mediocris affumere neceffe erit. Pariter excentricitas orbitæ lunaris paulo minor quam fupra affumenda erit fi vere æquatio centri fecundis aliquot a fex gradibus, ac tribus decimis deficiat.

II. Imminuta etiam excentricitate æquationes binæ, & quæ evectionis dicitur, & quæ idem evectionis argumentum habet inverfo anomaliæ lunaris figno, cum tabulis accuratius convenirent. Quamvis fi æquationes ipfæ accipiantur ut calculis fuperioribus prodierunt, prior 16″ dumtaxat, altera 20″ coefficientes tabularum fuperat. Tantumdem fere prima, & fecunda Lunæ variatio a tabulis deficere de-

deprehensa est. Semestris æquatio fere eadem nobis quæ authoribus aliis prodiit, scilicet 50″ fere secundis minor quam Majerus ex observationibus colligere visus est. Et quidem cum semestris æquationis, & evectionis calculus ex tam multiplici operationum serie, correctionibusque, ac reductionibus aliis pendeat, satis erit intra eosdem limites propius observationibus accessisse.

III. Pariter æquationes argumenti $2S - 2X$, & $cZ - X$ cum eadem nobis, aliisque authoribus obvenerint, prior 50″ major, altera fere tantundem minor prodiit quam ferant tabulæ. Æquationes reliquæ penitus conveniunt: & binæ illæ, quæ pro argumentis habent $X + Y$, & $2S - 2c\dot{Z}$, quasque in tabulis non attigit Majerus, sed instituto potius calculo determinavit, ejusdem signi, & coefficientis non admodum diversi nobis prodierunt. Hæc vero tanta cum tabulis, & Majeri, aliorumque calculis consensio, atque ordo ipse, ac ratio præcedentium calculorum, quos sæpius mutatis aliquanrulum elementis reassumpsimus, patienterque in diversas parres versavimus, satis indicat æquationes intra unius minuti limites certas esse.

SCHOLION.

Has vero, & alias æquationes omnes hujusmodi considerando, quæ simili modo ex formulis superioribus deduci possunt, manifestum est singulas datis periodis reverti, neque ullam esse, quæ magis semper, magisque augeatur successu temporis, & sæculari Lunæ æquationi explicandæ idonea sit. Quod etiam ex priori virium perturbatricium consideratione satis colligirur. Cum enim vires juxta vectorem radium agentes cosinubus diversorum angulorum exprimantur, iis evolutis nullus in differentiali, atque integrali æquatione oriri poterit terminus formæ μz, qui postmodum in expressione angularis motus terminum alium gignat formæ $\frac{1}{2}\mu z^2$, æquationemque exhibeat crescentem semper in duplicata ratione temporum. Cumque insuper vires radio vectori perpendiculares exprimantur sinubus eorumdem angulorum, neque in resolutione termini $\omega x''$ quantitas quæpiam constans exsurget, neque in termino $x' \int \omega x' dz$ quantitas alia occurret ejusdem formæ μz, quæ sæculari æquationi explicandæ inserviat. Denique quantitates omnes constantes $1, c, n,$

m, *p*, quæ coefficientes angulorum variabilium componunt, ita inter ſe differunt, ut multiplis etiam acceptis, ſubductiſque coefficiens anguli cujuſpiam variabilis omnino exiguus prodeat, atque inde apparens aliqua oriatur medii motus æquatio, quæ pariter augeri videatur in duplicata ratione temporis, quemadmodum in ſubſequenti libro obſervabimus. Quod idem non de Solis dumtaxat, ſed etiam Jovis, aliorumque Planetarum in Lunam actionibus dici debet. Et ne dubium poſtremo aliquod ſuboriatur de iis omnibus attractionis terreſtris inæqualitatibus, quæ ex figura ſphæroidica pendere poſſunt, quæque ad explicandam ſæcularem Lunæ æquationem fortaſſe faciant; adnotandum eſt nec vis, quam Terra juxta vectorem radium lunaris orbitæ exercet, partem eſſe aliquam motui angulari proportionalem, nec vis alterius perpendicularis radio ullam utcumque exiguam portionem eſſe, quæ conſtans ſit, quæque in æquatione Probl. II. libri hujus, atque in termino $2\,x^3 \int \omega\, x^3\, d\, z$ ad exprimendam vim perpendicularem ω adjecta variationem vectoris radii proportionalem tempori exhibeat. Quod ut citra accuratam attractionis totius formulam, & ſeries a Mac-Laurino, & Clairaut traditas, brevi conſideratione innoteſcat, ſtatuamus lineam apſidum ATa, fig. 63., a linea nodorum terreſtris æquatoris Bb diſtare angulo recto. Tum per lineam eamdem apſidum ſtatuamus traduci aliquod planum normale lunari orbitæ, quod propterea Terræ occurrendo ipſam in duas hemiſphæroides dividat æquales, ſimiles, & pro apſidum linea ſimiliter hinc inde poſitas. Orbita ſic conſtituta manifeſtum eſt quod cum Luna in apogæo, vel perigæo reperietur, ob ſphæroidicam Terræ formam in neutram partem perpendiculariter ad vectorem radium impelli poterit, ſeu vis perpendicularis radio nulla erit. Simili modo patebit in locis a linea apſidum æque diſſitis vires perpendiculares æquales eſſe, & tendere hinc inde in adverſas partes. Alia etiam hujuſmodi poſſent colligi ſpectando alias poſitione lunaris orbitæ. Hæc vero ſufficiunt ut jam pateat vim perpendicularem radio, quæ ex ſphæroidica Terræ figura oritur, non exprimi conſtanti aliqua quantitate, nec ſæculari æquationi Lunæ explicandæ ullo modo eſſe idoneam. Univerſim itaque in tota attractionis theoria nihil omnino invenietur, quod æquationis ejuſdem cauſa, & origo ſit,

&

& sola atmosphæræ undique circa Solem affusæ resistentia supererit; in quam idem phænomenon refundi possit ea ratione, iisque legibus, quas in postremo capite prioris libri explicavimus.

CAPUT QUINTUM.

DE ÆQUATIONIBUS MOTUS NODORUM, INCLINATIONIS ORBITÆ, ET LATITUDINIS.

PROBLEMA XII.

Invenire æquationes motus nodorum lunaris orbitæ in plano Eclipticæ.

Positis omnibus ut in fig. 57., & prioribus Probl. Lib. V., neglectisque inferiorum ordinum terminis, ob $\text{sin.}\, LTD = \text{cos.}\, LTA$, erit angularis motus nodorum

$\frac{1}{4}n^2 . TL^4 . \text{sin.} ATB . \text{sin.} LTB . \text{cos.} LTA . dz =$

$\frac{1}{4}n^2 . TL^4 . (\text{sin.} ATB^2 . \text{cos.} LTA^2 \mp \text{sin.} ATB . \text{cos.} ATB . \text{sin.} LTA . \text{c.} LTA) . d\zeta$:

& cum sit $\text{cos.}\, LTA^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{cos.}\, 2LTA$,

$\text{sin.}\, ATB^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{cos.}\, 2ATB$,

$-\frac{1}{4}\text{cos.}\, 2LTA . \text{cos.}\, 2ATB \mp \frac{1}{4}\text{sin.}\, 2ATB . \text{sin.}\, 2LTA =$

$-\frac{1}{4}.\text{cos.}(2LTA \mp 2ATB) = -\frac{1}{4}\text{cos.}\, 2LTB$, fiet motus ipse

$\frac{1}{4}n^2 . TL^4 (1 + \text{cos.}\, 2LTA - \text{cos.}\, 2LTB - \text{cos.}\, 2ATB) . dz$.

Cumque insuper positis aliis antecedentibus denominationibus sit motus Lunæ a Sole $LTA = z - nz$, motus Lunæ a nodo $LTB = \zeta + pz$, & motus Solis a nodo $ATB = n\zeta + pz$, iisque per æquationem centri Solis, & priorem motus nodorum æquationem correctus fiat

$nz + p\zeta - 2\delta . \text{sin.}\, m\zeta - \frac{1}{8}n . \text{sin.}(2n + 2p) . z$.

juxta Probl. I. Lib. V. loco n^2 scribendo $n^2(1 - 3\delta . \text{cos.}\, mz)$, & juxta Probl. III., & VIII. libri hujus loco TL^4 scribendo

$1 + \varphi^2 + 4\varphi . \text{c.}\, cz + 5\varphi^2 . \text{c.}\, 2cz + 0.04289 . \text{c.}(2 - 2n - c) . z - 0.0265 . \text{c.}(2 - 2n) . z$,

motus nodorum lunaris orbitæ relatus ad signorum ordinem æquabitur quantitati $-\frac{1}{4}n^2 d\zeta$ ductæ in terminos

$1 + \varphi^2 - 0.01325 - 3\delta . \text{cos.}\, m\zeta + (4\varphi + 0.0215) . \text{cos.}\, c\zeta$

$-(1 - 0.01325) . \text{cos.}(2n + 2p) . z + \frac{1}{8}n . \text{cos.}(4n + 4p) . z$

—

$- 0.9867 . \text{cos}. (2 + 2p) . \zeta + 0.9867 . \text{cos}. (2 - 2n) . \zeta$
$- \frac{1}{2} \delta . \text{cos}. (2n + 2p - m) . z + \frac{1}{2} \delta . \text{cos}. (2n + 2p + m) . \zeta$
$- 2 \varphi . \text{cos}. (2n + 2p - c) . \zeta - (2 \varphi + 0.0215) . \text{cos}. (2n + 2p + c) . \zeta$
$+ (2 \varphi + 0.0429) . \text{cos}. (2 - 2n - c) . \zeta - (2 \varphi + 0.0215) . \text{cos}. (2 + 2p - c) . \zeta$
$+ \frac{5}{2} \varphi^2 . \text{cos}. (2 - 2n - 2c) . z - \frac{5}{2} \varphi^2 . \text{cos}. (2 + 2p - 2c) . \zeta .$

Subductis igitur numeris, & more solito integrando erunt æquationes præcipuæ medii motus nodorum lunaris orbitæ

$0.0028274 . \text{sin}. \; m\zeta - 0.0001017 . \text{sin}. \; cz$
$+ 0.026203 . \text{sin}. (2n + 2p) . \zeta - 0.000373 . \text{sin}. (4n + 4p) . \zeta$
$+ 0.00207 . \text{sin}. (2 + 2p) . z - 0.00.2236 . \text{sin}. (2 - 2n) . \zeta$
$+ 0.000424 . \text{sin}. (2 + 2p - m) . \zeta - 0.00106 . \text{sin}. (2 + 2p + m) . \zeta$
$- 0.000545 . \text{sin}. (2n + 2p - c) . z + 0.000463 . \text{sin}. (2n + 2p + c) . \zeta$
$- 0.00075 . \text{sin}. (2 - 2n - c) . \zeta + 0.00055 . \text{sin}. (2 + 2p - c) . \zeta$
$+ 0.000237 . \text{sin}. (2 - 2n - 2c) . \zeta + 0.001244 . \text{sin}. (2 + 2p - 2c) . \zeta .$

COROLLARIUM.

Cum summa omnium $\frac{1}{4} n^2 d\zeta$ in circulari orbita sit annis singularis $20^\circ \; 11\frac{1}{4}'$, cumque habita ratione & motus Solis, & inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam sit annus nodorum motus $19^\circ \; 35\frac{1}{7}'$; si motus ipse minuatur in ratione $1 + \varphi^2 - 0.01325 : 1$, correctus nodorum motus fiet annis singulis $19^\circ \; 23 \frac{1}{2}'$, proxime ut ferunt observationes. Unde etiam si valor vectoris radii ex generali solutione problematis assumatur, patet iterum, quod alibi jam dictum est, variationes annui nodorum motus exprimi quidem simplici differentia semiaxium illius ellipseos, quæ circa Terram veluti centrum describi posset, sed excentricitatis orbitæ ellipticæ secunda potentia dumtaxat affici.

PROBLEMA XIII.

Æquationes easdem ad tabularum formam reducere.

Si ad normam lemmatis, quod Problemati X. præmissum est, assumamus

$\text{sin}. (2 - 2n) . z = \text{sin}. (2 - 2n) . Z \mp 0.055 . (2 - 2n) . \text{sin}. (2 - 2n \pm c) . Z$, ac sic pariter $2Z - 2nZ = X$, loco $- 0.002236 . \text{sin}. (2 - 2n) . z$ habebimus $- 0.002236 . \text{sin}. \; 2X \pm 0.0002276 . \text{sin}. (2X \pm cZ)$.

Pariter si sit S distantia loci medii Lunæ a nodo, ac fiat $2\zeta + 2pz = 2Z + 2pZ - 4\varphi . \text{sin}. \; cZ = 2S - 4\varphi . \text{sin}. \; cZ$, erit

o.

$0.00207. \text{fin.} (2+2p).z = 0.00207. \text{fin.} 2S \mp 0.0002277. \text{fin.} (2S \pm cZ)$.
Denique si motus Solis non medius, sed verus accipiatur, & sit $2nz + 2pz - 4\delta. \text{fin.} mz = 2S - 2X$, erit etiam

$$0.02603. \text{fin.} (2n+2p).z = 0.02603. \text{fin.} (2S - 2X) \pm 0.00088. \text{fin.} (2S - 2X \pm Y),$$

Quare unitatis loco scribendo ut antea 206264. 808″, & terminos omnes colligendo erunt æquationes præcipuæ medii motus nodorum Lunaris orbitæ in plano Eclipticæ

$1° 30' 3'$.	fin. $2S - 2X$
$- 1' 17''$.	fin. $4S - 4X$
$+ 9' 43''$.	fin. Y
$- 21''$.	fin. cZ
$+ 7' 7''$.	fin. $2S$
$- 7' 41''$.	fin. $2X$
$+ 47''$.	fin. $2S + cZ$
$+ 2' 41''$.	fin. $2S - cZ$
$+ 4' 17''$.	fin. $2S - 2cZ$
$+ 47''$.	fin. $2X + cZ$
$- 3' 22''$.	fin. $2X - cZ$
$+ 50''$.	fin. $2X - 2cZ$
$- 37''$.	fin. $2S - 2X + Y$
$- 1' 34''$.	fin. $2S - 2X - Y$
$- 1' 52''$.	fin. $2S - 2X - cZ$
$+ 1' 35''$.	fin. $2S - 2X + cZ$

COROLLARIUM.

Quia vero juxta Probl. IX. Lib. V. variatio inclinationis orbitæ est $- 3n^2. TL^4. \text{fin.} ATB. \text{cof.} LTB. \text{cof.} LTA. \pi dz$, facile patebit æquationes variatæ inclinationis definiri cofinubus eorundem angulorum, quorum finus æquationes motus nodorum definiunt, coefficientes autem harum æquationum in finum mediæ inclinationis duci oportere, ut coefficientes æquationum illarum præbeant. Ita igitur erunt æquationes præcipuæ inclinationis lunaris orbitæ

$8' 6.4''$.	cof. $2S - 2X$
$-7''$.	cof. $4S - 4X$
$+38.6''$.	cof. $2S$

$-41.4''.$ cos. $2\ X$
$+14.4''.$ cos. $2\ S - c\ Z$
$+\ 23''.$ cos. $2\ S - 2\ c\ Z$
$-\ 18''.$ cos. $2\ X - c\ Z$
$-\ 8.4''.$ cos. $2\ S - 2\ X - r$
$-\ 9''.$ cos. $2\ S - 2\ X - c\ Z$
$+\ 8.4''.$ cos. $2\ S - 2\ X + c\ Z$

PROBLEMA XIV.

Iisdem positis invenire æquationes motus Lunæ in latitudinem.

Cum angulus distantiæ Lunæ ab Ecliptica visæ e Terra in maxima sui quantitate æquetur angulo inclinationis lunaris orbitæ, aliis autem in locis minuatur in simplici ratione sinus distantiæ Lunæ a nodorum linea, resolutis productis ipsius sinus in æquationes omnes, quæ juxta Probl. XIII. correctam Lunæ distantiam a nodis exprimunt, inclinatione media lunaris orbitæ posita ut antea $5°\ 9'\ 8''$, latitudo Lunæ æquabitur angulo $5°\ 9'\ 8'' + 8'\ 6.4''.$ cos. $(2\ S - 2\ X)$
$+\ 38.\ 6''.$ cos. $2\ S$ &c. ducto in
$-0.0131015.$ sin. $2\ S - 2\ X \pm S$
$-0.001035.$ sin. $2\ S \pm S$
$+0.001118.$ sin. $2\ X \pm S$
$-0.000389.$ sin. $2\ S - cZ \pm S$
$-0.000622.$ sin. $2\ S - 2\ cZ \pm S$
$+0.000489.$ sin. $2\ X - cZ \pm S$
$+0.000186.$ sin. $4\ S - 4\ X \pm S$
$+0.000228.$ sin. $2\ S - 2\ X - r \pm S$
$-0.000236.$ sin. $2\ S - 2\ X + cZ \pm S$
$+0.000272.$ sin. $2\ S - 2\ X - cZ \pm S$
$\mp 0.0014137.$ sin. $S \pm r.$

Primo igitur in sinus hos omnes ducendus erit angulus $5°\ 9'\ 8''$, ac deinde neglectis ob parvitatem similibus productis termini $8'\ 6.4''.$ cos. $2\ S - 2\ X$, terminorumque aliorum subsequentium, erit correcta Lunæ latitudo

5.°

$5^{\circ}\ 8'\ 29.5''$. fin. S
$+\ 8'\ 47.66''$. fin. $2\ X - S$
$-7''$. fin. $4\ X - 3\ S$
$\mp 26''$. fin. $S \pm Y$
$-14.4''$. fin. $S - cZ$
$-23''$. fin. $S - 2\ cZ$
$-8.4''$. fin. $2\ X - S + Y$
$-9.5''$. fin. $2\ X - S + cZ$
$\pm 15.5''$. fin. $2\ X - S - cZ$.

COROLLARIUM.

Ut æquationes hujufmodi comparari poffint cum tabulis, omittendus erit duplex terminus $\mp 26''$. fin. $S \pm Y$. In tabulis enim affumitur latitudo Lunæ correcta jam ope æquationis annuæ motus mediocris nodorum. Aliæ autem præcipuæ, quas fupputavimus, latitudinis æquationes ita cum tabulis conveniunt ut differentia omnis exigua in varietatem elementorum calculi, & reductionum fingularum merito refundi poffit. Reliquæ latitudinis æquationes, quas ob parvitates omifimus, eadem ratione, atque ordine, aliis terminis refolutis, fupputari poffent.

SCHOLION.

Ita igitur æquationes omnes medii motus Lunæ in longitudinem, ac latitudinem ex generali folutione problematis trium corporum fe fe attrahentium in ratione directa maffæ, diftantiarumque reciproca duplicata tam facile erutæ funt, ut folæ elementaris Algebræ fubfidio totam calculi feriem recognofcere quifque poffit per partes fingulas, atque infuper tam accurate, ut non nifi inferiorum ordinum decimales in eadem calculi ferie neglecti fint, utque illæ etiam æquationes, quæ incertæ adhuc, ac dubiæ videbantur, intra limites fatis arctos obfervationibus refpondeant, quemadmodum ex corollariis Probl. XII., atque ex Cap. III., & IV. manifeftum eft. Pariter apogæi lunaris motus ex ipfa difpofitione terminorum, qui vires omnes perturbatrices & perpendiculares radio, & juxta radium ipfum agentes exprimunt, obfervationibus fatis conformis prodiit, terminis aliis, qui circulares arcus involvere videntur, deftruentibus fe fe invicem, accurate quantum in hifce approximationibus pro va-

rie-

rietate elementorum calculi requiri poſſet, ut conſtat ex Probl. VI.; atque ex ſcholio Cap. III. Patet inſuper ex ſcholio Cap. IV. libri hujus, atque ex poſtremo ſcholio prioris libri non quidem ex attractione mutua cæleſtium corporum, ſed potius ex reſiſtentia ætherei fluidi ſæcularem Lunæ æquationem repetendam eſſe. Quibus omnibus viderint alii num ſatis jam ſit factum quæſtionibus iis omnibus, quas Regia Pariſienſis Scientiarum Academia ſeptennio fere Geometrarum examini iteratis vicibus propoſuit: I. ſcilicet poſtulando ut perficiantur methodi, quibus theoria Lunæ innititur: II. ut æquationes illæ determinentur, quæ incertæ adhuc, ac dubiæ videri poſſent: III. ut habita ratione attractionis omnium Planetarum, & figuræ etiam non ſphæricæ inveſtigetur num ex gravitatis theoria quæpiam ſæcularis æquatio Lunæ, non autem Terræ deduci poſſit: IV. ut oſtendatur in calculo motuum lunarium non niſi illas quantitates neglectas eſſe, quæ nullum ſenſibilem errorem pariunt: V. ut theoriæ lunaris analyſi promota novi quidpiam hacce in re addatur inventis aliorum Geometrarum.

LI.

APPENDIX (*).

AD THEORIAM LUNÆ.

POst evulgatam priorem partem Cosmographiæ eximium Clarifs. Euleri opus, anno 1772 editum, accepi, in quo ipse adjunctis ad calculi laborem sociis Alberto Filio, ac D.D. Krafft, & Lexell, Theoriam Lunæ ad novas æquationum series ingeniosissime deduxit. Scilicet locum Lunæ definire voluit ope trium coordinatarum, quarum binæ in plano Eclipticæ ad rectum angulum ducerentur, tertia esset eidem plano perpendicularis: ac deinde aliis adjiciendos reliquit calculos alios, quibus Lunæ locus e Terra visus ex loco immobili supputari, & cum tabulis Astronomicis comparari posset. Atque ut priorem Theoriæ analysim absolveret, a tribus æquationibus differentialibus pro coordinatis singulis exorsus, eadem indeterminatarum quantitatum methodo usus est, quam in Tractatu Petropoli edito, ab anno usque 1753, proposuerat, quamque Majerus etiam secutus fuerat in Theoria, quæ Londini prodiit anno 1767. Nimirum Cap. XI., & XII. assumpsit coordinatas ipsas serie aliqua posse exprimi, quæ non nisi angulorum quorumdam sinus, & cosinus involvat. Cumque in æquatione differentiali superesset terminus quidam constans $\psi - m^2 - 2m - \frac{1}{2}$, eumdem statuit $= 0$, ut fieret $\psi = (m+1)^2 + \frac{1}{2}$: & cum alius litteræ ψ valor prodiisset jam ex præcedenti æquatione $\psi = \frac{v}{a^3}$, in qua a erat mediocris distantia Terræ a Sole; difficultatem omnem prævenit §. 74., adnotavitque pro quantitate a satis esse valorem tantum vero proximum, neque omnino valori maximo, & minimo intermedium assumere. Deinde §. 88. obiter tantum monuit in expressione cujuslibet ordinatæ nullos omnino terminos posse occurrere, qui circulares arcus involvant, & quibus continue auctis successu temporis Luna ab orbita proxime circulari, aut ellip. ca in aliam penitus orbitæ formam transeat.

(*) *Appendix ista excerpta est ex Parte Altera Cosmographiæ prioris editionis.*

At vero in aſſumpta quavis Theoriæ Lunaris ſerie, quocumque demum ordine, ac modo evolvenda ſit, præſtaret primum directe oſtendere æquationem differentialem Problematis, & analyſim omnem propoſitam illi incommodo minime obnoxiam eſſe ut ad circularinm arcuum formulas deducat: Præſtaret etiam quantitatem motus apogæi ex prioribus æquationibus, nullis aliis hypotheſibus adjectis, directe eruere: qnod qua ratione præſtiterit Eulerus minime apparet, Majerns autem videtur ex obſervationum conſenſu potius collegiſſe. Denique in Problemate difficillimo, quod diu jam ſummos omnes Mathematicos exercuit, præſtaret modo calculorum luxum temperare, brevitati, ac ſimplicitati conſulere, atque omnia ita exponere, ut lector per ſe ipſum calculorum ſeriem recognoſcere, ac facile poſſit perſequi. Quæ tria in Lib. VI. ut ſimul præſtari poſſent, æqnatio differentialis ad eam formam deducta eſt ut non tertiam tantum, ſed etiam ſextam vectoris radii poteſtatem involveret. In ea enim æquationis totius diſpoſitione ſecundus terminus, quem vis mediocris a Sole in Lunam juxta vectorem radium exercita ſuppeditaverat, apogæi motum obſervationibus ſatis conformem exhibet, reliquis ejuſdem generis terminis proxime ſe deſtruentibus, qui aut partem aliquam obvolvebant vis perpendicularis radio, aut differentiam gravitatis, & vis centrifugæ: aliis vero æquationibus omnibus & veri, & medii motus e Terra viſi ſingillatim, ac perſpicue explicatis coefficiens alterius termini, qui ad expreſſionem circularium arcuum deduceret, tam parvus prodiit, ut non niſi ex minimis elementorum conſtantium variationibus in tam multiplici approximationum ſerie poſſit repeti.

Methodum omnem cum ſuperiore anno noſtrates aliquot, & exteri etiam Geometræ pervolviſſent, Cl. Bernareggius, qui Tunonii in Sabaudia Matheſeos Profeſſor eſt, litteris nuper ad me datis monuit alios perquam exiguos eſſe terminos, quorum ratione habita idem coefficiens ad minorem adhuc fractionem reduceretur. Ipſe calculis omnibus Theoriæ Lunaris ſummo ſtudio recognitis animadvertit in Probl. V. ex evolutione termini
$-\frac{3}{4}\delta n^2 x^4 .$ ſin. $(z - 2n + m) . z$ educi etiam terminum

15 δ

$\frac{15}{8}\,\delta\,\phi^2 n^2 .\ \text{ſin.}\ (2c + 2n - m - 2).\ z$, eoque integrato exſurgere $0.0000091\,(1 - \text{coſ.}\ (2c + 2n - m - 2).\ z)$. Pariter ex termino $-\frac{15\ n^2 x^2}{8\,a} .\ \text{ſin.}\ (3 - 3n).\ z$ primo exſurgeret

$-\frac{225\ \phi^2 n^2}{32\,a} .\ \text{ſin.}\ (3 - 3n - 2c).\ z$, ac deinde

$-\ 0.00000039\,(1 - \text{coſ.}\ (3 - 3n - 2c).\ z)$. Quare cum coefficientes alii, qui ſimili modo ſupputari poſſent, ad decimales inferiorum ordinum pertineant, in corollario problematis ejuſdem quantitati coſtanti $-\ 0.0051615$ adjungenda eſſet $+\ 0.0000087$, ac fieret $F = -\,0.0051528$. & $\frac{2\,F}{1 + \frac{1}{2}\phi^2} = -\,0.01029014$.

His poſitis cum in æquatione differentiali Probl. III., diviſione facta per $1 - 3n^2\phi^2$, ſuperſit terminus conſtans $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n^2\phi^2$, ſubſtitutis rurſus ſpeciebus pro æquatione reducta in Probl. VI. emerget

$$\frac{ddt}{dz^2} + (1 - 3n^2).\,t = -\,0.00746732 - 0.01029014\,(3 - \tfrac{1}{2}\phi^2).\,t - 2t$$
$$+ \frac{(c^2 - 1 - 3n^2 - (4 - c^2 - 15n^2)t).\ \phi.\ \text{coſ.}\ cz}{1 + \frac{1}{2}\phi^2}$$
$$-\ 0.03087042.\ \phi.\ \text{coſ.}\ cz - \tfrac{1}{2}\phi^2 t.\ \text{coſ.}\ 2cz\ \&c.$$

Hujus æquationis integratione pro differentia vectoris radii primo exſurgeret quantitas conſtans $-\frac{0.00746732}{1 - 3n^2}$. Jam vero cum ſumma quantitatum omnium conſtantium, ſeu diſtantia mediocris Lunæ a Terra in præcedentibus omnibus reſolutionibus pro unitate jam ſumpta ſit, nec niſi ea differentiæ ejuſdem portio T requiratur, quæ ob perturbatrices vires inducitur, quæque ſolis exprimitur variabilibus quantitatibus; ad quantitatem conſtantem inde eliminandam fiat

$$t = T - \frac{0.00746732}{0.9832141} = T - 0.0075948$$
$$-\ 0.0308241115.\,t = 0.0002341 - 0.0308241115.\ T$$
$$-\ 2t^2 = -\,0.0001152 + 0.0303792 - 2\,T^2.$$

Hiſce terminis ſubſtitutis in differentiali æquatione ſupererit tantum con-

conſtans o, 0001189, eaque proxime deſtruetur aliis quantitatibus; quæ in expreſſione termini $-2T^2$ debent occcurrere. Nam ſi fiat $T = 0.0107.\text{coſ.}(2-2n-c).z - 0.0066.\text{coſ.}(2-2n).\zeta$, evoluto primum termino $-2T^2$ exſurget quantitas conſtans -0.000158.

Collectis itaque aliis terminis, atque his rurſus minutiis, & inde ortis correctionibus neglectis, fiet ultimo reducta æquatio

$$\frac{ddT}{dz^2} + 0.983659.T = -0.03087042.\varphi.\text{coſ.}cz - \tfrac{1}{2}\varphi^2 T.\text{coſ.}2c\zeta - 2T^2$$
$$+ (c^2 - 1 - 3n^2 - (4 - c^2 - 15n^2)(T - 0.0075948))\frac{\varphi.\text{coſ.}c\zeta}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}\text{\&c.}:$$

ubi cum ſecundi termini coefficiens ſit major partibus o. 0004876 ut apogæi motum obſervationibus congruentem exhibeat, conquiſivi undique ſi quo alio exiguo termino ſupputato coefficiens ad quantitatem o. 9831714 proxime reduci poſſet. Deprehendi vero quod ſi in expreſſione quantitatis x' ex Probl. III. adjiceretur terminus $3t^2$, in expreſſione quantitatis $\frac{2x'\int\omega x' d\zeta}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}$, in Pr. VI., occurreret inſuper terminus

$$\frac{6F.t^2}{1+\frac{1}{2}\varphi^2} = -0.01029014, \times -0.0075948 \times 6T = 0.000468.\ T.$$

Utrimque igitur ſubductis quantitatibus æqualibus, in æquatione eadem differentiali ſupererit ſecundus terminus o. 9831901. T, exceſſuſque omnis erit dumtaxat o. 0000187, neque amplius apogæi lunaris motus ex generali æquatione directe erutus ab aſtronomicis obſervationibus ſenſibiliter diſſentiet.

Quod ſi ex ipſis obſervationibus aſſumatur $c^2 = 0.9831714$, ac fiant de more ſubſtitutiones aliæ, prodibit alter æquationis differentialis terminus

$$(c^2 - 1 - 3n^2 + 0.0075948(4 - c^2 - 15n^2))\frac{.\varphi.\text{coſ.}c\zeta}{1+\frac{1}{2}\varphi^2} =$$

o. 00120696..coſ. cz, copulandoque terminum $-0.03087042.\varphi.\text{coſ.}c\zeta = -0.00168861.\text{coſ.}c\zeta$, in æquatione eadem habebitur dumtaxat terminus $-0.00048165.\text{coſ.}c\zeta$, ac denique adjungendo alios nominis ejuſdem terminos, qui in Scholio Cap. IV. ex evolutione quantitatum $2x'\int\omega x' d\zeta$, $\varpi x'$, $-2T^2$ &c. edu-

educebantur, supererit o. 00000267 . cos. cz. Si in expressione quantitatis x' habeatur ratio termini $6\varphi t$. cos. cz, loco producti $\frac{2F \cdot x'}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}$ adjiciendus insuper esset terminus o. 00002565 . cos. cz: atque is proxime destrueretur termino alio, qui ex indicato Scholio, atque ex termino $\frac{33}{2} n^2 T$. cos. $(2-2n).z$ erueretur in locum differentiæ T substituendo quantitatem $-$o. 0005895 . cos. $(2-2n+c).z$. Simili modo cum in ejusdem Scholii correctionibus substituissem terminos alios, qui differentiam radii vectoris exprimunt, positivasque omnes, ac negativas fractiones simul collegissem, nihil emergere inveni, cujus ratio habenda esset. Ubi vero ad hujusmodi minutias calculus deductus est, satis jam analystæ esse debet. Qui methodum Libri ejusdem sexti perspectam habeat, facile poterit & alios terminos inferiorum ordinum quærere, & variatis aliquantulum constantibus elementis approximationum seriem reassumere, & calculi diligentiam exercere quantum voluerit. Qui in posterum Theoriæ Lunari operam dabunt Lectores monendi sunt, quod jam aliis moram injecit, in toto Lib. VI. non alterutrum tantum, sed binos simul terminos signis $\pm$ designatos esse accipiendos, ut ex contextu ipso colligitur.

LI-

LIBER SEPTIMUS.

DE THEORIA OMNIUM PLANETARUM.

ALias eſſe cæleſtium aliorum corporum inæqualitates, quæ pendent ex vario eorumdem aſpectu inter ſe invicem, jam diu Aſtronomis innotuit. Comparando obſervationes Hevelii anno 1672. habitas cum aliis anni 1731. obſervationibus, motus medius Saturni ſingulis annis Julianis 59, & uno die prodit duarum integrarum revolutionum, atque inſuper 1° 44′ 50″. Obſervationes aliæ annorum 1686., & 1745. inter ſe comparatæ eodem tempore medium Saturni motum duarum revolutionum exhibent adjecto dumtaxat 1° 39′ 2″; ſcilicet 6′ breviorem quam ex prioribus obſervationibus prodierit. Adnotandum eſt autem priorum obſervationum tempore Saturno fere oppoſitum fuiſſe Jovem: anno 1686. diſtaſſe a ſe invicem duos Planetas $47\frac{1}{2}$°, & 40° anno 1745: quod plane indicat aliquam Saturni inæqualitatem, quæ ex vario Jovis aſpectu pendet. Pariter anno 1686. error tabularum erat 21′ 9″, & anno 1745. erat 36′ 12″. Anno 1716. duobus jam dictis intermedio, cum error 28′ eſſe debuiſſet, 36′ adhuc inventus eſt. Cui porro cauſſæ diſcrimen 8′ tribuendum erat quam Jovi, qui anno 1716. tribus ſignis a Saturno diſtabat, dimidio ſcilicet ſigno magis quam aliis duobus annis? Et plane comparando obſervationes eodem aſpectu habitas evaneſcit hæc inæqualitas, atque eſt error annorum numero proportionalis.

Caſſinus etiam cum anno 1743. menſe Februario Saturni, & Jovis conjunctionem obſervaſſet, deprehendit longitudinem Saturni 12′ 38″ minorem, & longitudinem Jovis 2′ 33″ majorem fuiſſe quam ferrent tabulæ: & differentiam hujuſmodi tantam eſſe cenſuit ut in errorem tabularum minime refundi poſſet. Præcipuas Jovis inæqualitates alii Aſtronomi, atque in primis Majerus, collatis inter ſe invicem obſervationibus, accurate definierunt. Juxta Majerum ſi ſit X media diſtantia Jovis, & Saturni, anomalia media Saturni Y, Jovis Z, erunt æquationes præcipuæ medii motus Jovis in longitudinem

—1′ 37″. fin. X	—2′ 23″. fin. 2 X — Z
+3′ 50″. fin. X	—47″. fin. 3 X — Z
—1′ 30″. fin. 2 X — Y	—56″. fin. X — Y.

In conjunctione Martis, & Jovis quæ die 29. Junii anno 1727. contigit, & cujus obfervationem retulit Manfredius Par. 3. To. 2. Bononienfis Academiæ, longitudines Martis ante, & poft conjunctionem majores prodierunt quam ex tabulis: ita quidem ut diebus 25. Maji, & 4., ac 5. Junii, quorum dierum obfervationes accuratiffimæ ipfi Manfredio vifæ funt, longitudo Martis 39″, 3″, 45″ major deprehenfa fit quam juxta Wifthoni tabulas effe oportebat. Deinde motum Martis, qui juxta eafdem tabulas debebat effe 1° 24′ 10″ duobus diebus conjunctionem antecedentibus, & 1° 23′ 52″ diebus aliis proxime confequentibus, cum obfervationibus comparavit Manfredius: & quidem juxta illas, quas primo inftituit Martem ad Solem referendo, motus duorum antecedentium dierum prodiit 1° 24′ 14″, & 1° 22′ 54″ motus duorum proxime confequentium: juxta alias autem obfervationes Martis ad Arcturum relati prodierunt bini motus 1° 24′, & 1° 23′ 34″, ac differentiam omnem exiguam inde oriri potuiffe cenfuit Manfredius, quod $\frac{1}{4}$″ temporis erratum fit in determinando Arcturi, vel Martis tranfitu.

Præter has vero, & confimiles alias inæqualitates, quæ pendent ex vario afpectu Planetarum, & datis periodis revertuntur, quædam infuper inæqualitates funt, quæ procedunt femper eodem ordine, & continue augeri videntur fucceffu temporis. Phænomenon hujus generis præcipuum eft quod Saturni revolutiones circa Solem fiant femper diuturniores, & motus medius Planetæ ipfius dato quocumque tempore minor femper fuccedentibus revolutionibus evadat; & contra quod imminuatur periodicum tempus Jovis, & motus medius augeatur. Hireus in tabulis motum medium Saturni 6″ annis fingulis imminui ftatuit, & 1′ 40″ tempore annorum mille: quo dato fuas, Tychonicafque obfervationes conciliavit inter fe invicem, & vetuftiores alias Ptolemæi, quæ 2°, aut 3° a fuis diffentiebant, veluti indiligentes, ac dubias penitus dereliquit. Hallejus fpectatis omnibus obfervationibus cenfuit decrementum omne annis mille effe 2° 19′, atque augeri femper in duplicata ratione temporum: Caffinus vero

11″

11″ annis ſingulis, atque annis mille 3° 3′ 20″ eſſe voluit, nimirum tempori proportionalem.

Caſſinus etiam in actis Pariſienſis Academiæ anni 1746. contendit dimidio ſecundo annis ſingulis motum medium Jovis augeri, & 16′ 40″ integris annis bis mille: Hallejus autem in tabulis motum ipſum 3° 49′ eodem tempore fuiſſe auctum cenſuit: quæ Hallejana æquatio pluribus Aſtronomis nimia viſa eſt. Nuper in actis anni 1768. Clariſs. Bailly veteribus omnibus obſervationibus, ac recentioribus ſummo ſtudio collatis inter ſe invicem accelerationem annuam medii motus Jovis 0. 1733″ conſtituit, eamque augeri dixit in duplicata ratione temporum. Longitudo Martis in oppoſitione anni 1751. paulo major deprehenſa eſt, quam juxta Halleji tabulas prodierit: paulo minor in oppoſitione anni 1745., & in oppoſitione 1741. fere eadem: unde motum medium Martis ſatis accurate iiſdem tabulis exhiberi cenſendum eſt. Motus medius Veneris, & Mercurii ipſe etiam ſatis conſtans deprehenditur.

Ad medium motum Terræ, & ad ſolarem annum quod pertinet, Ricciolius Lib. I. Aſtron. Cap. 4. ex vetuſtiſſimis Hipparchi obſervationibus juxta refractionum leges correctis, atque ex tempore æquinoctii anno 1655. Bononiæ a ſe obſervati ſolarem annum collegit eſſe ſecundorum 48 ultra 365^d 5^h 48′, quam fere anni quantitatem Tycho, Keplerus, Flamſteedius, & Newtonus ſtatuerunt. Si cum aliis recentioribus obſervationibus comparentur quæ a Walthero inſtitutæ ſunt decimo quinto ſæculo exeunte, ultra illud tempus ſecunda tantum $46\frac{1}{2}$ excreſcere videntur. Caſſinus ex pluribus æquinoctiis, quæ Uraniburgi, Bononiæ, ac Pariſiis obſervaverat, ſecundorum numerum ad 41 reduxit. Caillius in Lectionibus Aſtronomicis comparatione obſervationum a ſe quidem anno 1749., & a Caſſino die 28. Martii anno 1657. inſtitutarum ſecunda conſtituit 43: & in actis Pariſienſibus anni 1750. obſervationes Picarti cum propriis comparando, accipiendoque medium ex omnibus, conſtituit tantum 40. Majerus autem, ut ad calcem prioris libri adnotavimus, cum obſervationes omnes hujuſmodi, veteres, recentioreſque ſumma diligentia correctas contuliſſet inter ſe, accelerationem quidem medii motus Lunæ certo evicit, nihil autem inde potuit colligere, quod accelerationem medii Telluris motus, & imminutionem aliquam annui temporis ſimiliter evinceret.

CAPUT PRIMUM.

DE THEORIA PLANETARUM INFERIORUM; QUI PERTURBANTUR A SUPERIORIBUS.

PROBLEMA I.

INvenire vires omnes, quibus Planetæ inferiores perturbantur a ſuperioribus.

Si quantitates materiæ Solis, & Planetæ ſuperioris, inferiorisſque ſint ordine 1, M, M', & radius vector inferioris orbitæ vocetur x, erit $\frac{1+M'}{x^2}$ vis omnis, qua Sol, & Planeta inferior in ſe invicem tendent. Et quia ratio $M':1$ adeo eſt exigua, ut neglecta vi $\frac{M'}{x^2}$ nulla æquationum omnium variatio prodeat, quæ ſit ſenſibilis; ſi gravitas inferioris Planetæ in Solem ſit $\frac{1}{x^2}$, eaque in mediocri diſtantia accipiatur loco unitatis, atque inſuper $1:n$ ſit ratio angularium motuum Planetæ inferioris, ſuperiorisſque erit $\frac{x}{2a^3 M} = \frac{n^2 x}{2M}$, acceptiſque cæteris omnibus ut in Cap. V. Lib. V., univerſim erit mediocris vis perturbatrix a Planeta ſuperiore juxta vectorem radium inferioris orbitæ exercita

$$\frac{n^2 x}{2M}\left(1+\frac{9x^2}{8a^2}+\frac{75x^4}{64a^4}\right)$$

Quod ſi vero in inferiori, & ſuperiori orbita excentricitates ſint φ, & δ: anomaliæ motus cz, & mz: motus veri ζ, & $n\zeta + 2\varphi n$. ſin. $c\zeta - 2\delta$. ſin. mz; coſinu anguli STL eadem ratione reſoluto, qua in Probl. IV. Lib. VI. uſi ſumus, neglectiſque aliis inferiorum ordinis terminis, erit vis reliqua juxta vectorem radium exercita

$$\pi = \frac{n^2 x^2}{2aM}\left(9+\frac{75}{8a^2}\right).\ \text{coſ.}\ (1-n).\zeta$$

$$+\frac{n^2 x}{2M}\left(3+\frac{5}{2a^2}+\frac{315}{128a^4}\right).\text{ cof. }(2-2n).z$$

$$+\frac{15\,n^2 x^2}{8\,a\,M}.\text{ cof. }(3-3\,n).\,z$$

$$-\frac{3\,\delta\,n^2}{2\,M}.\text{ cof. }m\,z$$

$$-\frac{9\,\delta\,n^2 x^2}{8\,a\,M}.\text{ cof. }(1-n+m).\,z$$

$$-\frac{27\,\delta\,n^2 x^2}{8\,a\,M}.\text{ cof. }(1-n-m).\,z$$

$$+\frac{3\,\delta\,n^2 x}{4\,M}.\text{ cof. }(2-2n+m).\,z$$

$$-\frac{21\,\delta\,n^2 x}{4\,M}.\text{ cof. }(2-2\,n-m).\,z.$$

Similibus etiam fubftitutionibus eruetur vis perpendicularis radio

$$\omega=-\frac{3\,n^2 x^2}{8\,a\,M}\left(1+\frac{5}{8a^2}\right).\text{ fin. }(1-n)\,z$$

$$-\frac{n^2 x}{2\,M}\left(3+\frac{5}{4a^2}+\frac{105}{128a^4}\right).\text{ fin. }(2-2\,n).\,z$$

$$-\frac{15\,n^2\,x^2}{8\,a\,M}.\text{ fin. }(3-3\,n).\,z$$

$$+\frac{3\,\delta\,n^2 x^2}{8\,a\,M}.\text{ fin. }(1-n+m).\,z$$

$$+\frac{9\,\delta\,n^2 x^2}{8\,a\,M}.\text{ fin. }(1-n-m).\,z$$

$$-\frac{3\,\delta\,n^2 x}{4\,M}.\text{ fin. }(2=2\,n+m).\,z$$

$$+\frac{21\,\delta\,n^2 x}{4\,M}.\text{ fin. }(2-2\,n-m).\,z.$$

COROLLARIA.

I. His itaque affumptis perturbatricium virium expreffionibus, & ob parvitatem neglectis quadratis excentricitatis, inclinationifque uniufcujufque orbitæ ad eclipticam, loco æquationis differentialis, qua in Probl. II. Lib. VI. ad definiendam lunarem orbitam ufi fu-

ſumus, pro ſupputandis Planetarum inferiorum perturbationibus æquationem aliam habebimus

$$\frac{ddx}{d\zeta^2} - \frac{2dx^2}{xd\zeta^2} = x - x^3 + \frac{n^2x^4}{2M}\left(1 + \frac{9x^2}{8a^2} + \frac{75x^4}{64a^4}\right)$$
$$+ \varpi x^4 + 2x^3 \int \omega x^3 d\zeta - \omega x^3 . \frac{dx}{d\zeta}.$$

II. Et cum juxta Probl.III. Lib. VI. ſit $-\omega x^3 . \frac{dx}{dz} = \omega \phi x^3 .$ ſin. $c\zeta$, ac ſit inſuper $-\frac{2dx^2}{xd\zeta^2} = 4\phi .$ ſin. $cz . \frac{dt}{dz}$, neglectis inferiorum ordinum terminis, pro æquatione orbitarum inferiorum, quæ a Planetis ſuperioribus perturbantur, habebimus

$$\frac{ddx}{d\zeta^2} = x - x^3 + \frac{n^2x^4}{2M}\left(1 + \frac{9x^2}{8a^2} + \frac{75x^4}{64a^4}\right) - 4\phi . \text{ſin. } c\zeta . \frac{dt}{d\zeta}$$
$$+ \varpi x^4 + 2x^3 \int \omega x^3 d\zeta + \omega \phi x^3 . \text{ſin. } c\zeta .$$

III Si fiat $x = 1 + \phi .$ coſ. $cz + t$, iiſdemque ſemper fractionibus neglectis reſolvantur de more quantitates x^3, x^4, x^7, x^8, & termini omnes ordinentur, fiet differentialis æquatio problematis

$$\frac{ddt}{dz^2} + \left(1 - \frac{n^2}{2M}\left(5 + \frac{63}{8a^2} + \frac{675}{64a^4}\right)\right) . t$$
$$= \frac{n^2}{2M}\left(1 + \frac{9}{8a^2} + \frac{75}{64a^4}\right) + \phi . \overline{c^2 - 1} . \text{coſ. } c\zeta - 4\phi . \text{ſin. } c\zeta . \frac{dt}{d\zeta}$$
$$+ \frac{n^2}{2M}\left(5 + \frac{63}{8a^2} + \frac{675}{64a^4}\right) . \phi . \text{coſ. } c\zeta - 2\phi t . \text{coſ. } cz - t^2$$
$$+ \varpi x^4 + 2x^3 \int \omega x^3 d\zeta + \omega \phi x^4 . \text{ſin. } c\zeta .$$

PROBLEMA II.

Iiſdem poſitis motum aphelii inferiorum orbitarum invenire.

Sit $-A$ quantitas conſtans, quæ exſurgit ex integratione termini $2\omega x^3 d\zeta$, atque ex reſolutione termini $2x^3 \int \omega x^3 d\zeta$ primo eruantur quantitates $-2At - 2\phi A .$ coſ. $c\zeta$: ac deinde fiat

$$t = \frac{n^2}{2M}\left(1 + \frac{9}{8a^2} + \frac{75}{64a^4}\right) - A + T .$$

nimirum T variabilem tantum vectoris radii differentiam illam deſignet, quæ a viribus perturbatricibus inducitur. Factis ſubſtitu-

tu-

tutionibus, ac prioribus tantum exscriptis terminis, qui quantitates T, & cos. $c\zeta$ involvunt, prodibit

$$-t^2 = -\frac{n^2}{M}\left(1 + \frac{9}{8a^2} + \frac{75}{64a^4}\right) \cdot T + 2AT$$

$$-2\varphi t \cdot \text{cos.}\, c\zeta = -\frac{n^2}{M}\left(1 + \frac{9}{8a^2} + \frac{75}{64a^4}\right) \cdot \varphi \,\text{cos.}\, cz + 2\varphi A. \text{cos.}\, c\zeta.$$

Quod si insuper $2x^2 \int \omega x^2 dz$ designare in posterum intelligatur terminos alios variabiles, omissis binis prioribus, quos indicavimus, erit integra æquatio differentialis

$$\frac{ddT}{d\zeta^2} + \left(1 - \frac{n^2}{M}\left(\frac{1}{2} + \frac{45}{16a^2} + \frac{525}{128a^4}\right)\right) \cdot T$$

$$= \frac{n^2}{M}\left(\frac{1}{2} + \frac{45}{16a^2} + \frac{525}{128a^4}\right) \cdot \varphi \cdot \text{cos.}\, c\zeta + \varphi \cdot \overline{c^2 - 1} \cdot \text{cos.}\, c\zeta$$

$$+ \pi x^2 + 2x^2 \int \omega x^2 dz + \omega \varphi x^2 \cdot \text{sin.}\, cz$$

$$-2\varphi T. \text{cos.}\, c\zeta - 4\varphi. \text{sin.}\, c\zeta \cdot \frac{dT}{d\zeta}.$$

Primo igitur si fiat $c = 1$, & motus ad ellipsim illam referatur, quæ sine viribus perturbatricibus describeretur in plano immobili, erunt priores integratæ æquationis termini

$$T = -\varphi \cdot \text{cos.}\, z + \varphi \cdot \text{cos.} \sqrt{\left(1 - \frac{n^2}{M}\left(\frac{1}{2} + \frac{45}{16a^2} + \frac{525}{128a^4}\right)\right)} \cdot \zeta:$$

atque ita in expressione vectoris radii evanescet terminus φ. cos. ζ; & loco ipsius succedet alius, qui anomaliæ motum angulari motu circa focum exhibebit minorem in ratione subduplicata $1 - \frac{n^2}{M}\left(\frac{1}{2} + \frac{45}{16a^2} + \frac{525}{128a^4}\right) : 1$. Hoc autem posito anomaliæ motu si fiat $c^2 = 1 - \frac{n^2}{M}\left(\frac{1}{2} + \frac{45}{16a^2} + \frac{525}{128a^4}\right)$, proposita æquatio differentialis hanc aliam formam induet

$$ddT + c^2 T = \varpi x^2 + 2x^2 \int \omega x^2 d\zeta + \omega \varphi x^2 \cdot \text{sin.}\, c\zeta$$
$$-2\varphi T \cdot \text{cos.}\, cz - 4\varphi \cdot \text{sin.}\, cz \cdot \frac{dT}{dz}.$$

COROLLARIA

Si requiratur motus aphelii Jovis, qui actione Saturni gignitur, & massæ Saturni, & Solis sint inter se ut 331 : 1000000, & sit

sit insuper $\frac{b}{a} = \frac{520098}{954007} = 0.545$, erit $c^2 = 0.999856$, & $c = 0.999928$: adeoque angularis motus Jovis ad aphelii motum se habebit ut $1 : 0.000072$, & fiet singulis revolutionibus aphelii ipsius progressus juxta signorum ordinem $93.3''$. Si ratio mediocrium distantiarum Jovis, & Saturni a Sole assumatur ex lege temporum periodicorum, prodibit $c = 0.9999273$, ac fiet singulis revolutionibus aphelii motus $94.2''$, & annis singulis fere $8''$.

II. Pariter si massæ Jovis, & Solis sint inter se ut $937 : 1000000$; motus annuus aphelii Terræ ob vim Jovis erit circiter $6\frac{1}{2}''$. In Planetis aliis inferioribus cum possint negligi omnes seriei termini præter primum, motus apsidum Jovis actione genitus revolutionibus singulis erit minor in duplicata ratione temporum periodicorum, sive in ratione triplicata distantiarum: & motum omnem augendo in ratione temporum, annuus aphelii motus fiet tempori periodico proportionalis. Erit itaque annuus aphelii motus in orbita Veneris $8''$, & in Mercurii orbita $3''$. Simili modo progressus apsidum Martis annis singulis erit circiter $13''$.

PROBLEMA III.

Æquationem eamdem differentialem evolvere, atque explicare.

Inprimis si eadem methodo Probl. V. Lib. VI. termini singuli resolvantur, fiet

$$
\begin{aligned}
2\int \omega x^2 dz = & \frac{3n^2}{4aM.\overline{\overline{1-n}}}\left(1+\frac{5}{8a^2}\right).\cos.(1-n).z \\
& \pm \frac{n^2}{2M.\overline{\overline{1-n}}}\left(3+\frac{5}{4a^2}+\frac{105}{128a^4}\right).\cos.(2-2n).z \\
& + \frac{5n^2}{4aM.\overline{\overline{1-n}}}.\cos.(3-3n).z \\
& + \frac{\varphi n^2}{M.(2-2n\mp c)}\left(6+\frac{5}{2a^2}\right).\cos.(2-2n\mp c).z \\
& - \frac{3\delta n^2}{4aM}.\cos.(1-n+m).z \\
& - \frac{9\delta n^2}{8aM.\overline{\overline{1-2n}}}.\cos.(1-n-m).z
\end{aligned}
$$

$\pm$

$$+\frac{3\,\delta n^2}{2M.\overline{2-n}}\,.\cos.(2-2n+m).z$$

$$-\frac{21\,\delta n^2}{2M.\overline{2-3n}}\,.\cos.(2-2n-m).z.$$

Hisce autem terminis omnibus ductis in $x^2 = 1+2\varphi.\cos.\,cz$; solus exsurget terminus qui addi debeat

$$\frac{\varphi n^2}{2M.\overline{1-n}}\left(3+\frac{5}{4a^2}+\frac{105}{128a^4}\right).\cos.(2-2n\mp c).z.$$

Pariter terminis aliis, qui vim perturbatricem ϖ exprimunt, ductis in x^4, solus adjiciendus erit terminus

$$\frac{\varphi n^2}{M}\left(3+\frac{5}{2a^2}+\frac{315}{128a^4}\right).\cos.(2-2n\pm c).z$$

Atque ita terminis omnibus simul collectis, atque ordinatis fiet denique differentialis æquatio Problematis

$$\frac{ddT}{dz^2}+c^2T=\frac{3n^2}{8aM.\overline{1-n}}\left(5-2n+\frac{35-25n}{8a^2}\right).\cos.(1-n).z$$

$$+\frac{n^2}{2M.\overline{1-n}}\left(6-3n+\frac{15-10n}{4a^2}\right).\cos.(2-2n).z$$

$$+\frac{5n^2}{8aM.\overline{1-n}}(5-3n).\cos.(3-3n).z$$

$$+\frac{3\varphi n^2}{M}\left(\frac{5-3n}{4-4n}+\frac{2}{1-n}\right).\cos.(2-2n-c).z$$

$$+\frac{3\varphi n^2}{M}\left(\frac{7-5n}{4-4n}+\frac{2}{3-2n}\right).\cos.(2-2n+c).z$$

$$+\frac{3\,\delta n^2}{2M}\left(\frac{4-n}{2-n}\right).\cos.(2-2n+m).z$$

$$-\frac{21\,\delta n^2}{4M}\left(\frac{4-3n}{2-3n}\right).\cos.(2-2n-m).z$$

$$-\frac{15n^2\delta}{8aM}.\cos.(1-n+m).z$$

$$-\frac{3\,\delta n^2}{2M}.\cos.\,mz \text{ \&c.}$$

$$-2\varphi T.\cos.\,cz-4\varphi.\sin.\,cz.\frac{dT}{dz}$$

Co-

COROLLARIUM.

Termini omnes priores accurate integrari poffunt, pofteriores autem priorum correctionem exhibent. Quod fi loco differentiæ T affumatur terminus quifpiam formæ $\mu.\ \text{cof.}\ \Delta\,\mathfrak{z}$, fubftitutione facta erit correctio omnis, quæ binis terminis pofterioribus exprimitur $-\varphi\mu(1 \pm 2\Delta).\text{cof.}(\Delta \pm c).\mathfrak{z}$. Terminos alios argumenti $\mathfrak{z} - n\mathfrak{z} + m\mathfrak{z} - cz$ fingillatim in pofteriori libri hujus capite fupputabimus.

PROBLEMA IV.

Invenire differentiam vectoris radii, quæ a viribus perturbatricibus inducitur.

Acceptis de more fummis, & pofito $c^2 = 1$, erit

$$\frac{-n^2\left(6 - 3n + \dfrac{15 - 10n}{4a^2}\right)}{2M.(1-n)(3-8n+4n^2)}$$

coefficiens termini, qui pro argumento habebit $2\mathfrak{z} - 2n\mathfrak{z}$. Hic autem terminus fi loco differentiæ T accipiatur, & pofito $\Delta = 2 - 2n$ fit quam proxime

$$\mu = \frac{3n^2.(2-n)}{2M.(1-n)(3-8n+4n^2)},$$

fiet etiam in differentiali æquatione ultimi corollarii correctio

$$\frac{3\varphi n^2.(2-n)(1 \pm 4 \mp 4n)}{2M.(1-n)(3-8n+4n^2)}.\text{cof.}(2 - 2n \pm c).z.$$

Itaque hujufmodi correctionis ratione habita, reductifque coefficientibus omnibus, atque in reductione ipfa fcribendo n loco m, eadem femper integrationum præcedentium methodo prodibit

$$T = \frac{3n\left(5 - 3n + \dfrac{35 - 25n}{8a^2}\right)}{8aM.(1-n)(2-n)}.\text{cof.}(1-n).z$$

$$-\frac{n^2\left(6 - 3n + \dfrac{15-10n}{4a^2}\right)}{2M(1-n)(3-8n+4n^2)}.\text{cof.}(2-2n).\mathfrak{z}$$

$$-\frac{5n^2(5-3n).\text{cof.}(3-3n).z}{8aM(1-n)(8-18n+9n^2)}$$

$$+\frac{3\varphi n}{4M(1-n)}\left(\frac{5-3n}{4-4n} + \frac{n}{1-2n} - \left(\frac{2-n}{2-2n}\right)\left(\frac{3-4n}{3-8n+4n^2}\right)\right).\text{cof.}(2-2n-c).\mathfrak{z}$$

—

$$-\frac{3\varphi n}{M(8-12n+4n^2)}\left(\frac{7-5n}{4-4n}+\frac{2}{3-2n}+\left(\frac{2-n}{2-2n}\right)\left(\frac{5-4n}{3-8n+4n^2}\right)\right).\text{cos}.(2-2n+c).z$$

$$-\frac{3\delta n^2}{8M(3-4n+n^2)}\left(\frac{4-n}{2-n}\right).\ \text{cos}.\ (2-2n+m).z$$

$$+\frac{7\delta n^2}{4M(1-4n+3n^2)}\left(\frac{4-3n}{2-3n}\right).\ \text{cos}.\ (2-2n-m).z$$

$$-\frac{15\, n^2\delta.\ \text{cos}.\ (1-n+m).z}{8\, a\, M\left(c^2-(1-n+m)^2\right)}$$

$$-\frac{3\delta n^2}{2M(1-n^2)}.\ \text{cos}.\ mz\ \text{\&c.}$$

COROLLARIA.

I. Si loco $\frac{1}{1-n}$ ſcribamus N, bini priores termini cum iis congruent, quos in Problematis Lib. V. alia methodo invenimus. Atque ita ſi motus Terræ ad Jovem referatur, ac fiat $\frac{1}{M} = 0.\ 000937$, $n = \frac{1}{12}$, $a = 51.\ 98$, atque excentricitas orbitæ Jovis δ ſit $0.\ 048$ radii mediocris; ſubſtitutionibus rite factis erit variatio præcipua radii mediocris terreſtris orbitæ vi Jovis genita

$T = 0.\ 0000158.\ \text{coſ}.\ (1-n).z - 0.\ 000009.\ \text{coſ}.\ (2-2n).z$
$- 0.\ 000000468.\ \text{coſ}.\ mz$ &c.

II. Pariter ſi requirantur perturbationes orbitæ Martis ob Jovis actionem genitæ, ac fiat $a = 3.\ 47$, & excentricitas ejuſdem orbitæ aſſumatur partium $0.\ 093$ mediocris diſtantiæ Martis a Sole, erunt variationes præcipuæ ipſius diſtantiæ

$T = 0.\ 00005.\ \text{coſ}.\ (1-n).z - 0.\ 00005.\ \text{coſ}.\ (2-2n).z$
$+ 0.\ 0000327.\ \text{coſ}.\ (2-2n-c).z$ &c.

Variationes aliæ vectoris radii orbitarum Mercurii, & Veneris, ob Terræ, & Jovis actionem genitæ, exiguæ ſunt, & ſimilibus ſubſtitutionibus, eademque methodo ſingulæ ſupputari poſſunt.

III. Si requirantur variationes radii vectoris Jovis, quæ ex Saturni actione oriuntur, iiſdem aſſumptis numeris Cap. III. Lib. V.

II.

& posito $\delta = 0.057$, erit $-\frac{15 n^2 \delta}{8 a M} = -0.000003t288$: ac si insuper juxta Coroll. I. Probl. II. libri hujus fiat $c^2 = 0.9998556$, & juxta Coroll. I. Probl. VII. assumatur $m = (1 - 0.00027).n$, & $n = 0.4027$, erit $1 - n + m = 1 - 0.00010873$, & $c^2 - (1 - n + m)^2 = 0.000073$, atque ita primo eruetur $T = -0,04286.\ \text{cos.}(1 - n + m).\zeta$. Si juxta Coroll. II. Problematis ejusdem assumeretur $m = (1 - 0.000319).n$, eadem calculi serie prodiret $T = -0.02781.\ \text{cos.}\ (1 - n + m).\ z$.

IV. Quia vero alia quævis variatio exigua quantitatum proxime æqualium c^2, & $(1 - n + m)^2$, quæ in denominatore fractionis subduci debent a se invicem, quæque ex tot aliis elementis pendent, longe diversum exhiberet coefficientem illius termini, qui habet pro argumento elongationem, seu differentiam longitudinum Planetæ superioris, inferiorisque addita superioris anomalia; posito $z - n\zeta + m z = \zeta$, quod satis proxime verum est, ad evitandam calculi, & coefficientis incertitudinem præstabit terminos hujus generis, & qui ex viribus perturbatricibus Saturni, & qui ex ellipticitate, atque excentricitate orbitæ Jovis oriuntur, colligere in unam summam, quantitatemque totius æquationis centri ex observationibus determinare, ut Coroll. V. Probl. V. Lib. I. præstitimus.

V. Posito etiam $\varphi = 0.048$, & longius perducta serie alterius termini, qui pro argumento habet $2\zeta - 2nz - c\zeta$, primo occurret coefficiens

$$\frac{n\varphi}{4M(1-n)}\left(\frac{15 - 9n}{4 - 4n} + \frac{6}{1-2n} + \frac{15}{4a^2} + \frac{5}{2a^2(1-2n)}\right) = 0.0001084:$$

deinde vero supputatis terminis $- 0.00061.\ \text{cof.}\ (2 - 2n).\zeta$ &c., & posito $\mu = -0.00061$, $\Delta = 2 - 2n = 1.1946$, aliisque factis substitutionibus, correctionibusque, quas in superiore Problemate indicavimus, pro præcipuis variationibus radii vectoris Jovis habebimus

$$T = 0.000135.\ \text{cof.}\ (1-n).z - 0.00061.\ \text{cof.}\ (2-2n).z$$
$$+ 0.0000765.\ \text{cof.}\ (2 - 2n - c).\zeta - 0.000025.\ \text{cof.}\ (2 - 2n - c).\zeta$$
$$- 0.000154.\ \text{cof.}\ (2 - 2n - m).\zeta - 0.0000337.\ \text{cof.}\ m z.$$

PROBLEMA V.

Iisdem positis invenire æquationes motus inferiorum Planetarum, qui perturbantur a superioribus.

Reassumpta formula, qua in Probl. II., & VIII. Lib. VI. ele-

mentum temporis expreſſimus, neglectiſque quadratis excentricitatis orbitæ inferioris, erit

$$d\,\theta = \frac{x^2\,d\,z}{1+\int \omega\, x^2\, d\, \zeta}$$

$$= (1 + 2\,\varphi.\ \text{cof.}\ c\,z + 2\,\text{T})\,(1 - \int \omega\, x^2\, d\,\zeta).\,d\,z.$$

Quod ſi igitur valor quantitatum T, & $\int \omega\, x^2\, d\,\zeta$ accipiatur ex duobus Problematis præcedentibus, integratione facta tempus omne, ſeu motus medius Planetæ inferioris actione ſuperioris ſpectata evadet

$$\text{Z} = \zeta + 2\,\varphi.\ \text{ſin.}\ c\,\zeta + \tfrac{1}{4}\,\varphi^2.\ \text{ſin.}\ 2\,c\,z\ \&\text{c.}$$

$$+ \frac{3\,n}{4aM.(1-n)^2}\left(\frac{5-3n+\frac{35-25n}{8\,a^2}}{2-n} - \tfrac{1}{2}\,n\left(1+\frac{5}{8a^2}\right)\right).\ \text{ſin.}\ (1-n).z$$

$$- \frac{n^2}{4M.(1-n)^2}\left(\frac{6-3n+\frac{15-10n}{4\,a^2}}{3-8\,n+4\,n^2} + 3 + \frac{5}{4\,a^2}\right).\ \text{ſin.}\ (2-2n).\,z$$

$$- \frac{3\,\delta\,n}{M.(1-n^2}.\ \text{ſin.}\ m\,\zeta\ \&\text{c.}$$

Denique ſi media Planetæ utriuſque diſtantia vocetur X, & ſit Y anomalia media Planetæ ſuperioris, inferioris autem $c\,Z$, ſeu proxime Z, neglectis aliis minoribus deductionibus prodibit

$$\zeta = Z - 2\,\varphi.\ \text{ſin.}\ Z + \tfrac{1}{4}\varphi^2.\ \text{ſin.}\ 2\,Z\ \&\text{c.}$$

$$- \frac{3\,n}{4aM.(1-n)^2}\left(\frac{5-3n+\frac{35-25n}{8\,a^2}}{2-n} - \tfrac{1}{2}n\left(1+\frac{5}{8\,a^2}\right)\right).\ \text{ſin.}\ X$$

$$+ \frac{n^2}{4M.\,(1-n)^2}\left(\frac{6-3n+\frac{15-10n}{4\,a^2}}{3-8\,n+4\,n^2} + 3 + \frac{5}{4\,a^2}\right).\ \text{ſin.}\ 2X$$

$$+ \frac{3\,\delta n}{M.(1-n^2)}.\ \text{ſin.}\ Y\ \&\text{c.}$$

COROLLARIA.

I. Si variationes omnes requirantur, quæ in motu Terræ, ſive ob æquabilem deſcriptionem arearum, ſive ob actionem Jovis haberi debent, iiſdem elementis calculi aſſumptis, quæ in Coroll. IV. Probl. V. Lib. I., & Coroll. I. Probl. IV. libri hujus, erit verus Telluris motus circa Solem $z =$

$z = Z - 1^\circ\ 55 . 5'. \text{ſin.} Z + 1'\ 12''. \text{ſin.} 2 Z$
$- 7''. \text{ſin.} X + 2 . 5''. \text{ſin.} 2 X + 2 . 5''. \text{ſin.} Y.$

II. Cumque actio Jovis in Venerem vix ſit ſenſibilis, ſpectata tantum actione Terræ juxta Probl. IX. Lib. V. erit motus Veneris.

$z = Z - 49'\ 5''. \text{ſin.} Z$
$- 5''. \text{ſin.} X - 10''. \text{ſin.} 2 X:$

ac pariter ſpectata tantum actione Jovis erit motus Martis

$z = Z - 10^\circ\ 38'. \text{ſin.} Z + 37'. \text{ſin.} 2 Z - 3'. \text{ſin.} 3 Z$
$- 24''. \text{ſin.} X + 15 . 5''. \text{ſin.} 2 X$
$- 17''. \text{ſin.} 2 X - Z + 7''. \text{ſin.} X - Y.$

III. Spectata denique Saturni actione pro motu Jovis circa Solem habebimus

$z = Z - 5^\circ\ 32'. \text{ſin.} Z + 10'. \text{ſin.} 2 Z - 25''. \text{ſin.} 3 Z$
$- 1'\ 26''. \text{ſin.} X + 3'\ 44''. \text{ſin.} 2 X$
$- 1'\ 59''. \text{ſin.} 2 X - Z - 6''. \text{ſin.} 2 X + Z$
$+ 1'\ 39''. \text{ſin.} 2 X - Y + 34''. \text{ſin.} Y.$

SCHOLION.

Cum igitur inveſtigationibus omnibus a Luna ad Planetas inferiores traductis, qui perturbantur a ſuperioribus, plures quidem ſerierum terminos ſupputare oporteat, ſed plures etiam quantitates, ac correctiones ſint negligendæ, ut quæ ex quadrato excentricitatis, motu apſidum, & nodorum, atque inclinatione orbitarum pendent; differentialis æquatio problematis ita diſponi potuit, ut quintam tantum vectoris radii poteſtatem involveret. Quo dato, & collectis ſimul quantitatibus omnibus, quæ coefficientem ſecundi æquationis ejuſdem termini conſtituunt, aphelii motum revolutionibus ſingulis eſſe invenimus in Terra quidem $6\frac{1}{2}''$, in Jove autem $94''$. Eulerus in diſſertatione de perturbatione motus Planetarum, quæ anno 1756. a Pariſienſi Academia præmium retulit, motum annuum aphelii Terræ invenit eſſe $6''\ 57'''$: in diſſertatione autem alia de inæqualitatibus Jovis, & Saturni, quæ obtinuit præmium anno 1752., motum aphelii Jovis revolutionibus ſingulis invenit $114''$. D la Grange To. III. Academiæ Taurinenſis motum eumdem ſupputavit $86\frac{1}{4}''$: quos inter numeros, quem pro aphelii motu deprehendimus, eſt fere medius. Unicus etiam hac noſtra methodo valor eruitur pro motu

 aphe-

aphelii orbitarum inferiorum æque, ac superiorum: nec nisi unicus valor ipse vere esse potest. Terminus alius, qui pro argumento habet elongationem Planetæ superioris ab inferiore addita superioris ipsius Planetæ anomalia, quique pro aphelii motu valorem alterum exhibere visus est summis Geometris la Grange, & Alembert To. V. & VI. Opusc. Mathem., si singillatim methodo hac nostra supputetur, ut in Coroll. III. & IV. Probl. V. præstitimus, non nisi illam variationem exprimit æquationis centri, quæ a viribus perturbatricibus inducitur. Æquationes aliæ mediorum motuum Jovis, Martis, Terræ, ac Veneris, quas similiter ex generali solutione problematis collegimus, proxime cum iis congruunt, quas Authores alii exhibuerunt. Priores æquationes medii motus Jovis, quas supputaverat Eulerus in dissertatione jam memorata anni 1752., reductis numeris esse debent $-1' 32''. \text{sin.} X + 3' 48''. \text{sin.} 2X$. Eulerus etiam in dissertatione alia anni 1756. æquationes motus Terræ constituit $-7.06''. \text{sin.} X + 2.67''. \text{sin.} 2X$: eosdemque fere numeros exhibuit Clairaut in actis Parisiensis Academiæ anni 1754. Theoriam Martis D. la Lande exposuit in actis anni 1759., atque in subsequenti anno theoriam Veneris. Et quidem posito quod massa Terræ sit $\frac{1}{169282}$ quantitatis materiæ Solis, æquationes Veneris statuit $-9.6''. \text{sin.} X - 22''. \text{sin.} 2X$. Martis vero æquationes definivit ipse

$-25.74''. \text{sin.} X + 12.21''. \text{sin.} 2X$
$+9.25''. \text{sin.} X - Z - 17.62''. \text{sin.} 2X - Z$.

CAPUT SECUNDUM.

DE THEORIA PLANETARUM SUPERIORUM, QUI PERTURBANTUR AB INFERIORIBUS.

PROBLEMA VI.

INvenire vires, quibus Planetæ superiores perturbantur ab inferioribus.

Sit excentricitas inferioris Planetæ φ, superioris δ, & motus illius quidem z, hujus autem $nz + 2\varphi n. \text{sin.} cz - 2\delta. \text{sin.} mz$: adeoque

eoque ſinus, & coſinus anguli STL ſemel, ac bis accepti iiſdem adhuc formulis exprimantur, quas in Probl. IV. Lib. VI. tradidimus. Deinde vero, poſitis omnibus ut in Probl. X. Lib. V., ſi loco b ſcribamus x, & $a(1+\varphi.\text{coſ.}\,cz)$ loco a, erit mediocris vis perturbatrix, quæ gravitati Planetæ ſuperioris actione inferioris adjicietur $\frac{3a^2}{4Mx^4}\left(1+\frac{15a^2}{16x^2}\right)+\frac{1}{2}a^2\varphi.\ \text{coſ.}\,cz$: vis autem reliqua juxta vectorem radium exercita, reſolutis ſimiliter terminis a^2, a^4, coſ. STL, coſ. $2STL$ &c., neglectiſque fractionibus inferiorum ordinum evadet

$$\pi = \frac{1}{M}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2a}{x^3}+\frac{3a^2}{2x^4}+\frac{45a^4}{32x^6}\right).\text{coſ.}(1-n).z$$
$$+\frac{a^2}{4Mx^4}\left(9+\frac{25a^2}{4x^2}\right).\text{coſ.}(2-2n).z$$
$$+\frac{5a^3}{2Mx^5}.\text{coſ.}(3-3n).z$$
$$\mp\frac{\delta}{M}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2a}{x^3}+\frac{3}{2}a^2\right).\text{coſ.}(1-n\mp m).z$$
$$\mp\frac{9a^2\delta}{2M}.\text{coſ.}(2-2n\mp m).z$$
$$-\frac{\varphi}{M}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{a}{x^3}-\frac{9a^2}{4x^4}\right).\text{coſ.}(1-n\pm c).z$$
$$+\frac{a^2\varphi}{4M}\left(9\mp 18n+\frac{25a^2}{2}.(1\mp n)\right).\text{coſ.}(2-n\pm c).z:$$

Quia vero cum Planeta uterque digreditur a conjunctione vis alia Planetæ inferioris tendit in eamdem plagam, & cum directione motus Planetæ ſuperioris conſpirat, ſimilibus ſubſtitutionibus eruetur vis perpendicularis vectori Planetæ ipſius radio

$$\omega = -\frac{1}{M}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{a}{x^3}-\frac{3a^2}{8x^4}\right).\text{ſin.}(1-n).z$$
$$+\frac{1}{M}\left(\frac{3a^2}{2x^4}+\frac{5a^4}{8x^6}\right).\text{ſin.}(2-2n).z$$
$$+\frac{15a^3}{8Mx^5}.\text{ſin.}(3-3n).z$$

±

$$\pm\frac{\delta}{M}\left(\frac{1}{a^2}-a-\frac{3a^3}{8}\right).\text{fin.}(1-n\mp m).z$$

$$\mp\frac{3a^2\delta}{M}.\text{fin.}(2-2n\mp m).z$$

$$+\frac{\phi}{M}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{a}{2x^2}+\frac{9a^3}{16x^4}\right).\text{fin.}(1-n\mp c).z$$

$$\pm\frac{a^2\phi}{M}\left(\frac{3}{2}+3n+\frac{5}{4}a^2.(1+n)\right).\text{fin.}(2-2n\mp c).z.$$

COROLLARIA.

I. Cum superioris Planetæ motus sit proxime ndz, retentis denominationibus antecedentibus, formulæ omnes Probl. II. Lib. VI. abibunt in has alias

$$d\theta=\frac{nx^2dz}{1+\int\omega x^2ndz}$$

$$F=\frac{1+2\int\omega x^2ndz}{x^3}-\frac{1}{x^2}-\frac{3a^2}{4Mx^4}\left(1+\frac{15a^2}{16x^2}\right)-\varpi$$

$$\frac{ddx}{n^2dz^2}-\frac{2dx^2}{x}=x-x^2-\frac{3a^2}{4M}\left(1+\frac{15a^2}{16x^2}\right)$$

$$-2x^2\int\omega x^2ndz-\varpi x^4-\omega x^2.\frac{dx}{ndz}.$$

II. Erit etiam $F.d\theta^2=ddx-\frac{2dx^2}{x}+\omega x^2dx.ndz$

$$=n^2xdz^2\left(1\frac{-x}{1+2\int\omega x^2ndz}\right)-\frac{3n^2a^2dz^2}{4M}\left(1+\frac{15a^2}{16x^2}\right)-\varpi n^2x^4dz:$$

ac posito $x=1+\delta.\text{cof.}\,mz+t$, solitis substitutionibus prodibit

$$\frac{ddt-m^2\delta.\text{cof.}\,mz.dz^2}{n^2dz^2}$$

$$=-\frac{3a^2}{4M}\left(1+\frac{15a^2}{16x^2}\right)-t-t^2$$

$$-\delta.\text{cof.}\,mz.(1+2t)-4t\delta.\text{fin.}\,mz.\frac{dt}{ndz}$$

$$-\varpi x^4+2x^2\int\omega x^2ndz+\omega\delta x^2.\text{fin.}\,mz.$$

PROBLEMA VII.

Invenire aphelii motum in orbitis superioribus.

Si

Si quantitas constans, quæ ex termino $2\int \omega x^3 n\, d\zeta$ exsurgit, sit $-A$, atque ex resolutione termini $2x^2\int \omega x^3 n\, d\zeta$ primo habeatur $-2A\delta.\text{cos}.\, m\zeta - 2At$, ac si præterea binis hisce posterioribus terminis exceptis quantitas omnis $2x^2\int \omega x^3 n\, d\zeta$ dumtaxat alios variabiles terminos designare in posterum intelligatur, pro æquatione corollarii antecedentis habebimus

$$\frac{ddt}{n^2 d\zeta^2} = -A - \frac{3a^2}{4M}\left(1 + \frac{15a^2}{16x^2}\right) - 2At - t - t^2$$
$$+ \delta.\text{cof}.\, m\zeta\left(\frac{m^2 - n^2}{n^2} - 2t\right) - 4t\delta.\text{fin}.\, m\zeta.\frac{dt}{ndz}$$
$$- \omega x^4 + 2x^2\int \omega x^3 n\, d\zeta + \omega \delta x^3.\text{fin}.\, m\zeta.$$

Fiat jam $t = -A - \frac{3a^2}{4M}.\left(1 + \frac{15a^2}{16x^2}\right) + T,$

adeoque $-t^2 = 2AT + \frac{3a^2T.}{2M}\left(1 + \frac{15a^2}{16x^2}\right).$

Resolvetur æquatio ipsa in hanc aliam

$$\frac{ddT}{n^2 dz^2} + \left(1 - \frac{3a^2}{2M}\left(1 + \frac{15a^2}{16}\right)\right).T$$
$$= \delta.\left(\frac{m^2 - n^2}{n^2}\right).\text{cof}.\, m\zeta + \frac{3a^2\delta.}{2M}\left(1 + \frac{15a^2}{16}\right).\text{cof}.\, mz$$
$$-2\delta T.\text{cof}.\, m\zeta - 4\delta T.\text{fin}.\, mz.\frac{dT}{nd\zeta}$$
$$- \omega x^4 + 2x^2\int \omega x^3 n\, dz + \omega x^3.\text{fin}.\, m\zeta.$$

Rursus igitur motu ad priorem ellipsim illam relato, quæ sine viribus perturbatricibus describeretur in plano immobili, & posito $m = n$, fiet

$$T = -\delta.\left(\text{cof}.\, n\zeta - \text{cof}.\, n.\sqrt{\left(1 - \frac{3a^2}{2M}.\overline{1 + \frac{15a^2}{16}}\right)}.z\right)$$
$$x = 1 + T = 1 + \delta.\text{cof}.\, n.\sqrt{\left(1 - \frac{3a^2}{2M}.\overline{1 + \frac{15a^2}{16}}\right)}.\zeta:$$

atque ita pro angulari motu nz vere habebimus anomaliæ motum $n.\sqrt{\left(1 - \frac{3a^2}{2M}.\overline{1 + \frac{15a^2}{16}}\right)}.\zeta = m\zeta$, & substituto valore quantitatis m fiet æquatio differentialis vectoris radii superioris cujusque orbitæ

ddT

$$\frac{ddT}{dz^2} + m^2 T = 2n^2 x^2 \int \omega x^3 n\, dz - \omega n^2 x^4$$

$$+ \omega \delta n^2 x^3 . \text{fin.}\, mz - 4 n^2 \delta T . \text{fin.}\, mz . \frac{dT}{n\,dz}.$$

COROLLARIA.

I. Si requiratur motus aphelii Saturni, qui Jovis actione gignitur, & fiat $\frac{1}{M} = 0.000937$, & $a = 0.5454$, prodibit ratio angularis motus ad motum Saturni a summa apside

$\sqrt{\left(1 - \frac{3a^2}{2M} . \overline{1 + \frac{15}{16} a^2}\right)} : 1 = 0.99973 : 1$ circiter, & singulis Saturni revolutionibus habebitur progressus apsidum respectu fixarum circiter 351″, & annis singulis fere $11 \frac{2}{3}$″.

II. Quod si approximatione longius perducta, & altero etiam supputato seriei termino sit vis mediocris perturbatrix $\frac{a^2}{4M}\left(3 + \frac{45}{16} a^2 + \frac{175}{64} a^4\right)$, erit motus Saturni a summa apside singulis revolutionibus $\frac{360°}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{2M}\left(3 + \frac{45}{16} a^2 + \frac{175}{64} a^4\right)\right)}}$: & si ex Hallejanis tabulis ad annum 1750. assumatur $a = 0.57$, ac sit insuper $\frac{1}{M} = 0.0009372.$; erit motus idem 415″.

PROBLEMA VIII.

Æquationem differentialem orbitarum earumdem explicare.

Posito $x = 1 + \delta . \text{cos.}\, mz$, & vi perpendiculari ad vectorem radium assumpta ut in Probl. VI. libri hujus, omissis terminis argumenti $z - nz - cz + mz$, quos singillatim suo loco supputabimus, aliisque ordine explicatis fiet

$$\omega x^3 n\, dz = - \frac{n}{M}\left(\frac{1}{a} - a - \frac{3}{8} a^3\right) . \text{fin.}\, (1 - n) . z$$

$$+ \frac{n}{2M}\left(3 a^2 + \frac{5}{4} a^4\right) . \text{fin.}\, (2 - 2n) . z$$

$$+ \frac{15 n a^3}{8 M} . \text{fin.}\, (3 - 3n) . z$$

$$-\frac{n\delta}{M}\left(\frac{5}{2a^2}-a\right).\ \text{fin.}\ (1-n+m).\ z$$

$$-\frac{n\delta}{M}\left(\frac{1}{2a^4}-a\right).\ \text{fin.}\ (1-n-m).\ z$$

$$+\frac{9a^2n\delta}{4M}.\ \text{fin.}\ (2-2n+m).\ z$$

$$-\frac{15a^2n\delta}{4M}.\ \text{fin.}\ (2-2n-m).\ z$$

$$-\frac{\phi n}{M}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2}a\right).\ \text{fin.}\ (1-n-c).\ z$$

$$+\frac{a^2\phi n}{M}\left(\frac{3}{2}+3n+\frac{5}{4}a^2.\ \overline{1+n}\right).\ \text{fin.}\ (2-2n-c).\ z$$

Hifce autem terminis more folito integratis, ac deinde ductis in $2n^2x^2$, termino $\frac{2n^2}{M.\overline{\overline{1-n}}}\left(\frac{1}{a^2}-a-\frac{3}{8}a^2\right).\ \text{cof.}\ (1-n).\ z$

oportebit addere $\frac{2n^2\delta}{M.\overline{\overline{1-n}}}\left(\frac{1}{a^2}-a\right).\ \text{cof.}\ (1-n\pm m.\ z$, ac pariter addere $-\frac{3n^2a^2\delta}{2M.\overline{\overline{1-n}}}.\ \text{cof.}\ (2-2n\pm m).\ z$ termino

$-\frac{n^2a^2}{2M.\overline{\overline{1-n}}}\left(3+\frac{5}{4}a^2\right).\ \text{cof.}\ (2-2n).\ z$. Evoluta pariter quantitate ϖn^2x^2, terminis omnibus, qui vim ϖ juxta Probl. VI. exprimunt, addendi infuper erunr termini

$$-\frac{n^2\delta}{M}\left(\frac{2}{a^2}+a\right).\ \text{cof.}(1-n\pm m).z-\frac{9a^2\delta}{2M}.\ \text{cof.}(2-2n\pm m).\ z.$$

Denique cum minoribus aliis fractionibus neglectis fit

$$\omega\delta n^2\ \text{fin.}\ mz=\mp\frac{n^2\delta}{2M}\left(\frac{1}{a^2}-a\right).\ \text{cof.}\ (1-n\mp m).\ z$$

$$\pm\frac{3a^2n^2\delta}{4M}.\ \text{cof.}(2-2n\mp m).\ z$$

terminis fimul omnibus collectis, atque ordinatis fiet $\frac{ddT}{dz^2}+m^2T$

$$= \frac{n^2}{M.\overline{1-n}}\left(\frac{3n-1}{a^2} - 2a - \frac{3a^2}{4}.\overline{2-n}\right).\cos.(1-n).z$$

$$- \frac{n^2\,a^2}{2M.\overline{1-n}}\left(\frac{3}{2}.\overline{3-n} + \frac{5}{8}a^2.\overline{5-3n}\right).\cos.(2-2n).z$$

$$- \frac{5\,n^2 a^2}{4M}\left(\frac{2-n}{\overline{1-n}}\right).\cos.(3-3n)z.$$

$$+ \frac{3\,\phi\,n^2}{Ma^2}.\cos.(1-n-c).z$$

$$+ \frac{a^2\phi n^2}{M}\left(\frac{9}{4} + \frac{9n}{2} + \frac{3n+6n^2}{1-2n} + \frac{5}{2}a^2\left(\frac{5+5n}{4} + \frac{1+n}{1-2n}\right)\right).\cos.(2-2n-c).z$$

$$+ \frac{n^2\delta}{M}\left(\frac{7n-5n^2}{a^2(1-n)} - \frac{4a+2an}{1-n} - \frac{5}{2}.\frac{\overline{1+a}}{a^2}\right).\cos.(1-n+m).z$$

$$+ \frac{n^2\delta}{M}\left(\frac{n}{1-2n}\left(\frac{1}{a^2} - 2a\right) + \frac{2n}{1-n}\left(\frac{1}{a^2} - a\right) - \frac{3}{2a^2} + \frac{3a}{2}\right).\cos.(1-n-m).z$$

$$- \frac{3n^2a^2\delta}{M}\left(\frac{3n}{4-2n} + \frac{n}{2-2n} + \frac{13}{4}\right).\cos.(2-2n+m).z$$

$$+ \frac{3n^2a^2\delta}{2\,M}\left(\frac{5n}{2-3n} - \frac{n}{1-n} + \frac{1}{2}\right).\cos.(2-2n-m).z$$

$$-2\,\delta\,T.\cos.m\,z - 4\,\delta\,T.\sin.m\,z.\frac{dT}{n\,dz}.$$

COROLLARIUM.

Eadem igitur methodo, qua pro inferiorum Planetarum orbitis usi sumus, priores æquationis terminos integrando, eorumque valorem substituendo in binis terminis posterioribus, corrigendoque alios ex aliis, ad verum quæsitæ differentiæ valorem accedere quisque poterit quantum voluerit. Coefficientes autem omnium terminorum cum ab analogis aliis Probl. IV. differant, non nisi reassumpto calculo, & singulis reductionibus æquatio a Planetis inferioribus ad superiores traduci poterit.

PROBLEMA IX.

Iisdem positis differentiam vectoris radii, & angularis motus invenire.

Æqua-

Æquatione differentiali ad problematis ſuperioris formam reducta, & ſummis omnibus eadem ſemper methodo acceptis fiet T

$$= \frac{-n^2}{M.(1-n)(1-2n)}\left(\frac{3n-1}{a^2}-2a-\frac{3}{4}a^2\cdot\overline{2-n}\right).\text{cos}.(1-n).z$$

$$+\frac{n^2a^2}{2M.(1-n)}\left(\frac{\frac{3}{2}\cdot\overline{3-n}+\frac{5}{8}a^2\cdot\overline{5-3n}}{4-8n+3n^2}\right).\text{cos}.(2-2n).z$$

$$+\frac{5n^2a^3}{4M.(1-n)}\left(\frac{2-n}{9-18n+8n^2}\right).\text{cos}.(3-3n).z$$

$$-\frac{3\Phi n^2.\text{cos}.(1-n-c).z}{Ma^2.(n^2-(1-c-n)^2)}$$

$$+\frac{a^2\Phi n^2}{M.(1-4n+3n^2)}\left(\frac{9}{4}+\frac{9n}{2}+\frac{3n+6n^2}{1-2n}+\frac{5a^2}{2}\left(\frac{5+5n}{4}+\frac{1+n}{1-2n}\right)\right).\text{cos}.(2-2n-c).z$$

$$-\frac{n^2\delta}{M.(1-n)(1-n^2)}\left(\frac{7n-5n^2}{a^2.(1-n)}-\frac{4a+2an}{1-n}-\frac{5}{2}.\overline{\frac{1}{a^2}+a}\right).\text{cos}.(1-n+m).z$$

$$-\frac{n^2\delta}{M.(1-4n+3n^2)}\left(\frac{n}{1-2n}\left(\frac{1}{a^2}-2a\right)+\frac{2n}{1-n}\left(\frac{1}{a^2}-a\right)-\frac{3}{2a^2}+\frac{3a}{2}\right).\text{c}.(1-n-m).z$$

$$+\frac{3a^2n^2\delta}{M.(4-4n)}\left(\frac{3n}{4-2n}+\frac{n}{2-2n}+\frac{13}{4}\right).\text{cos}.(2-2n+m).z$$

$$-\frac{3^2a^2n^2\delta}{2M}\left(\frac{\frac{5n}{2-3n}-\frac{n}{1-n}+\frac{1}{2}}{4-12n+8n^2}\right).\text{cos}.(2-2n-m).z \text{ \&c.}$$

Quare cum juxta Coroll. I. Probl. VI. eſſe debeat

$d\theta = n x^2 dz(1-\int\omega x^2 n dz)$

$= ndz(1+2\delta.\text{ſin}.mz+2T)(1-\int\omega x^2 n dz)$,

neglectis minoribus correctionibus, unde nihil poteſt emergere, quod ſit ſenſibile, duplam eamdem differentiam vectoris radii ducendo in ndz, atque inde ſubducendo $ndz\int\omega x^2 ndz$, integrandoque, ſingulæ medii, verique motus æquationes ſingillatim ad calculum reduci poterunt.

COROLLARIA.

I. Si formulis ad Saturnum traductis, ut in Corollariis Probl. VIII. Lib. V., & in Coroll. III. Probl. IV. libri hujus, fiat $a = 0.5454$,

 $n =$

$n = 0.4027$, $\varphi = 0.048$, $\delta = 0.057$, factis substitutionibus omnibus prodibit differentia vectoris radii, quæ Jovis actione gignitur

$$T = 0.0008308 . \text{cos.}\ (1-n).\zeta \quad -0.000024 . \text{cos.}\ (1-n+m).\zeta$$
$$+ 0.000134 . \text{cos.}(2-2n).\zeta \quad +0.000057 . \text{cos.}\ (1-n-m).\zeta$$
$$+ 0.000029 . \text{cos.}\ (3-3n).\zeta \quad -0.000383 . \text{cos.}\ (2-2-nc).\zeta\ \&c.$$

II. Quare ex differentia vectoris radii colligendo æquationes medii, & veri motus, adjiciendoque æquationes alias, quæ ex ellipticitate orbitæ oriuntur, si motus verus Saturni vocetur nz, medius autem nZ, & anomalia media Saturni sit X; erit verus Saturni motus in longitudinem

$$nz = nZ - 6^\circ\ 30'.\ \text{sin.}\ nZ + 14'.\ \text{sin.}\ 2\ nZ - 41''.\ \text{sin.}\ 3\ nZ$$
$$+ 5.7''.\ \text{sin.}\ X \quad - 10''.\ \text{sin.}\ (X+Y)$$
$$- 29.4''.\ \text{sin.}\ 2\ X \quad - 47''.\ \text{sin.}\ (X-Y)$$
$$- 8.4''.\ \text{sin.}\ 3\ X \quad + 5'\ 20''.\ \text{sin.}\ (2X - Z.$$

III. Pariter si requirantur inæqualitates Terræ, quæ ex Veneris actione ortum ducunt, & fiat $n = \frac{2246176}{3652565} = 0.615$, & $a = 0.7233$,

prodibit primum

$$T = -\frac{0.98}{M} . \text{cos.}\ (1-n).\zeta + \frac{5.473}{M} . \text{cos.}(2-2n).\zeta,$$

& si quantitas materiæ Veneris præ Solis massa sit 0.00000326, & media Veneris distantia a Terra vocetur X', prodibunt æquationes binæ $+ 4''.\ \text{sin.}\ X' - 6''.\ \text{sin.}\ 2.X'$

SCHOLION.

Clariss. la Grange iisdem assumptis calculi numerici elementis, quibus in Coroll. II. Probl. VII. motum aphelii Saturni invenimus revolutionibus singulis 415″ circiter Jovis actione esse oportere, tomo tertio Academiæ Taurinensis, motus ejusdem quantitatem definivit 471. 8″. Differentia omnis integro minuto est minor, atque inde fortasse oritur quod calculum ultra tres primos terminos seriei, quæ anomaliæ motum exprimit, Geometra ingeniosissimus perduxerit. Aliæ etiam, quas exhibuimus, æquationes motus Terræ, & Saturni proxime ad calculos Clairautii, & Euleri accedunt tribus exceptis posterioribus æquationibus Saturni, in quibus signi, & coefficientium differentia subductis sæpius numeris major prodiit. Clai-

raut

raut in actis Parisiensibus anni 1754, eadem methodo, qua inæqualitates motuum lunarium investigaverat, ad Planetas alios traducta cum inquisiisset quæ motus Terræ inæqualitates ob vires Jovis, ac Veneris haberi debeant; & Veneris massam statuisset 0.00000516, priores Terræ æquationes eruit $10''$. sin. $X' - 11''$. sin $2X'$. Eulerus in dissertatione, quam antea memoravimus, de perturbatione motus Planetarum, in eadem fere hypothesi, quam in posteriori corollario assumpsimus, quantitatis materiæ Veneris, coefficientes binaram æquationum eruit $5.75''$, & $6''$. In priori vero dissertatione de inæqualitatibus Jovis, & Saturni, §. LXXXI·, æquationes veri motus Saturni in longitudinem statuit Eulerus

$+ 4''$. sin. X. $\quad + 13''$. sin. $X + Y$
$- 32''$. sin. $2X$ $\quad - 257''$. sini $X - Y$
$- 7''$. sin. $3X$ $\quad - 243''$. sin. $2X - Z$.

CAPUT TERTIUM.

DE VARIATIONIBUS TEMPORUM PERIODICORUM.

PROBLEMA X.

INvenire æquationem temporis periodiei Planetæ eujuslibet inferioris, quæ pendet ex data, & constanti distantia apsidum utriusque orbitæ inferioris superiorisque.

Sit $1 : n$ ratio mediorum motuum Planetæ inferioris, ae superioris, atque a conjunctione incipiendo sit longitudo Planetæ inferioris z. Sit etiam generatim pro qualibet positione apsidum, atque orbitarum angularis distantia a summa apside in inferiore quidem Planeta u, in superiore autem v: ae sit denique excentricitas illius ϕ, & hujus δ. Reassumpto ealeulo Probl. IV. Lib. VI. erit longitudo Planetæ superioris $nz - 2\delta$. sin. $v + 2\phi n$. sin. u, atque in fig. 58. erit

$$\text{sin. } STL = \text{sin. } (z - nz + 2\delta . \text{ sin. } v - 2\phi n . \text{ sin. } u)$$
$$= \text{sin. } (1-n) . z + \delta . \text{ n. } (z - nz + v)$$
$$+ n\phi . \text{ sin. } (z - nz - u) + n\phi\delta . \text{ sin. } (z - nz + v - u);$$

Dein-

Deinde vero in Probl. X. Lib. V. loco $\frac{1}{a^2}$ ſcribendo $\frac{1-2\delta\,.\,\text{coſ.}\,v}{a^2}$,

& $\frac{1-4\delta\,.\,\text{coſ.}\,v}{a^4}$ loco $\frac{1}{a^4}$, pro priori termino $-\frac{3x^2}{8a^4M}\left(1+\frac{5x^2}{8a^2}\right).\text{ſin.}\,STL$,

qui vim perturbatricem radio vectori normalem exprimit, habebimus

$$-\frac{3x^2(1-4\delta\,.\,\text{coſ.}\,v)}{8a^4M}\left(1+\frac{5x^2}{8a^2}\,.\,\overline{1-2\delta\,.\,\text{coſ.}\,v}\right)\left(\begin{array}{l}\text{ſin.}\,z-n\zeta\\+\delta\,.\,\text{ſin.}\,z-n\zeta+v\\+n\varphi\,.\,\text{ſin.}\,z-n\zeta-u\end{array}\right)$$

$$-\frac{3n\varphi\delta}{8a^4M}\left[1+\frac{5}{8a^2}\right].\,\text{ſin.}\,(\zeta-n\zeta+v-u).$$

Rurſus priore termino ex duobus his poſterioribus reſoluto ſolitis regulis trigonometricis prodibunt bini alii termini

$$+\frac{5n\varphi\delta}{4a^4M}\left[1+\frac{5}{8a^2}\right].\,\text{ſin.}\,(\zeta-n\zeta+v-u)$$

$$+\frac{3\delta x^2}{8a^4M}\left[1+\frac{5x^2}{4a^2}\right].\,\text{ſin.}\,(\zeta-nz+v).$$

Denique loco x ſcribendo $1+\varphi\,.\,\text{coſ.}\,u$, in reſolutione quantitatis $2\omega x^2$ ex hoc ipſo poſtremo termino eruemus

$$\frac{3\delta}{4a^4M}(1+5\varphi\,.\,\text{coſ.}\,u)\left[1+\frac{5}{4a^2}\,\overline{1+2\varphi\,.\,\text{coſ.}\,u}\right].\,\text{ſin.}\,(\zeta-nz+v),$$

atque inde ſolitis reductionibus novus exſurget terminus

$$\frac{15\varphi\delta}{8a^4M}\left[1+\frac{7}{4a^2}\right].\,\text{ſin.}\,(z-n\zeta+v-u).$$

Simul itaque colligendo antecedentes alios argumenti hujus terminos in expreſſione quantitatis $2\omega x^2dz$ occurret integer terminus

$$\frac{3\varphi\delta}{8a^4M}\left[5+n+\frac{5}{4a^2}\,.\,\overline{7+\tfrac{2}{3}n}\right].\,\text{ſin.}\,(z-nz+v-u).\,dz.$$

Jam vero ſi initio a conjunctione duorum Planetarum ducto ſit longitudo aphelii inferioris orbitæ p, erit anomaliæ angulus $u=z-p$: & ſi longitudo aphelii ſuperioris vocetur q, neglectis aliis minoribus fractionibus, quæ alios minores terminos argumenti alterius ſuppeditarent, erit $v=nz-q$: & ſi fiat inſuper

3 φ

$\frac{3\Phi\delta}{8a^4 M}\left[5+n+\frac{5}{4a^2}\cdot\overline{7+\frac{1}{2}n}\right]=A$, loco præcedentis termini habebimus $A.\text{ſin.}(p-q).dz=-A.\text{ſin.}(q-p).dz$. Quod ſi igitur ob exiguum aphelii utriuſque motum, ac tanto minorem duorum motuum differentiam, differentia longitudinum $q-p$ dato aliquo tempore cenſeatur conſtans, reaſſumptis calculis Probl. III., IV., & V. libri hujus fiet $2\int\omega x^2 dz=-A.\text{ſin.}(q-p).z=T$, & elementum medii temporis revolutionis integræ in ellipſi erit

$$d\theta=(1+2T-\int\omega x^2 dz).dz=(1-\tfrac{1}{2}A.\text{ſin.}\overline{q-p}.z).dz,$$

eritque æquatio temporis totius periodici

$$-\frac{3}{4}A.\text{ſin.}(q-p).z^2=-\frac{9\Phi\delta}{32a^4.M}\left(5+n+\frac{5}{4a^2}\cdot\overline{7+\tfrac{1}{2}n}\right).\text{ſin.}(q-p).z^2.$$

COROLLARIA

I. Primo igitur cum $\omega x^2 dz$ juxta Probl. I. Lib. VI. deſignet accelerationem areæ deſcriptæ circa focum, manifeſtum eſt velocitatem mediam Planetæ cujuslibet inferioris, data apheliorum diſtantia a ſe invicem, actione Planetarum ſuperiorum minui, vel augeri oportere prout aphelium orbitæ ſuperioris juxta ſignorum ordinem antecedet, vel ſubſequetur aphelium inferioris alterius orbitæ: & quidem cum elementum areæ ellipticæ, ſeu medii temporis ſit $\frac{1}{2}x^2 dz$, ſi accipiatur ſumma omnium $\frac{1}{2}\omega x^2 dz$, pro decremento, aut incremento velocitatis mediæ projectionis prodibunt priores termini ſeriei, quam alia ratione, ac methodo jam expoſuimus in Propoſ. XLVIII. Lib. III. de Gravitate, atque in opuſculo de acceleratione, & retardatione motus Planetarum, quod in priori parte To. V. Comment. Bonon. impreſſum eſt.

II. Cum aphelium Saturni ſignis fere $2\frac{1}{2}$ antecedat aphelium Jovis in conſequentia, patet Saturni actione mediam velocitatem Jovis, & periodicum tempus minui oportere: & quidem differentia velocitatis erit in ſimplici longitudinis, ſeu medii temporis ratione, æquatio autem temporis periodici erit in eadem ratione temporis duplicata. Et cum apogæum Solis ſit circa 8° Cancri, & Terræ aphelium ex adverſo ſigno reſpondeat, præcedatque integro fere quadrante apſidem ſummam Jovialis orbitæ, periodicum tempus Terræ

po-

potius augebitur actione Jovis. Id ipsum in orbitis etiam Mercurii, & Veneris continget. Actio etiam Martis ad producendum anni solaris tempus conducet ratione aliqua, videndumque erit dumtaxat quibus Planetis sensibilis periodici temporis æquatio gigni possit.

III. Si z non angulum descriptum circa centrum, sed revolutionum absolutarum numerum designet, loco z in superiori formula scribendo $z.\,360^\circ$, & pro unitate assumendo arcum $57^\circ\ 17'\ 44''$, fiet æquatio medii periodici temporis imminuti, sive aucti motus medii periodici

$$\frac{9\varphi\delta z^2}{32a^4 M}\left(5+n+\frac{5}{4a^2}.\overline{7+\tfrac{1}{2}n}\right).\,\text{sin.}(q-p).\,360^\circ.\,\frac{360^\circ}{57^\circ\ 17'\ 44''}.$$

Quare si Joviali orbita ad Saturnum relata pro anno 1750. ex Hallejanis tabulis assumatur $q-p=79^\circ\ 6'\ 12''$, & $a=0.57$, sitque insuper $\delta=0.057$, $\varphi=0.04822$, $\frac{1}{M}=0.000331$, erit æquatio medii motus Jovis, quæ actione Saturni orietur $1.\,8''.\,z$. In Planetis aliis inferioribus ob majorem differentiam distantiarum, atque insuper in Terra, & Venere ob exiguam excentricitatem, in Marte vero ob exiguam apsidum distantiam æquatio medii motus genita actione Jovis non poterit esse sensibilis.

PROBLEMA XI.

Invenire æquationem temporis periodici Planetæ cujuslibet superioris, quæ pendet similiter ex loco apsidum orbitæ superioris, atque inferioris.

Positis omnibus ut in Probl. XIII. Lib. V. si a non veram inferioris Planetæ distantiam a Sole, sed mediam tantum designet, & sit vera distantia $a(1+\varphi.\text{cos.}\,u)$, superioris autem Planetæ distantia a Sole vocetur x, erit prior terminus vis perturbatricis normaliter ad vectorem radium exercitæ

$$-\frac{1}{M}\left(\frac{a}{a^2}-\frac{a^2}{x^2}-\frac{3a^3}{8x^3}\right).\,\text{sin.}STL$$

$$+\frac{\varphi.\text{cos.}\,u}{M}\left(\frac{2}{a^2}+\frac{a}{x^3}+\frac{9a^2}{8x^4}\right).\,\text{sin.}STL,$$

& si expressio anguli, & sinus STL, ac denominationes aliæ ex Probl.

Probl. X. accipiantur, in tota vis perpendicularis expressione bini occurrent termini

$$\frac{\phi\,\delta}{M}\left(\frac{1-n+\frac{1}{4}a+an+\frac{1}{8}a^{2}.\overline{n+\frac{1}{4}}}{a^{2}}\right).\,\text{fin.}\,(z-nz+v-u)$$

$$+\frac{\phi}{M}\left(\frac{1-n}{a^{2}}+\frac{a+2\,an}{2\,x^{2}}+\frac{3\,a^{2}.\overline{n+\frac{1}{4}}}{8\,x^{4}}\right).\,\text{fin.}\,(z-nz-u).$$

Hic autem posterior terminus dumtaxat si loco ipsius vis perpendicularis accipiatur, & fiat $x=1+\delta.\,\text{cof.}\,v$, in resolutione quantitatis $2\,\omega\,x^{2}.n\,d\,z$ alius exsurget terminus

$$\frac{3\,n\,\phi\,\delta}{M}\left(\frac{1-n-\frac{1}{4}a^{2}.\overline{n+\frac{1}{4}}}{n^{2}}\right).\,\text{fin.}\,(z-nz+v-u),$$

& binis terminis simul acceptis fiet $2\,\omega\,x^{2}n\,d\,z=$

$$\frac{n\,\phi\,\delta}{M}\left(\frac{5-5\,n+a.\overline{1+2\,n}}{a^{2}}\right).\,\text{fin.}\,(z-nz+v-u).$$

Quia vero $-\frac{1}{a^{2}M}$. fin. STL denotat actionem inferioris Planetæ in Solem, si negligatur variatio ipsius actionis, quæ ex varia Planetæ ejusdem distantia a Sole oritur, & quæ compensari potest actionibus aliorum Planetarum ex adversis partibus jacentium, pro tota vi perturbatrice ab inferiore Planeta in superiorem radio normaliter exercitæ assumi poterit dumtaxat

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{n\,\phi\,\delta}{M}\left(\frac{1}{a^{2}}-a-\frac{3\,a^{2}}{8}\right)\\&+\frac{\phi\,\delta}{M}\left(a+\frac{9\,a^{2}}{8}\right)\end{aligned}\right\}.\,\text{fin.}\,(z-nz+v-u)$$

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{n\,\phi}{M}\left(\frac{1}{a^{2}}-\frac{a}{x^{2}}-\frac{3\,a^{2}}{8\,x^{4}}\right)\\&+\frac{\phi}{M}\left(\frac{1}{2x^{2}}+\frac{9\,a^{2}}{16x^{4}}\right)\end{aligned}\right\}.\,\text{fin.}\,(z-nz-u);$$

atque inde in resolutione quantitatis $2\,\omega\,x^{2}.\,n\,d\,z$ eadem semper reductionum similium methodo eruemus

$$-\frac{n\,\phi\,\delta}{M}\left(\frac{5\,n-a\,.\,\overline{1+2\,n}}{a^{2}}\right).\,\text{fin.}\,(z-nz+v-u).$$

Quare si loco $\zeta - nz + v - u$ scribamus $p - q$, ut in Probl. XI., simili modo habebimus, pro differentia quidem vectoris radii

$$\frac{n \varphi \delta}{M}\left(\frac{5n}{a^2} - a . \overline{1 + 2n}\right) . \text{sin.} (q - p) . z ,$$

pro æquatione vero temporis totius periodici

$$\frac{3 n^2 \varphi \delta}{4 M}\left(\frac{5n}{a^2} - a . \overline{1 + 2n}\right) . \text{sin.} (q - p) . \zeta^2 .$$

COROLLARIA.

I. Si requiratur æquatio, qua tempus periodicum Saturni actione Jovis augeri, & motus medius in integra revolutione imminui debet, posito $n^2 = a^3 = 0.1852$, substitutionibusque aliis ut supra acceptis, fiet medii motus æquatio $- 0.000018354 . \text{sin.} (q - p) . \zeta^2$: & si ζ non jam angulum descriptum circa Solem, sed revolutionum absolutarum numerum designet, pro æquatione hujusmodi prodibunt $- 14.5'' . z^2$: nimirum in hypothesi assumpta, & vis a Jove in Solem exercitæ neglecta variatione illa, quæ ex varia Jovis distantia a Sole oritur, medius Saturni motus revolutione integra fiet minor $14.5''$, minueturque universim in duplicata ratione temporum.

II. Generatim vero velocitas projectionis, & radius mediocris orbitæ, ac periodicum tempus in superiori Planeta augebitur, aut minuetur prout aphelium superioris orbitæ juxta signorum ordinem antecedet, vel subsequetur aphelium orbitæ inferioris. Scilicet in iisdem casibus idem tempus augebitur, aut minuetur, in quibus periodicum inferioris Planetæ tempus e contra minuetur, vel augebitur. Et quidem variatio omnis universim erit in duplicata ratione temporum, atque in ratione simplici sinus recti angularis distantiæ apsidum a se invicem: & cum successu temporis $q - p$ fiet major integro semicirculo, & sin. $(q - p)$ contrario signo afficietur, tempus etiam periodicum, quod antea augebatur, imminui incipiet, & vice versa: ac denique continuato motu, integra duarum apsidum revolutione a se invicem, restituentur omnia in statum pristinum.

PROBLEMA XII.

Dato loco apsidum superioris, & inferioris orbitæ, & data exigua variatione distantiæ apsidum a se invicem, invenire variationem temporum periodicorum.

Po-

Positis omnibus ut in Probl. X. fiat $q - p = K + kz$, & sit K quantitas quæpiam constans, quæ mediam exprimat distantiam summarum apsidum utriusque orbitæ, kz vero exiguam denotet distantiæ ipsius variationem. Aliis omissis terminis, quos in priori libri hujus capitulo supputavimus, erit

$2\omega x^2 dz = -A.\,\text{fin.}\,(K + kz).\,dz = -A.\,(\text{fin.}\,K.\,\text{cof.}\,kz + \text{cof.}\,K\,\text{fin.}\,kz).\,dz$,

& integralibus sumptis erit

$$2\int \omega x^2 dz = -\frac{A}{k}(\text{fin.}\,K.\,\text{fin.}\,kz + \text{cof.}\,K.\,\overline{1 - \text{cof.}\,kz})$$

$$= -\frac{A}{k}.\,\text{cof.}\,K + \frac{A}{k}.\,\text{cof.}\,(K + kz) = T.$$

Quo dato erit variatio elementi temporis

$$2\,T.dz - dz.\int \omega x^2 dz = -\frac{3A}{2k}.\,(\text{cof.}\,K - \text{cof.}\,\overline{K + kz}).\,dz,$$

& summis rursus acceptis fiet tota periodici temporis æquatio

$$-\frac{3Az}{2k}.\,\text{cof.}\,K + \frac{3A}{2k^2}.\,\text{fin.}\,(K + kz) - \frac{3A}{2k^2}.\,\text{fin.}\,K.$$

Jam vero si kz quantitas satis exigua intelligatur, statui poterit

$\text{fin.}\,(K + kz) = \text{fin.}\,K + kz.\,\text{cof.}\,K - \frac{1}{2}k^2 z^2.\,\text{fin.}\,K.$

Hac igitur substitutione facta, atque omissis terminis se invicem destruentibus fiet tota periodici temporis æquatio

$$-\frac{1}{4}A.\,\text{fin.}\,K.\,z^2 = -\frac{9\,\varphi\,\delta.}{32\,a^4 M}\left(5 + n + \frac{5}{4a^2}.\,\overline{7 + \frac{1}{2}n}\right).\,\text{fin.}\,K.\,z^2.$$

Simili modo in iisdem præcedentis problematis hypothesibus pro æquatione omni periodici temporis Planetæ alterius superioris eruemus

$$\frac{3\,n^2\varphi\,\delta.}{4\,M}\left(\frac{5n}{a^2} - a.\,\overline{1 + 2n}\right).\,\text{fin.}\,K.\,z^2.$$

COROLLARIUM.

Eadem itaque habebitur in Planeta inferiori, & superiori æquatio temporis periodici, ac si distantia summarum apsidum utriusque orbitæ maneret constanter eadem. Et quidem perinde est si omnino constans assumatur apsidum distantia, & si distantiæ ipsius variatio statuatur omnino exigua. Cum autem motus aphelii Jovis sit fere

8″ annis ſingulis, & motus annuus aphelii Saturni fere 14″, adeoque $k\zeta$ ſit angulus fere 6″, & ſæculis ſex opus ſit ut ad integrum gradum aſcendat; æquatio medii motus Jovis diu aſſumi poterit 1. 8″. ζ^2, Saturni vero — 14. 5″. ζ^2, ac deinde utraque augenda erit in ſimplici ratione ſinus ſenſibiliter auctæ differentiæ longitudinum Saturni, & Jovis.

PROBLEMA XIII.

Si Planetæ moveantur in medio reſiſtente juxta rationem quamlibet diſtantiarum a Sole, variationes vectoris radii, & angularis motus inde ortas definire.

Reaſſumptis omnibus, quæ in Probl. XVI. Mechanicæ, velocitas Planetæ ad velocitatem ammiſſam quo tempore integra diametri longitudo percurritur, ſe habebit ut $1 : -\frac{3}{8D}$, & ſi angularis motus ſit $d\zeta$, radius vector x, erit tota eadem velocitas ad velocitatem ammiſſam quo tempore percurritur arcus $x\,d\zeta$ ut $1 : -\frac{3x\,d\zeta}{8DR}$. Eſt autem tota vis gravitatis $\frac{1}{x^2}$ ad velocitatem perpendicularem radio ut duplus ſinus verſus ad arcum, ſive ut arcus $x\,d\zeta$ ad radium x: adeoque eſt velocitas omnis $\frac{1}{x^2 d\zeta}$. Erit ergo $\frac{-3}{8DRx}$ velocitas ammiſſa ob medii reſiſtentiam: aut ſi $D : 1$ ſit ratio denſitatis Planetæ ad denſitatem medii in ea tantum diſtantia a Sole, quæ exprimitur unitate, atque univerſim ſit denſitatum ratio $Dx^n : 1$, erit vis reſiſtentiæ $\frac{-3}{8DRx^{n+1}}$. Quod ſi igitur hæc quantitas in æquatione problematis ſecundi libri hujus loco vis perpendicularis ω accipiatur, negliganturque inferiorum ordinum termini, adeoque etiam pars illa totius reſiſtentiæ, quæ opponitur directioni gravitatis, erit æquatio differentialis orbitæ

$$\frac{ddT}{d\zeta^2} + c^2 T = -\frac{3x^2}{4DR}.\int x^{-n+1} d\zeta - 2\varphi T.\text{cof.}\,c\zeta$$

$$-\frac{3\varphi}{8DR}.x^{-n+2}\,\text{ſin.}\,c\zeta - 4\varphi.\,\text{ſin.}\,c\zeta.\,\frac{dT}{d\zeta}.$$

Ea-

Eadem itaque ſemper ratione invenietur differentia vectoris radii, quæ inducitur ob medii reſiſtentiam: tota autem, mediique, ac veri motus variatio eruetur ex æquatione alia elementi temporis

$$d\theta = \frac{x^2 dz}{1+\int \omega x^2 d\zeta} = (1 + 2\varphi . \text{coſ.} cz + 2T)\left(1 + \frac{3\int x^{-n+2} dz}{8DR}\right) d\zeta .$$

COROLLARIA.

I. Æquationem differentialem conſiderando manifeſtum erit quod cum pro quovis radii x valore reſolutis terminis

$$-\frac{3x^2}{4DR}\int x^{-n+2} dz - \frac{3\varphi x^{-n+2}}{8DR} . \text{ſin.}\, cz$$

nullus alius terminus poſſit occurrere, qui differentiam T per conſtantes alias quantitates multiplicatam complectatur, ſecundus æquationis terminus $c^2 T$ manebit idem, atque idem pariter erit aphelii motus, qui coefficiente ejuſdem termini definitur: ſcilicet ob medii reſiſtentiam minime mutabitur motus apſidum, qui ex aliis viribus perturbatricibus proficiſcitur.

II. Quod ſi deinde accipiatur media radii vectoris quantitas, & fiat $x = 1$, pro æquatione omni differentiali habebimus $\frac{ddT}{dz^2} + c^2 T = -\frac{3\zeta}{4DR}$, atque inde primum eruetur $T = -\frac{3z}{4c^2 DR}$: ſcilicet axis major continue minuetur in ſimplici ratione anguli circa centrum deſcripti, ſive in ratione ſimplici temporis. Inde etiam eruetur $d\theta = d\zeta - \frac{9zdz}{8DR}$, eademque habebitur medii, & veri motus variatio, quæ in Probl. XIII. Lib. I. antea prodierat: & iiſdem pariter Probl. XII. ſubſtitutionibus patebit in orbitis Satellitum non motum quidem apſidum variari ob medii reſiſtentiam, ſed axem majorem tantum imminui in ſimplici ratione temporis, & motum medium periodicum augeri in ratione temporis duplicata.

III. Poſito autem $T = -\frac{3z}{4c^2 DR}$ in priori æquatione differentiali loco $2 - \varphi T . \text{coſ.}\, cz - 4\varphi . \text{ſin.}\, cz . \frac{dT}{d\zeta}$ habebimus

$$\frac{3\varphi}{c^2 DR}\left(\text{ſin.}\, c\zeta + \tfrac{1}{2}\zeta . \text{coſ.}\, c\zeta\right),$$ adjectoque termino $-\frac{3\varphi . \text{ſin.}\, c\zeta}{8c^2 DR}$;

&

& posito $c = 1$, atque ut antea neglectis variationibus aliis, quæ ex medii resistentia juxta vectorem radium exercita oriri possent, fiet tota eadem descriptæ orbitæ æquatio

$$\frac{ddT}{dz^2} + T = -\frac{3z}{4DR} + \frac{21\varphi.\,\text{sin}.\,z}{8DR} + \frac{3\varphi z.\,\text{cos}.\,z}{2DR}.$$

IV. Quod si proponatur æquatio $ddT.\ \text{cos}.\,z + T.\,\text{cos}.\,z.\,dz^2 = f.\,\text{cos}.\,z.\,\text{sin}.\,z.\,dz^2 = \frac{1}{2}f.\,\text{sin}.\,2z.\,dz^2$, eaque exsurgat ex differentiali alia æquatione

$dT.\,\text{cos}.\,z + T.\,\text{sin}.\,z.\,dz = \frac{1}{4}f.\,(1 - \text{cos}.\,2z).\,dz = \frac{1}{2}f.\ \text{sin}.\,z^2.\,dz$,

& divisione per $\text{cos}.\,z^2$ facta, ac posito $\frac{f.\,\text{sin}.\,z^2.\,dz}{2.\,\text{cos}.\,z^2} = \frac{fdz}{2.\text{cos}.\,z^2} - \frac{1}{2}fdz$,

integratione alia eruatur $\frac{T}{\text{cos}.\,z} = \frac{f.\,\text{sin}.\,z}{2.\,\text{cos}.\,z} - \frac{1}{2}fz$, erit correcta vectoris radii differentia, quæ ob medii resistentiam induci poterit

$$T = -\frac{3z}{4DR} + \frac{21\varphi}{16DR}\,(\text{sin}.\,z - z.\,\text{cos}.\,z).$$

SCHOLION.

Qui singularis hujus phænomeni periodicæ revolutionis in Jove quidem correptæ, in Saturno autem productæ rationem aliquam physicam primus omnium afferre voluit Cassinus in actis Parisiensis Academiæ anni 1746., cum in pluribus orbitarum locis Saturni, & Jovis vires supputasset, deprehendisse sibi visus est velocitatem projectionis Jovis a Saturno augeri semper, & velocitatem Saturni a Jove imminui. Quod quidem si verum esset dilatari potius deberet orbita Jovis, & tempus Jovis periodicum augeri, & contra imminui tempus periodicum Saturni. Leonardus Eulerus in opusculo de relaxatione motus Planetarum, ut simul imminuti anni Tropici apparentiis iis satisfaceret, quas libri hujus initio recensuimus, ætherei fluidi resistentiam in medium protulit, assumptisque hypothesibus quibusdam sæcularem periodicorum temporum imminutionem statuit Saturni 33″, Jovis 15″, Martis 1′ 2″, Terræ 5″, Veneris 25″, Mercurii 33″. At cum nulla sit certa anni Tropici æquatio, & motus medius Martis, Veneris, & Mercurii satis regularis sit, ut supra jam adnotavimus, tempus autem

pe-

periodicum Saturni e contra augeatur, patet non nisi Lunæ sæcularem æquationem esse, quæ ex resistentia ætherei fluidi possit repeti.

Idem phænomenon anno 1760. Parisiensis Academia præmio proposito explicandum obtulit, inquisivitque si quæ essent mediorum motuum Planetarum variationes, & qua ex caussa oriri possent. Carolus Eulerus in dissertatione, quæ ab Academia præmium retulit, investigavit potissimum quæ esse possent variationes medii motus Terræ ob vim Cometæ illius, qui anno 1759. apparuit: cumque in æquationem differentialem incidisset ipse, quæ juxta notas methodos ad integrationem deduci nequit, mutationes singulis diebus habitas spectavit veluti totidem differentialia, atque ita supputavit incrementum omne axis transversi terrestris orbitæ. Calculus autem omnis huc redit, quod si massa Cometæ illius fuisset tantum $\frac{1}{27}$ massæ terrestris, anni solaris quantitas integro minuto primo aucta fuisset: unde Cometæ massa minore etiam assumpta, Solaris annus ea quantitate auctus prodiisset, quæ observationibus potuisset detegi. Ad calcem tamen totius dissertationis Eulerus nonnulla adjecit, quæ ad propositi phænomeni explicationem pertinebant. Animadvertit enim perturbationes motus Planetarum in orbitis ellipticis serie quadam exprimi, cujus nonnulli termini continent sinum distantiæ aphelii duarum orbitarum, ac semper crescunt, vel decrescunt: addiditque etiam variationes inde ortas axis tranversi, & periodici temporis pendere ab excentricitate utriusque orbitæ, ac fieri maximas cum binæ apsidum lineæ se intersecant ad rectos angulos. In quibus vero orbitis, & quibus quantitatibus axis transversus, & periodicum tempus augeatur, vel imminuatur, num inde oriantur æquationes periodicorum temporum Saturni, & Jovis, minime author ipse indicavit.

In dissertatione, quam eodem anno ad Parisiensem Academiam transmisi, & quæ proxime accessit ad honorem præmii, veram, ac generalem protuli totius phænomeni explicationem. Positis enim, ut modo sunt, apsidibus Saturni, & Jovis ostendi mediam Jovis velocitatem imminui Saturni actione, & actione Jovis augeri velocitatem mediam Saturni, ac prioribus serierum terminis supputatis inveni periodicorum temporum variationes inde ortas satis esse sensi-

bi-

biles, ac generatim monui qua positione apsidum, & orbitarum Planetæ cujuslibet inferioris, vel superioris motus medius augeri, aut minui debeat. Eamdem methodum, serie longius perducta, libro tertio de Gravitate, & tomo quinto Commentariorum Bononiensium inserui. In dissertatione autem alia de eodem argumento conscripta, quæ anno 1770. a Regia Havniensi Academia præmium retulit, aliam methodum secutus, ex generali æquatione trium corporum se se attrahentium terminum quemdam erui, qui pro argumento habet angularem summarum apsidum distantiam, cujus si exigua etiam variatio aliqua intelligatur, patet adhuc periodicum Jovis tempus imminui, & Saturni tempus augeri in duplicata ratione numeri revolutionum absolutarum. Utramque methodum brevissime expositam coronidis loco hic adjeci, & in corollario Probl. XII. ostendi utramque simul coincidere. Substitutis etiam numeris pro Jove quidem æquationem eamdem obtinui, quam Clarifs. la Grange To. III. Academiæ Taurinensis ex nova, atque ingeniosa eruit solutione problematis trium corporum. At pro Saturno cum potius incrementum aliquod medii motus primo videatur colligi, indicavi qua ratione, & qua hypothesi medius motus periodicus minui debeat. Æquationem mediorum motuum, quæ pendet ex nodorum loco, & quam summus idem Geometra invenit esse $\frac{1}{40}$ circiter alterius æquationis, quæ pendet ex loco apsidum, minime supputavi. Hæc pro præsenti operis instituto sufficiant.

FRAG-

FRAGMENTUM. (*)

DE ANALYSI THEORIÆ LUNÆ, ET PLANETARUM.

CUM primam Lunæ æquationem, quæ dicitur æquatio centri, & quæ pendet ex orbitæ excentricitate Hipparchus, æquationem aliam, quæ evectio dicitur, Ptolemæus, tertiam Lunæ æquationem, quæ proprie variatio dicitur, & æquationem annuam Tycho agnovissent, ut initio libri antecedentis notatum est; Keplerus, & Horroxius evectionem spectarunt veluti correctionem quamdam æquationis centri, quæ variatæ excentricitati orbitæ responderet: quam duarum æquationum simul componendarum rationem Newtonus in Scholio suæ Theoriæ Lunaris cum observationibus omnibus ita accuratius conciliari dixit. Sit in fig. 67. excentricitas media lunaris orbitæ *TC* partium 0.05505 radii mediocris, qui accipitur pro unitate, producaturque *TC* in *B* ut sit *CB* sinus aberrationis maximæ apogæi lunaris a loco medio: quæ aberratio maxima apogæi cum juxta observationes sit 12° 18'; posito sinu toto 0.05505, fiet sinus *CB* partium 0.0117275. Centro *C*, ac radio *CB* describatur circulus, accipiaturque angulus *BCD* æqualis duplæ distantiæ loci veri Solis a loco apogæi Lunæ correcto per æquationem annuam. Juxta Newtonum exhibebit recta *TD* quantitatem veram excentricitatis pro dato apogæi loco, & angulus *BTD* exhibebit æquationem motus mediocris apogæi Lunæ, eritque excentricitas maxima $TB = 0.0667775$, quæ respondebit æquationi centri $7\frac{1}{2}°$ circiter, & minima excentricitas erit $TA = 0.0433225$, quæ respondebit æquationi centri circiter 5.°

Cum vero æquationem annuam, cum sit maxima, Newtonus statuisset 11'50", variari autem dixisset in semplici ratione sinus distantiæ Terræ a summa apside orbitæ circa Solem descriptæ, qui idem est sinus anomaliæ Solis ex adversa parte orbitæ signo contrario acceptus, ommissa hac æquationis annuæ, quæ præ æquatione centri, & evectione Lunæ exigua est, correctione, si angulus *BCD*

Cosmographia. Xxx sit

(*) *Vide adnotationem pag.* 433.

ſit dupla Solis diſtantia ab apogæo Lunæ, ex conſtructione Newtoniana facile colligetur, quæ evectionis lex, quod argumentum, & qui coefficiens eſſe debeat. Nam ſi Lunæ locus ſit L, erit $2TLC$ media æquatio centri, $2\ TLD$ vera centri ipſius æquatio ad tempus datum, & duarum æquationum differentia, ſeu Lunæ evectio $2\ DLC$, eritque anguli hujus ſinus $\frac{2DG}{LD}$, ſeu proxime $\frac{2DG}{LC} = \frac{2CD}{LC}$. ſin. DCL.

Quare ſi angulus LCB diſtantiæ Lunæ a loco apogæi medio viſæ e centro vocetur cZ, atque is quam proxime cenſeatur angulus anomaliæ Lunæ mediæ, & X ſit angulus diſtantiæ mediæ Lunæ a Sole e Terra viſæ, quia motus Lunæ ab apogæo major eſt motu Lunæ a Sole, erit angulus $BCD = 2cZ - 2X$, & angulus $DCL = 2X - cZ$: ſcilicet anomalia media Lunæ dempta dupla diſtantia Solis ab apogæo Lunæ æqualis erit duplæ diſtantiæ Lunæ a Sole dempta anomalia Lunæ media. His autem poſitis ſi radius lunaris orbitæ pro unitate accipiatur, fiet Lunæ evectio $= 2\ DC$. ſin.$(2X - cZ)$, & loco unitatis ſcribendo arcum $57.\ 29578°$, & pro DC ſcribendo $0.\ 0117275$, fiet evectio eadem $= 1°\ 20'\ 37''$. ſin. $(2X - cZ)$, erit ſcilicet æquationis coefficiens $= 1°\ 20'\ 37''$, argumentum $2X - cZ$.

Newtonus in eodem Scholio Theoriæ Lunaris attigit aliam æquationem, quam ſecundam centri æquationem appellavit, & cujus conſtructio huc redit. Poſitis omnibus ut antea fiat angulus LDF æqualis ſummæ diſtantiarum Lunæ a Sole, & apogæi Lunæ ab apogæo Solis, accipiaturque $DF = 0.\ 000352$. Si media Solis diſtantia a ſumma apſide vocetur Y, & ſit $cZ - Y$ diſtantia apogæi Lunæ a Sole, adeoque ſit diſtantia ſummarum apſidum Lunæ, & Solis a ſe invicem $Y + X - cZ$, erit perpendiculum HF ex F in LD ductum $= DF$. ſin. $LDF = 0.\ 000352$. ſin. $(2X - cZ + Y)$. Juxta Newtonum concipi debet centrum lunaris orbitæ abire ex D in F, ut recta HF ad Lunam L ſubtendat angulum variatæ excentricitatis orbitæ, & recta eadem duplicata ſubtendat ad Terram angulum variatæ æquationis centri. Quare cum 0.000704 reſpondeat arcui $2'\ 25''$, erit juxta Newtonum ſecunda æquatio centri $2'\ 25''$. ſin. $(2X - cZ + Y)$. Huic ipſe æquationem aliam ibidem addidit, quam

quam ſemeſtrem appellavit, eo quod pendeat ex angulo BCD duplæ diſtautiæ apogæi Lunæ a Sole: ita quidem ut ſit maxima æquatio cum apogæum Lunæ verſatur in octante cum Sole, & nulla cum apogæum ad quadraturas Solis, vel ad ſyzigias defertur, addaturque eadem motui medio in tranſitu apogæi Lunæ a Solis quadratura ad ſyzigiam, & ſubducatur in reditu a ſyzigia ad quadraturam. Quantitatem maximam hujus æquationis ſe ex phænomenis collegiſſe dixit Newtonus in media quidem Solis diſtantia a Terra $3' \, 45''$, in perigæo Solis $3' \, 56''$, in apogæo autem $3' \, 34''$, & pro quolibet Lunæ loco mediocrem æquationem hujuſmodi ſemeſtrem ſtatuit $- 3' \, 45''$. ſin.$(2\,cZ - 2\,X)$. Aliam etiam Lunæ æquationem memoravit Newtonus, quæ pendet ex loco nodi, quæque, ſi media Lunæ diſtantia a nodo aſcendente orbitæ vocetur S, eſſet $- 47''$. ſin. $(2\,S - 2\,X)$. Quæ variationis primæ, & ſecundæ quantitas a Newtono ſtatuta fuerit, initio pariter antecedentis libri notatum eſt.

In Aſtronomica Hiſtoria prætereundum non erit unquam quid pro minoribus Lunæ æquationibus ſupputandis, condendiſque motuum omnium Lunarium tabulis primus omnium præſtiterit Newtonus. Quid vero ſummi alii Aſtronomi poſt Newtonum pro tabulis Lunaribus perficiendis, corrigendiſque æquationibus ſingulis ad Tobiam Mayerum uſque adjecerint minime vacat commemorare cum omnium ſimul obſervationes collegerit Mayerus ipſe, iiſque comparatis inter ſe invicem, & cum aliis omnibus Aſtronomorum veterum obſervationibus condiderit tabulas omnium accuratiſſimas, quibus Geographi & Nautæ ad locum Lunæ dato quocumque tempore ſupputandum, & locorum terreſtrium longitudinem inde eruendam uterentur, & quibus cum Mathematici Lunaris Theoriæ conſectaria, æquationeſque ex gravitatis legibus erutas poſſent comparare. Eximium Mayeri opus ad Geographiæ, & Nauticæ beneficium juſſu Præfectorum Rei Longitudinariæ anno 1767 Londini editum eſt. In iiſdem Mayeri tabnlis cnm excentricitas lunaris orbitæ primum aſſumpta eſſet partium 0.05454 radii mediocris, ut obſervationibus ſatis fieret accuratius, ſui parte $\frac{1}{300}$ aucta eſt, unde eſſet correcta excentrici-

 tas

tas 0.0547 satis proxime, ac posito quod anomalia Lunæ media vocetur cZ, esset omnis æquatio centri

$$-6^\circ\ 19'\ 7''.\ \text{sin}.cZ + 12'\ 58''.\ \text{sin}.\ 2cZ - 37''.\ \text{sin}.\ 3cZ,$$

quemadmodum in Coroll. III. Probl. IV. Lib. I. statutum est.

Mayerus etiam §. XLVI. motum Lunæ diurnum statuit $13^\circ\ 10'\ 35''$, & motum diurnum apogæi $6'\ 40''\ 56''$, unde esset annuus apogæi motus $40^\circ\ 42'$ circiter, atque esset insuper $cZ : Z = c : 1 = 13^\circ\ 10'\ 35'' : 13^\circ\ 17'\ 15''\ 56''' = 0.9916186 : 1$. Pariter nodorum motus integro anno sidereo juxta Mayeri tabulas esset $19^\circ\ 20'\ 31''$, & cum motus hujusmodi sit retrogradus, esset medius Lunæ motus ad motum medium a nodo supputatum ut $360^\circ : 379^\circ 20' 31' = 1 : 1.05375$. Parallaxis horizontalis Solis §. LI. a Mayero assumitur $7.8''$, & parallaxis horizontalis mediocris Lunæ §. XXXVII. assumitur $57'\ 8''$: unde esset duarum parallaxium ratio, quæ juxta formulas Cap. V. Lib. I. eadem esset ratio distantiæ mediocris Lunæ a Terra ad distantiam mediocrem Solis $78 : 3428 = 1 : 440$ satis proxime. Si parallaxis mediocris Solis statuatur $9''$, esset duarum distantiarum ratio $1 : 381$. Denique inclinationem mediam lunaris orbitæ ad Eclipticam in Gottingensi tabularum editione primum statuerat $5^\circ\ 9'\ 8''$, in Londinensi editione tabularum $5^\circ\ 8'\ 52''$, & §. LVII. theoriæ lunaris $5^\circ\ 8'\ 30''$: unde inclinationis sinus juxta posteriorem hanc determinationem assumi posset 0.08962, cosinus 0.996.

Mayerus æquationes quindecim medii motus Lunæ ex observationibus omnibus collectas protulit, quarum quæ præcipuæ sunt, centri æquatio, evectio, variatio, & æquatio annua ex aliis aliquot æquationibus coalescunt. Ut vero correctiones illas exiguas evitaret Mayerus, quæ pendent ex reductione veri motus Solis ad medium, medium Lunæ locum ad locum Solis non medium sed verum retulit. Quantitates maximæ, quæ coefficientes sunt æquationum singularum, & anguli, qui æquationum argumenta exhibent, quorum sinus videlicet in quantitatem maximam ducti exhibent quantitatem veram æquationis cujusque ad tempus datum, apud Mayerum sunt ut in tabula sequente

Coe-

	Coefficientes.	Argumenta Æquationum.
I.	+0°. 11′. 14″.	Anomalia media Solis,
	—0. 0. 4.	Dupla eadem anomalia.
II.	—0. 0. 56.	Dupla distantia media Lunæ a loco Solis vero, addito primum, ac dempto deinde argumento primo.
III.	—0. 1. 6.	
IV.	+0. 0. 49.	Dupla distantia media Lunæ a loco Solis vero, addita primum, ac deinde dempta anomalia Lunæ media.
V.	—1. 20. 36.	
	+0. 0. 26.	Posterior angulus bis acceptus.
VI.	+0. 2. 0.	Dupla distantia media Lnnæ a loco Solis vero; dempta anomalia Lunæ media atque addita, ac deinde dempta anomalia media Solis.
VII.	+0. 0. 47.	
VIII.	+0. 0. 28.	Anomalia Lunæ media dempta anomalia media Solis.
IX.	+0. 0. 51.	Dupla longitudo media nodi dempta longitudine vera Solis.
X.	+0. 0. 16.	Longitudo media apogæi Lunæ dempta longitudine vera Solis.
	—0. 1. 0.	Posterior angulus bis acceptus.
XI.	+0. 0. 4.	Longitudo media nodi ascendentis lunaris orbitæ:
XII.	—6. 18. 11.	Anomalia media Lunæ decem æquationibus præcedentibus correcta, atque æquata, & pro priore coefficiente semel, pro altero bis, pro tertio ter accepta.
	+0. 12. 52.	
	—0. 0. 37.	
XIII.	—0. 1. 55.	Distantia loci Lunæ æquati a loco Solis vero in quatuor hisce coefficientibus ordine accepta semel, bis, ter, quater.
	+0. 35. 47.	
	+0. 0. 2.	
	+0. 0. 14.	
XIV.	+0. 1. 26.	Dupla distantia loci Lunæ æquati, & per variationem correcti a loco nodi correcta, dempta in XIV. argumento anomalia Lunæ media & correcta.
XV.	+0. 6. 51.	

Cum hisce omnibus argumentis, ac coefficientibus Mayeri tabulæ constructæ sint, ut in æquationibus posterioribus priorum habeatur ratio, adjiciantur que quæ indicatæ sunt reductiones, correctionesque, & argumenta æquationum, & quas Mayerus ex observationibus collegit, &

quas

quas inferius ex theoria gravitatis eruemus, mediis Lunæ locis, ac motibus exprimantur, ſit ut antea motus Lunæ medius Z, anomalia Lunæ media cZ, anomalia media Solis Y, media Lunæ diſtantia a nodo S, & ſit X diſtantia loci Lunæ medii a loco Solis non medio, ſed vero. Poſitis hiſce denominationibus cum pars prior duodecimæ æquationis, quæ potior etiam pars eſt æquationis centri, juxta Mayerum pro argumento habeat anomaliam Lunæ mediam per æquationes alias præcedentes correctam; omiſſis æquationibus minoribus, unde erutæ correctiones ad decimales inferiorum ordinum pertinent, & evectionis dumtaxat, atque æquationis annuæ ratione habita, erit correctum argumentum, & conſuetis aliis approximationibus Trigonometricis reſolutum

$$\text{ſin.}\,(cZ - 1^\circ\,20'\,36''.\,\text{ſin.}\,(2X - cZ) + 11'\,14''.\,\text{ſin.}\,Y)$$
$$= \text{ſin.}\,cZ - 1^\circ\,20'\,36''.\,\text{ſin.}\,(2X - cZ).\,\text{coſ.}\,cZ + 11'\,14''.\,\text{ſin.}\,Y.\,\text{coſ.}\,cZ$$
$$- \tfrac{1}{2}(1^\circ\,20'\,36'')^2.\,\text{ſin.}\,(2X - cZ^2).\,\text{ſin.}\,cZ$$
$$= \text{ſin.}\,cZ - \tfrac{1}{2}(1^\circ\,20'\,36'').\,\text{ſin.}\,(2X - 2cZ) - \tfrac{1}{2}(1^\circ\,20'\,36'').\,\text{ſin.}\,2X$$
$$+ \tfrac{1}{2}(11'\,14'').\,\text{ſin.}\,(cZ + Y) - \tfrac{1}{2}(11'\,14'').\,\text{ſin.}\,(cZ - Y)$$
$$- \tfrac{1}{4}(1^\circ\,20'\,36'')^2.\,(\overline{\text{ſin.}\,cZ} - \text{ſin.}\,\overline{4X - cZ} + \text{ſin.}\,4X - 3cZ)$$

Cum igitur ſinus totus, qui in hiſce Trigonometricis reductionibus aſſumitur pro unitate, æquetur arcui 57.29578°, ſive 206264.808″. ſi coefficientes ſinguli per hujuſmodi radium diviſi ducantur in $-6^\circ 18' 11''$. & compendii ratione duplici ſigno $\pm$, aut $\mp$ non alterutrum terminorum, ſed terminum utrumque accipiendum eſſe intelligamus, & duplici ſigno bis poſito ſimul duo ſigna ſuperiora, ac pariter duo ſimul ſigna inferiora referamus ad ſe invicem; quæ prior, ac potior pars æquationis centri apud Mayerum eſt in has alias æquationes reſolvetur

$$-6^\circ\,18'\,11''.\,\text{ſin.}\,cZ + 4'\,26''.\,\text{ſin.}\,(2X - cZ \mp cZ)$$
$$\pm 37.7''.\,\text{ſin.}\,(cZ \mp Y) - 3''.\,(\text{ſin.}\,cZ \pm \text{ſin.}\,4X - 2cZ \pm cZ).$$

Quæ etiam apud Mayerum altera eſt pars æquationis centri, & coefficientem habet $+12'\,52''$, ſimili modo per æquationem præcipuam evectionis correcta, præter $+12'\,52''.\,\text{ſin.}\,2cZ$ exhibebit binas alias æquationes $-18''.\,\text{ſin.}\,(2X - cZ \mp cZ)$.

Simili modo correcta per æquationem annuam diſtantia Lunæ a Sole, ut jam habeatur diſtantia a loco Solis non vero, ſed medio, erit evectio —

$-1^\circ 20' 36''.\ \text{fin.}\ (2X - cZ - 2\,(11' 14'')\,.\ \text{fin.}\ Y)$
$= -1^\circ 20' 36''.\ \text{fin.}\ (2X - cZ) \pm 18''.\ \text{fin.}\ (2X - cZ \pm Y).$

Pariter fi argumentum variationis in tabulis Mayeri tantum per æquationem ceutri debeat corrigi, ut indicari videtur verbis duplæ diſtantiæ loci Lunæ æquati a loco Solis vero; erit variatio omnis correcta

$35' 47''.\ \text{fin.}\ (2X - 2\,(6^\circ 18' 11'')\,.\ \text{fin.}\ cZ)$
$= 35' 47''.\left(\begin{array}{l}\text{fin.}\ 2X \pm 6^\circ 18' 11''.\ \text{fin.}\ (2X \pm cZ) \\ -\,(6^\circ 18' 11'')^2\,.\,(\text{fin.}\ \overline{2X} \mp \text{fin.}\ \overline{2cZ \pm 2X}\end{array}\right)$
$= 35' 47''.\ \text{fin.}\ 2X \pm 3' 54.3''.\ \text{fin.}\ (2X \mp cZ)$
$-26''.\ \text{fin.}\ 2X \pm 26''.\ \text{fin.}\ (2cZ \pm 2X).$

Hiſce omnibus ad argumenta mediorum Lunæ motuum deductis, ac poſterioribus Mayeri æquationibus per præcedentes alias correctis, ſupereſſet jam corrigenda per æquationem centri ultima Mayeri æquatio, quæ coefficientem habet $-\ 6' 51''$, atque habet pro argumento duplam diſtantiam loci Lunæ æquati a nodo, neglectiſque aliis inferiorum ordinum correctionibus ſupereſſet

$-\ 6' 51''.\ \text{fin.}\ 2S \pm 45''.\ \text{fin.}\ (2S \pm cZ).$

Colligendo igitur in unam ſummam terminos omnes ejuſdem nominis, & quos ſingillatim tradidit Mayerus, & quos his reductionibus adjecimus, negligendoque in æquationibus aliis Mayeri minores alias correctiones, quæ in coefficientibus reducendis fractiones tantum inferiorum ordinum exhiberent; æquationes Lunæ omnes ad hanc aliam formam deduci poſſent.

$-6^\circ\ 18'\ 11''.\ \text{fin.}\ cZ$	$-1^\circ\ 16'\ 42.7''.\ \text{fin.}\ 2X - cZ$
$+\ 12'\ 52''.\ \text{fin.}\ 2cZ$	$-\ 3'\ 5.3''.\ \text{fin.}\ 2X + cZ$
$-\ 37''.\ \text{fin.}\ 3cZ$	$-\ 3''.\ \text{fin.}\ 4X - cZ$
$-\ 1'\ 55''.\ \text{fin.}\ X$	$+\ 8''.\ \text{fin.}\ 4X - 2cZ$
$+\ 39'\ 29''.\ \text{fin.}\ 2X$	$+\ 3''.\ \text{fin.}\ 4X - 3cZ$
$+\ 2''.\ \text{fin.}\ 3X$	$+\ 16''.\ \text{fin.}\ X - cZ$
$+\ 14''.\ \text{fin.}\ 4X$	$+\ 34''.\ \text{fin.}\ 2X - 2cZ$
$+\ 11'\ 14''.\ \text{fin.}\ Y$	$+\ 26''.\ \text{fin.}\ 2X + 2cZ$
$-\ 4''.\ \text{fin.}\ 2Y$	$+\ 1'\ 5.7''.\ \text{fin.}\ cZ - Y$
$-\ 6'\ 51''.\ \text{fin.}\ 2S$	$-\ 37.7''.\ \text{fin.}\ cZ + Y$
$+\ 41''.\ \text{fin.}\ 2S - cZ$	$-\ 1'\ 6''.\ \text{fin.}\ 2X - Y$

+

$+ 45''.$ fin. $2\,S + cZ$ $\qquad -56''.$fin.$2X + Y$

$-51''.$ fin. $2\,S - 2X$ $\qquad + 29''.$fin.$2X - Y - cZ$

$\qquad + 2'\ 18''.$fin.$2X + Y - cZ$

Ad æquationes latitudinis quod pertinet Mayerus primo tangentem inclinationis lunaris orbitæ ad eclipticam assumpsit 0.09, unde esset media inclinatio $5^\circ\, 8'\, 26.1''$. Collatis deinde observationibus $4''$ adjicenda esse censuit. Denique æquationes decem latitudinis Lunæ ex iisdem observationibus depromptas protulit, quæ si jam X indicaret distantiam loci veri Lunæ in sua orbita a loco Solis vero, & S indicaret distantiam ejusdem veri Lunæ loci in sua orbita a correcto loco nodi ascendentis, deberent exprimi ut sequitur

I.	$\left(+5^\circ\ 8'\ 30''.\right.$ fin. S $\left. -6.5''.\right.$ fin. $3\,S$
II.	$+8'\ 47''.$ fin. $2\,X - S$
III.	$-\ 8''.$ fin. $2\,X - S + Y$
IV.	$-\ 5''.$ fin. $2\,X - S - Y$
V.	$-\ 3''.$ fin. $2\,X - S + c\,Z$
VI.	$+\ 16''.$ fin. $2\,X - S - c\,Z$
VII.	$-\ 16''.$ fin. $S - c\,Z$
VIII.	$-\ 29''.$ fin. $S - 2\,c\,Z$
IX.	$+\ 3''.$ fin. $S - 3\,c\,Z$
X.	$+\ 6''.$ fin. $2\,X - 2\,c\,Z + S$

Harum vero æquationum prior cum pendeat ex loco, quem habet Luna in sua orbita dato angulo ad eclipticam inclinata, novem aliæ æquationes quæ pendent ex loco, atque ex actione Solis, si ad præcedentes denominationes reducantur, & loco X intelligatur rursus distantia medii loci Lunæ a loco vero Solis, ob coefficientium exiguitatem nullas alias correctiones suppeditabunt, quarum ratio haberi debeat, secunda æquatione excepta, quæ si ad locum Lunæ medium reducatur, corrigaturque per æquationem centri, loco $2\,X - S$ scribendo $2\,X - S - 2\,(6^\circ\, 18'\, 11'')$. fin. $c\,Z$, præter æquationem $8'\, 47''.$ fin. $2\,X - S$ æquationes binas exhibebit $\pm\, 1'.$ fin. $2\,X - S \mp c\,Z$, quibus compositis cum quinta, & sexta æquatione ejusdem nominis æquationes relinquent

$1'\, 16''.$ fin. $(2\,X - S - c\,Z) - 1'\, 3''.$ fin. $(2\,X - S + c\,Z)$.

Iis

Iis omnibus æquationibus locum Lunæ in sua orbita tam accurate supputari posse contendit Mayerus ut error omnis in calculo longitudinis non sit major 1′ 27″, & in calculo latitudinis non major 20″. Quod etiam si concedatur ex hac ipsa tamen reducendarum æquationum ratione manifestum est in supputandis Lunæ locis saltem non multo arctiores diligentiæ limites esse posse. Cum enim posteriores æquationes per priores alias corriguntur, reducunturque argumenta ut Mayerus præcipit, tot quantitates exiguæ occurrunt, quæ licet analytice supputari ultra quoscumque limites, & datis prioribus æquationibus accurate exhiberi possint, cum astronomicis tamen observationibus non ita accurate possunt comparari ut innotescat & qui æquationis cujusque coefficiens comparatis observationibus colligatur, & quibus veri, & medii motus correctionibus argumenta æquationum singularum respondeant, & qua ratione secernendum sit quid ad unum, aut alterum argumentum, unamque aut alteram æquationum pertineat. Quod tanto magis statuendum est cum de comparandis observationibus exiguo temporis intervallo a se dissitis, & locis Lunæ ad normam tabularum reducendis agitur: ut jam aliquot ab hinc annis monui cum de tabulis motus horarii Lunæ apud nos ageretur, & de horariis mediorum motuum correctionibus. Nam qui periodicus apogæi motus directus est, & nodorum motus retrogradus, diurnus tamen, & horarius motus quandoque in linea apsidum retrogradus, & in nodorum linea directus est: unde cum exempli caussa ad apogæi locum post horas aliquot supputandum, definiendamque anomaliam Lunæ mediam apogæi motus ille spectatur, qui in tota revolutione est vere medius, quandoque horis singulis additur, quod debet revera subtrahi, & viceversa, ac verus Lunæ locus horariis iis correctionibus exhiberi nequaquam potest.

Universim vero considerandum est diligentiæ Astronomicæ suos esse limites ultra quos progredi hominibus non est concessum: & qui in instituendis observationibus diu versati sunt minime opus habent ut loci Lunæ observandi, ac reducendi methodus recenseatur, expendaturque ne locum ipsum intra aliquot secundorum limites certo agnitum esse jactitent: quique insuper considerare velint ad tabularum constructionem, & æquationum singularum calculum re-

centiores observationes comparandas fuisse cum vetustioribus, quæ nec tanto studio, nec tantis instrumentis instituebantur, minime expectabunt ut verus Lunæ locus accurate adeo iisdem tabulis definiatur. Et plane Mayerus ipse in priore tabularum Lunarium editione, quæ prodiit tomo tertio Commentariorum Gottingensis Academiæ æquationes motuum Lunæ ex observationibus Astronomicis derivatas protulit, quæ fere singulæ secundis aliquot diffident a posteriore tabularum editione: & qui post ipsum Astronomi cum novis aliis observationibus tabulas compararunt adhuc alias differentias deprehenderunt observationum, & tabularum. Ut igitur vanum est in instituendis observationibus, comparandisque tabulis arctiores diligentiæ limites exposcere, ita etiam cum singulæ motuum lunarium æquationes ex theoria gravitatis erutæ, ac supputatæ fuerint, quod non nisi approximationibus aliis præstari potest, satis erit ut intra eosdem limites quam proxime æquationes singulæ cum tabulis conveniant: & cum in illa, quam modo exponemus inæqualitatum Lunæ supputandarum methodo calculus ad minores etiam fractiones perduci possit, in numeris subducendis hos tantum nobis limites proponemus.

CAPUT PRIMUM.

DE ÆQUATIONE DIFFERENTIALI PROBLEMATIS TRIUM CORPORUM SE ATTRAHENTIUM.

PROBLEMA I.

Si corpus aliquod gravitate, quæ sit reciproce ut quadratum distantiæ, ellipsim circa focum describat, & viribus aliis quibuscumque abducatur a perimetro ellipseos, invenire elementum temporis, quod elemento cuilibet angularis motus respondet.

Sit φ excentricitas, & 1 major semiaxis illius ellipseos, quæ descriptæ orbitæ est propior, & quæ viribus decrescentibus in duplicata ratione auctarum distantiarum describi posset, Velocitas in circulo radii $1+\varphi$, juxta Theor. II. Lib. I., ea est, qua corpus eadem vi

vi centripeta $\frac{1}{(1+\varphi)^2}$ decideret per altitudinem $\frac{1}{2}.\overline{1+\varphi}$: & juxta alia accelerati motus principia velocitas hujusmodi esse debet $\sqrt{\left(\frac{1}{1+\varphi}\right)}$. Velocitas autem in circulo, per Coroll. II. Theor. IX. Lib. I., est ad velocitatem in vertice ellipseos ad eamdem distantiam descriptæ ut $\sqrt{\overline{2+2\varphi}}$ ad radicem lateris recti princiqalis, quod est $2.\overline{1-\varphi^2}$. Est igitur velocitas in vertice ellipseos $\sqrt{\left(\frac{1-\varphi}{1+\varphi}\right)}$: & cum ob areas temporibus proportionales velocitas radio vectori perpendicularis variari debeat in ratione inversa vectoris radii, si radius vector vocetur x, fiet universim quadratum velocitatis perpendicularis $\frac{\overline{1+\varphi}.\overline{1-\varphi}}{x^2}$, & vis centrifuga $\frac{1-\varphi^2}{x^3}$. At insuper sector ellipticus in summa apside æquari debet spatio percurso in $\frac{1}{2}.\overline{1+\varphi}$ ducto: spatium vero est productum elementi temporis in projectionis velocitatem $\sqrt{\left(\frac{1-\varphi}{1+\varphi}\right)}$. Quod si igitur elementum temporis sit $d\,\theta$, erit sector ellipticus $\frac{1}{2}\sqrt{(1-\varphi^2)}.\,d\theta$, augebiturque in simplici ratione temporis. Et iis quidem spectatis tantum viribus perturbatricibus, quæ juxta vectorem radium diriguntur, abducetur corpus a perimetro ellipseos, efficieturque ut radius vector x a radio elliptico differat: areæ vero circa focum descriptæ adhuc erunt proportionales temporibus. At vires perpendiculares radio, cum corpus accelerent, aut retardent, efficient etiam ut alia sit lex arearum, & sector $\frac{1}{2}x.\,x\,d\,\zeta$, qui radio x, & elemento eodem temporis $d\,\theta$ describitur, quique ad focum subtendit angulum $d\,\zeta$, sectore elliptico major, vel minor sit. Et quia, data vi acceleratrice, spatia percursa sunt ut quadrata temporum, si vis perpendicularis radio vocetur ω, erit $\omega\,d\,\theta$ velocitas inde orta, & $\omega\,d\,\theta^2$ spatium eodem elemento temporis percursum, & elementum variationis areæ erit $\frac{1}{2}x.\,\omega\,d\,\theta^2$, & tota sectoris elliptici variatio erit $\frac{1}{2}\int\omega\,x\,d\theta^2$, sive $\frac{1}{2}d\,\theta.\int\omega\,x\,d\theta$ vel proxime $\frac{1}{2}d\,\theta.\int\omega\,x^2 d\,\zeta$. Primo enim

ob parvitatem vis perturbatricis negligi poterit productum quantitatis $\frac{1}{2}\int \omega\, x\, d\theta$ in variationem elementi temporis $d\theta$, quæ oritur ex vi ω, quæque aliqua ipsius potentia debet exprimi: deinde vero in producto $\omega\, d\theta$ negligi poterit differentia sectoris $\frac{1}{2}\, x^2 d\zeta$, & sectoris elliptici $\frac{1}{2}\sqrt{(1-\varphi^2)}.\, d\theta$, & loco $\omega\, x\, d\theta$ substitui poterit $\omega\, x^2\, d\zeta$. Erit igitur

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\varphi^2)}.\, d\theta = \tfrac{1}{2} x^2 d z - \tfrac{1}{2} d\theta . \int \omega\, x^2\, d z, \ \&$$
$$d\theta = \frac{x^2 d\zeta}{\sqrt{(1-\varphi^2)} + \int \omega\, x^2 d z}.$$

COROLLARIA.

I. Si iisdem positis denominationibus gravitas in mediocri distantia ut antea vocetur 1, & universim sit $\frac{1}{x^2}$; erit $\frac{1-\varphi^2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$ vis omnis, qua corpus in orbita elliptica juxta vectorem radium ascendet, vel descendet. Quod etiam ex aliis principiis potest colligi. Cum enim vis centripeta ad centrifugam in summa apside ellipseos se habere debeat reciproce ut radius osculi $1-\varphi^2$ ad foci distantiam $1+\varphi$, sive directe ut $1 : 1-\varphi$, ac sit ibidem gravitas $\frac{1}{(1+\varphi)^2}$; erit vis centrifuga $\frac{1-\varphi}{(1+\varphi)^2}$: quæ cum variari debeat in ratione x^3 ad $(1+\varphi)^3$, erit in distantia quacumque x vis centrifuga $\frac{1-\varphi^2}{x^3}$.

II. Quia vero quadratum spatii divisum per quadratum temporis $\frac{x^4 d\zeta^2}{1-\varphi^2+2\int\omega\, x^2 d z}$ æquatur quadrato velocitatis; spectatis viribus perturbatricibus erit quadratum velocitatis radio vectori perpendicularis $\frac{x^2 d z^2}{d\theta^2} = \frac{1-\varphi^2+2\int \omega\, x^2\, d\zeta}{x^2}$: & vis centrifuga, quæ in orbita elliptica jam erat $\frac{1-\varphi^2}{x^3}$, ob vires ipsas perturbatrices fiet $\frac{1-\varphi^2+2\int \omega\, x^2\, d z}{x^3}$: eritque ipsius vis centrifugæ, ac gravitatis differentia $\frac{1-\varphi^2+2\int \omega\, x^2\, d z}{x^3} - \frac{1}{x^2}$.

III.

III. Si vires omnes perturbatrices accipiatur ut in Probl. I. Lib. II., & sit mediocris vis. perturbatrix juxta vectorem radium exercita $\frac{1}{2} n^2 x . \overline{1 - \frac{1}{2}\pi^2}$, & vires aliæ juxta eumdem radium agentes vocentur ω; erit vis omnis qua Luna juxta vectorem radium ascendet, vel descendet $\frac{1 - \varphi^2 + 2\int \omega x^3 dz}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} n^2 x . \overline{1 - \frac{1}{2}\pi^2} + \varpi$.

Vis enim ω, cum sit radio perpendicularis, non alia ratione motum Lunæ accedendi, aut recedendi a Terra juxta radium ipsum afficiet, quam quod velocitatem perpendicularem, & vim centrifugam minuat, vel augeat: tota autem velocitas eadem perpendicularis, & velocitas juxta vectorem radium ob vires alias exsurgens semitam omnem Lunæ determinant.

PROBLEMA II.

Iisdem positis invenire æquationem differentialem vectoris radii.

In primis si radius quicumque vector sit x, & $d x$ elementum radii, atque universim sit $d v$ elementum velocitatis, qua corpus aliquod ob vim quamcumque acceleratricem F juxta radium ipsum ascendit, vel descendit; erit $F\, d\theta = d v$: & cum sit $v = \frac{dx}{d\theta}$, elementis de more sumptis fiet $F . d\theta = \frac{ddx . d\theta - dx . dd\theta}{d\theta^2}$, sive $F . d\theta = ddx - dx . \frac{dd\theta}{d\theta}$: ad quam generalem formulam motus omnis variabilis reducitur. In casu autem problematis antecedentis erit

$$d\theta = \frac{x^2\, dz}{\sqrt{(1 - \varphi^2) + \int \omega x^3 dz}}$$

$$dd\theta = \frac{2\, x\, dx\, dz}{\sqrt{(1 - \varphi^2) + \int \omega x^3 dz}} - \frac{x^2 dz . \varphi\, x^3 dz}{1 - \varphi^2 + 2\int \omega x^3 dz}$$

$$- dx . \frac{dd\theta}{d\theta} = - \frac{2\, dx}{x} + \frac{\varphi\, x^3\, dx\, dz}{\sqrt{(1 - \varphi^2) + \int \omega x^3 dz}}$$

Quod si igitur loco F substituamus expressionem ipsam corollarii posterioris, & loco $d\theta$ ipsam primi problematis expressionem habebitur differentialis æquatio

F.

$$F.\, d\theta^2 = d\,d\,x - \frac{2\,dx^2}{x} + \frac{\omega\, x^3\, d\,x\, d\zeta}{\sqrt{(1-\varphi^2)+\int \omega x^3 d\zeta}}$$

$$= x d z^2 - \frac{x^3\, d z^2}{1-\varphi^2 + 2\int \omega\, x^3\, d\zeta} + \frac{(\frac{1}{2} n^2 x.\overline{1 - \frac{1}{2}\pi^2} + \varpi).x^4\, d\zeta^2}{1-\varphi^2 + 2\int \omega\, x^3\, d\zeta}.$$

Neglectis itaque ob parvitatem quadratis virium perturbatricium, earumque productis in potestates excentricitatis plusquam quadraticas, æquatio differentialis orbitæ hoc ordine disponi poterit

$$\frac{x\,d\,d\,x - 2\,d\,x^2}{d\,\zeta^2} = x^2 - \frac{x^3}{1-\varphi^2} + \frac{(\frac{1}{2} n^2 x^6.\overline{1-\frac{1}{2}\pi^2} + \pi x^4)}{1-\varphi^2}$$

$$+ \frac{2\; x^3 \int \omega\; x^3\, d z}{1 - 2\,\varphi^2} - \omega\, x^4. \frac{dx.}{d\zeta}$$

COROLLARIA.

I. Si fiat $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} n^2 x.\overline{1 - \frac{1}{2}\pi^2} - \varpi = \psi$, & $1 - \varphi^2 = g^2$, prior æquatio differentialis hanc aliam formam induet

$$x\, d\, z^2 - d\,d\,x + \frac{2\,dx^2}{x} = \frac{\psi\; x^3 d\,\zeta^2}{g^2 + 2\int \omega\, x^3\, d\zeta} + \frac{\omega\; x^3\, d\,x\, d\,\zeta}{g + \int \omega\, x^3\, d\zeta}:$$

& quia quantitas ω exigua est, g vero proxime accedit ad unitatem, proxime etiam statui poterit

$$x\, d\,\zeta^2 - d\,d\,x + \frac{2\,dx^2}{x} = (\psi + \frac{\omega\; d\; x}{x\,d\,z}).\frac{x^3\, d\; \zeta^2}{g^2 + 2\int \omega\; x^3\; d\,\zeta}$$

II. Comparatis autem speciebus eadem hæc deprehendetur æquatio differentialis Problematis trium corporum se attrahentium, quam sua singuli methodo tradiderunt Eulerus, Alembert, Clairaut, Mayer, Simpson, Melanderhjelm. Apud Alembertum enim pag. 55. Part. 1. de Mundi Systemate est $g^2 = \frac{R^2}{1+3\varphi^2}$, & juxta antecedentes nostras denominationes esse deberet $R = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\varphi^2}$ quam proxime, adeoque esset $g^2 = 1 - \varphi^2$. Hoc autem posito non alia exsurgeret in comparandis æquationum terminis differentia quam quod apud nos occurrat terminus $\frac{\omega\; x^3\, d\,x\; d\zeta}{g + \int \omega\, x^3\, d\zeta}$ loco termini $\frac{\omega\; x^3\; d\,x\; d\,\zeta,}{g + 2\int \omega\, x^3\; dz}$ qui oc-

occurrit apud Alembertum citato in loco. Hæc vero exigua differentia, quæ ex neglectis quantitatibus inferiorum ordinum pendet, nihil ad calculi progressum faciet: etenim ob parvitatem vis perturbatricis ω, & differentiæ ι radii vectoris x in calculis subsequentibus supputandus dumtaxat occurret terminus $\omega x^3 dx\, d\zeta$ supra erutus ex æquatione temporis $d\theta = \frac{x^2 d\zeta}{\sqrt{(1-\varphi^2)+S\omega x^3 dx}}$, quæ nobis & memoratis Authoribus est communis.

III. Quod si fiat insuper $x = \frac{1}{u}$, $dx = -\frac{du}{u^2}$, $\frac{dx^2}{x} = \frac{du^2}{u^3}$, $ddx = -\frac{u^2 ddu + 2u du^2}{u^4}$, & $x d\zeta^2 - ddx + \frac{2dx^2}{x} = \frac{d\zeta^2}{u} + \frac{ddu}{u^2}$, æquatio eadem differentialis in hanc aliam transformabitur

$$u d\zeta^2 + ddu - \frac{\frac{d\zeta^2}{g^2 u^2}\left(\psi - \frac{\omega du}{u d\zeta}\right)}{1 + \frac{2\int \omega d\zeta}{g^2 u^3}} = 0,$$

quæ pariter apud Authores jam memoratos occurrit ultima æquationis differentialis reductio.

PROBLEMA III.

Iisdem positis invenire æquationem differentialem differentiæ vectoris radii, quæ gignitur actione virium perturbatricium.

Si excentricitas orbitæ ellipticæ ur antea vocetur φ, & distantia mediocris a foco exprimatur unitate, juxta formulas Probl. III. Lib. I., erit radius vector ellipseos $\frac{1-\varphi^2}{1-\varphi.\,\text{cos}.\,c\zeta}$: & si insuper ι designet spatium illud exiguum, quo corpus actione virium perturbatricium abducitur a perimetro ellipseos, neglectis plusquam quadraticis excentricitatis potestatibus fiet ordine

$$x = 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \varphi.\,\text{cos}.\,c\zeta + \tfrac{1}{2}\varphi^2.\,\text{cos}.\,2c\zeta + \iota$$

$$\frac{dx}{d\zeta} = -\varphi c.\,\text{sin}.\,c\zeta - \varphi\ c.\,\text{sin}.\,2.c\zeta + \frac{d\iota}{d\zeta}$$

$$-\frac{2dx^2}{d\zeta^2} = -\varphi^2 c^2 + \varphi^2 c^2.\,\text{cos}.\,2c\zeta - \frac{2d\iota^2}{d\zeta^2}$$

$$+ 4\varphi c.\,\text{sin}.\,c\zeta.\frac{d\iota}{d\zeta} + 4\varphi^2 c.\,\text{sin}.\,2c\zeta.\frac{d\iota}{d\zeta}.$$

ddx

$$\frac{ddx}{dz^2} = -\varphi c^2 . \text{cof.}\, cz - 2\varphi^2 c^2 . \text{cof.}\, 2cz + \frac{ddt}{dz^2}$$

$$x^2 = 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + 2\varphi . \text{cof.}\, cz + \tfrac{1}{2}\varphi^2 . \text{cof.}\, 2cz + \overline{2 - \varphi^2} . t$$
$$+ 2\varphi t . \text{cof.}\, cz + \varphi^2 t . \text{cof.}\, 2cz + t^2$$

$$x^3 = 1 + 3\varphi . \text{cof.}\, cz + 3\varphi^2 . \text{cof.}\, 2cz + \overline{3 - \tfrac{1}{2}\varphi^2} . t$$
$$+ 6\varphi t . \text{cof.}\, cz + \tfrac{3}{2}\varphi^2 t . \text{cof.}\, 2cz + 3t^2$$

$$x^4 = 1 + \varphi^2 + 4\varphi . \text{cof.}\, cz + 5\varphi^2 . \text{cof.}\, 2cz + 4t \text{ \&c.}$$

$$x^5 = 1 + \tfrac{5}{2}\varphi^2 + 5\varphi . \text{cof.}\, cz + \tfrac{25}{2}\varphi^2 . \text{cof.}\, 2cz + 5t \text{ \&c.}$$

$$x^6 = 1 + \tfrac{9}{2}\varphi^2 + 6\varphi . \text{cof.}\, cz + \tfrac{21}{2}\varphi^2 \text{cof.}\, 2cz + \overline{6 + 5\varphi^2} . t + 30\varphi t . \text{cof.}\, cz$$

$$x^7 = 1 + 7\varphi^2 + 7\varphi . \text{cof.}\, cz \text{ \&c.}$$

$$\frac{\tfrac{3}{2}n^2 x^6}{1 - \varphi^2} = \tfrac{3}{2}n^2 . \overline{1 + \tfrac{21}{2}\varphi^2} + n^2 t . \overline{3 + \tfrac{21}{2}\varphi^2} + 3n^2\varphi . \text{cof.}\, cz$$
$$+ \tfrac{81}{4}n^2\varphi^2 . \text{cof.}\, 2cz + 15\varphi n^2 t . \text{cof.}\, cz$$

$$-\omega x^4 . \frac{dx}{dz} = \omega\varphi c x^4 . \text{fin.}\, cz + \omega\varphi^2 c x^4 . \text{fin.}\, 2cz - \frac{\omega dt}{dz}$$

$$x^2 - \frac{x^3}{1 - \varphi^2} = -\tfrac{1}{2}\varphi^2 - \varphi . \text{cof.}\, cz - \tfrac{5}{2}\varphi^2 . \text{cof.}\, 2cz - (1 + \tfrac{5}{2}\varphi^2) . t$$
$$- 4\varphi t . \text{cof.}\, cz - \tfrac{7}{2}\varphi^2 t . \text{cof.}\, 2cz - 2t^2$$

$$\frac{xddx - 2dx^2}{dz^2} = x . \left(\frac{ddt}{dz^2} - \varphi c^2 . \text{cof.}\, cz - 2\varphi^2 c^2 . \text{cof.}\, 2cz\right) - \frac{2dt^2}{dz^2}$$
$$- \varphi^2 c^2 (1 - \text{cof.}\, 2cz) + (\text{fin.}\, cz + \varphi . \text{fin.}\, 2cz) . 4\varphi c . \frac{dt}{dz}$$

$$-\varphi c^2 x . \text{cof.}\, cz = -\varphi c^2 . \text{cof.}\, cz - \tfrac{1}{2}\varphi^2 c^2 . (1 + \text{cof.}\, 2cz) - \varphi c^2 t . \text{cof.}\, cz .$$

Collectis itaque, atque ordinatis terminis, ſuperioris problematis æquatio abibit in hanc aliam

$$\frac{xddt}{dz^2} + (1 - 3n^2 . \overline{1 - \tfrac{1}{2}\pi^2} + \tfrac{5}{2}\varphi^2 - \tfrac{11}{2}n^2\varphi^2) . t$$
$$= \tfrac{1}{2}n^2 . (1 + \tfrac{21}{2}\varphi^2) + \varphi . (c^2 - 1 + 3n^2) . \text{cof.}\, cz$$
$$+ \tfrac{81}{4}n^2\varphi^2 . \text{cof.}\, 2cz + \tfrac{1}{2}\varphi^2 . (c^2 - 1)(1 + \text{cof.}\, 2cz)$$
$$- (4 - c^2 - 15n^2) . \varphi t . \text{cof.}\, cz - \tfrac{7}{2}\varphi^2 t . \text{cof.}\, 2cz$$
$$+ (\text{fin.}\, cz + \varphi . \text{fin.}\, 2cz)\left(\varphi\omega c x^4 - 4\varphi c . \frac{dt}{dz}\right)$$
$$- 2t^2 - \frac{\omega dt}{dz} + \frac{2dt^2}{dz^2}$$

+

$$+ \frac{\varpi x^4}{1 - \varphi^2} + \frac{2 x^3 \int \omega x^2 d z.}{1 - 2 \varphi^2}$$

Quæ cum multiplicatione, ac diviſione in alias, atque alias formas converti poſſit æquatio, ut eam formam ſeligamus, quæ ad ſupputandum apogæi motum commodior eſt, in priore termino loco x ſcribemus $1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \varphi . \text{coſ.} c z + \frac{1}{2}\varphi^2 \text{coſ.} 2 c z$ &c. $+ t$, tum vero æquationem omnem dividemus primo per $1 + \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{3}{2}\varphi^2 \pi^2$ ut coefficiens ſecundi termini fiat $1 - 3n^2 + 2 n^2 \varphi^2$, ac rurſus æquatio exſurgens dividatur per $1 + 2 n^2 \varphi^2$ ut pro eodem coefficiente ſuperſit tantum $1 - 3 n^2$, neglectis inferiorum ordinum fractionibus erit quæſita æquatio

$$\frac{d d t}{d z^2} + (1 - 3 n^2) . t$$

$$= \frac{1}{2} n^2 - 3 n^2 \varphi^4 + (c^2 - 1 + 3 n^2) . \frac{\varphi . \text{coſ.} c z}{1 + \frac{1}{2}\varphi^2}$$

$$+ \frac{21}{4} n^2 \varphi^2 . \text{coſ.} 2 c z + \frac{1}{2}\varphi^2 (c^2 - 1) (1 + \text{coſ.} 2 c z)$$

$$- (4 - c^2 - 15 n^2) . \frac{\varphi t . \text{coſ.} c z}{1 + \frac{1}{2}\varphi^2} - \frac{1}{2}\varphi^2 t . \text{coſ.} 2 c z$$

$$+ (\text{ſin.} c z + \varphi . \text{ſin.} 2 c z) \left(\varphi \omega c x^4 - 4 \varphi c . \frac{d t}{d z}\right)$$

$$- (\varphi . \text{coſ.} c z + \frac{1}{2}\varphi^2 . \text{coſ.} 2 c z - 3 \varphi^2 - \frac{3}{2} n^2 \pi^2 + t) \frac{d d t}{d z^2}$$

$$- 2 t^2 - \frac{\omega d t}{d z} + \frac{2 d t^2}{d z^2} + \frac{\varpi x^4}{1 + \frac{1}{2}\varphi^2} + \frac{2 x^3 \int \omega x^2 d z.}{1 + \frac{1}{2}\varphi^2}$$

COROLLARIA.

I. Hæc cum ſit generalis æquatio curvæ, quæ ſpectatis viribus omnibus juxta vectorem radium, & perpendiculariter ad radium ipſum agentibus a Luna deſcriberetur, patet primo quod ſi in expreſſione vectoris radii fiat $c = 1$, & motus omnis ad ellipſim illam referatur, quæ ſine viribus perturbatricibus, apſidibus immobilibus, deſcriberetur in plano immobili; eſſent priores æquationis termini

$$\frac{d d t}{d z^2} + (1 - 3 n^2) . t = n^2 (\tfrac{1}{2} + 3 \varphi . \text{coſ.} z) - 3 n^2 \varphi^2 (1 - \tfrac{7}{4} . \text{coſ.} 2 z) \text{\&c.};$$

& juxta formulas in Probl. XIV. prioris voluminis jam traditas integrando erit

$$t = \tfrac{1}{2} n^2 \left(\frac{1 - \text{cof.} \surd(1 - 3n^2).z}{1 - 3n^2} + \frac{3n^2 \phi}{1 - 3n^2 - 1} \right) \left(\text{cof.} z - \text{cof.} \surd(1 - 3n^2). \zeta \right)$$

feu proxime $t = -\phi . \text{cof.}\, z + \phi . \text{cof.} \surd(1 - 3n^2). z$.

II. Quod fi igitur alii omnes termini, qui fimplicem differentiam t involvunt, five qui ex quantitate $\frac{2x^3 \int \omega x^2 d\zeta}{1 + \frac{1}{2}\phi^2}$, five qui ex termino $-2t^2$ poffunt exfurgere in æquatione differentiali fe invicem compenfent, ut inferius videbimus; integrata æquatione erunt priores termini vectoris radii $x =$

$1 - \frac{1}{2}\phi^2 + \phi . \text{cof.}\, z + t = 1 - \frac{1}{2}\phi^2 + \phi . \text{cof.} \surd(1 - 3n^2). z$.

Scilicet qui primo occurrebat radii vectoris terminus ϕ. cof. z, quique in ellipfi immobili anomaliæ angulum exhibebat æqualem angulari motu circa focum concepto, & lineam apfidum immobilem exhibebat, evanefcet, ac loco ipfius novus exfurget terminus $\phi \text{cof.} \surd(1 - 3n^2). z$, atque ita motui angulari ζ refpondebit anomaliæ angulus $\surd(1 - 3n^2). \zeta$: cumque coefficiens $\surd(1 - 3n^2)$ fit unitate minor, angularis etiam motus a fumma apfide fupputatus erit minor motu angulari circa focum concepto, & linea apfidum feretur in eadem plagam, ad quam Luna tendit, motumque alium habebit juxta ordinem fignorum Eclipticæ directum.

III. Erit igitur angularis motus circa focum conceptus ad angularem motum a fumma apfide fupputatum ut $1 : \surd(1 - 3n^2)$, & motus prior ad differentiam duorum motuum angularium, qui eft progreffus apfidum, fe habebit ut $1 : 1 - \surd(1 - 3n^2)$. Cum igitur $1 : n$ fit ratio medii motus Lunæ ad medium motum Solis feu temporis periodici Terræ circa Solem ad periodicum tempus Lunæ circa Terram; numeris ut initio prioris libri acceptus erit $n = \frac{27^d\ 7^h\ 43'\ 12''}{365^d\ 6^h\ 9'\ 13''} = \frac{2360592}{31558153} = 0.0748013$. Cum autem temporibus periodicis ad minores ufque fractiones inter fe comparatis Mayerus in tabulis affumpferit $n = 0.0748017$, hunc ipfum nnmerum in fequentibus retinebimus: atque hoc pofito erit $n^2 = 0.0055952943$, $\surd(1 - 3n^2) = 0.9915715$. $1 - \surd(1 - 3n^2) = 0.0084285$: & cum motus diurnus Lunæ in iifdem Mayeri tabulis fit $13° 10' 35''$, erit motus medius apfidum diebus fin-

ſingulis 6′ 40″, qui motus priore hac approximatione ſupputatus non niſi 56‴ a motu illo deficit, quem in ſuis tabulis Mayerus ex obſervationibus Aſtronomicis collegerat.

SCHOLION.

Nimis longum, atque etiam inopportunum eſſet hic recenſere quanam ratione Clairaut, & Alembert in Actis Pariſienſis Academiæ anni 1747, Eulerus in Theoria Lunæ anno primum 1753. Petropoli edita, Simpſonius in Miſcellaneis anno 1757. editis Londini, Melanderhielm in Lineamentis Theoriæ Lunaris anno 1769. Parmæ editis ad æquationem illam differentialem pervenerint, & qua ſinguli methodo æquationem eamdem ad integrationem, atque ad numeros deduxerint. Euleri methodum proxime ſecutus videtur Mayerus in Theoria quæ anno 1767. Londini prodiit: methodum autem perfecit Eulerus ipſe in opere eximio, quod anno 1772. prodidit Petropoli, & in quo adjunctis ad calculi laborem ſociis præclariſſimis Alberto Filio, & D. D. Krafft, & Lexell locum Lunæ determinavit ope trium coordinatarum, quarum binæ in plano Eclipticæ ad rectum inter ſe angulum ducerentur, tertia vero coordinata perpendicularis eſſet eidem plano. At neque poſterius hoc Euleri volumen ita hactenus evolvi ut perſpicerem quo in loco, & qua ratione apogæi motum ex theoria gravitatis Mathematicus ingenioſiſſimus ſupputaverit; quem motum in tractatu illo Mayerus videtur potius ex obſervationibus collegiſſe. Inſuper nec §. LXXVI. non ſatis ab Eulero demonſtratum mihi viſum eſt, quod coordinatæ ſingulæ ſerie aliqua debeant exprimi, quæ non niſi ſinus, ac coſinus angulorum quorumdam involvant, nec ſatis demonſtratum §. LXXX. quod in expreſſione cujuſque coordinatæ nulli omnino termini occurrant, qui circulares arcus involvant, & quibus continue auctis ſucceſſu temporis Luna ab orbita proxime elliptica abduci, atque in aliam orbitæ formam tranſire debeat. Alemberti autem theoriam, quæ fuſe in priore parte de Mundi ſyſtemate tradita eſt, cum calculis omnibus recognitis attente pervolviſſem, neque ad directam ſolutionem problematis quidpiam amplius cenſerem deſiderari, animadverti primum quod ſi æquatio differentialis ita diſponeretur ut non tertiam tantum, ſed ſextam radii vectoris poteſtatem involveret, quemadmodum in

Problemate secundo fuit præstitum priore æquationis integratione non dimidius tantum, sed fere totus apogæi motus prodiret, posterioribus aliis correctionibus proxime se compensantibus, quæ juxta methodum D. D. Clairaut, & Alembert dimidiam alteram motus partem exhibuerant. Generatim autem animadvertendum jam esse censeo, quod cum problema trium corporum se attrahentium, & Lunæ attractæ a Terra, & Sole ante annos plures a summis Mathematicis solutum sit, & motuum lunarium tabulæ ex gravitatis legibus sint crutæ, nihil aliud superest nunc temporis, quam quod temperato calculorum luxu ita omnis theoria tradatur, ut iis perspectis diligentiæ limitibus, quod in introductione hujus libri indicavimus, per se ipsum lector calculorum seriem recognoscere, ac facile possit persequi. Id in hoc libro præstare pro viribus conabimur.

CAPUT SECUNDUM.

DE PRIORE ÆQUATIONIS INTEGRATIONE, ET DE APOGÆI LUNARIS MOTU.

PROBLEMA IV.

Determinare vires omnes perturbatrices lunaris orbitæ, & quæ juxta vectorem radium diriguntur, & quæ sunt radio perpendiculares.

Sit ut antea $1 : n$ ratio mediorum motuum Lunæ, & Solis; atque insuper medius Lunæ motus circa Terram ad medium motum Terræ circa Solem ab orbitæ aphelio supputatum se habeat ut $1 : m$, motus autem Lunæ medius se habeat ad motum medium nodorum lunaris orbitæ ut $1 : p$, ac sit denique motus Lunæ verus z, motus medius Z, anomalia vera cz, anomalia media cZ, atque ut antea excentricitas terrestris orbitæ vocetur δ, orbitæ lunaris ϕ. Erit motus medius apparens Solis nZ, & angularis distantia Solis a summa apside mZ, demptaque æquatione centri erit verus Solis motus quam proxime $nZ - 2\delta . \text{sin.}\, mZ$. Et quia in Probl. IV. Lib. I. erat $Z = z + \frac{2\phi}{c} . \text{sin.}\, cz + \frac{3\phi^2}{4c} . \text{sin.}\, 2cz$ &c.

in

in minotibus fractionibus loco $\frac{1}{c}$ fcribendo unitatem, erit

$$nZ - 2\delta . \text{fin.}\, mZ = n\zeta + 2\varphi n . \text{fin.}\, c\zeta + \tfrac{1}{4}\varphi^2 n . \text{fin.}\, 2c\zeta - 2\delta . \text{fin.}\, m\zeta:$$

atque ita erit in fig. 57. diftantia *STL* Lunæ a Sole

$$= \zeta - nZ + 2\delta . \text{fin.}\, mZ = \zeta - n\zeta - 2\varphi n . \text{fin.}\, c\zeta - \tfrac{1}{4}\varphi^2 n . \text{fin.}\, 2c\zeta + 2\delta . \text{fin.}\, m\zeta.$$

Hoc pofito fi in accipiendo cofinu anguli *STL*, ob parvitatem quantitatum φ, δ, n, m ob oculos habeantur formulæ, quas in priore corollario Probl. LII. Algebræ tradidimus, apptoximatione in iis terminis longius perducta, qui integratione facta potiores debent evadere; erit

$$\text{cof.}\, 2\,STL = \text{cof.}(2 - 2n).\zeta \mp 2\delta . \text{cof.}(2 - 2n \mp m).\zeta$$
$$\pm 2\varphi n . \text{cof.}(2 - 2n \mp c).\zeta + \tfrac{1}{4}\varphi^2 n . \text{cof.}(2c + 2n - 2).z;$$
$$\text{cof.}\, STL = \text{cof.}(1 - n).\zeta \mp \delta . \text{cof.}(1 - n \mp m).\zeta \text{ \&c.}$$

Pariter cum motus Solis a nodo *ATB*, pofitis denominationibus præcedentibus, fit $n\zeta + p\zeta$, fi in fig. 58. loco productorum cof. *TSs*. cof. 2*STL*, & cof. 2 *ATB*. cof. 2*STL* juxta alias formulas Trigonometricas accipiatur dimidius cofinus fummæ, ac differentiæ duorum angulorum, refolvaturque perturbatricium virium expreffio, quam in Probl. I. Lib. II. tradidimus; fepofita vi mediocri $\frac{1}{2} n^2 x (1 - \frac{3}{2}\pi^2)$, erunt vires aliæ omnes, quæ juxta vectorem radium lunaris orbitæ dirigentur, & quas in Coroll. III. Probl. I. libri hujus defignavimus littera ϖ =

$$\frac{9 n^2 x^2}{8a} . \text{cof.}(1 - n).\zeta$$
$$+ \tfrac{3}{2} n^2 x (1 - \tfrac{1}{2}\pi^2) . \text{cof.}(2 - 2n).z$$
$$+ \frac{15 n^2 x^2}{8a} . \text{cof.}(3 - 3n).\zeta$$
$$+ 3\varphi n^2 x . \text{cof.}(2 - 2n - c).\zeta$$
$$- 3\varphi n^2 x . \text{cof.}(2 - 2n + c).z$$
$$+ \tfrac{9}{8}\varphi^2 n^2 . \text{cof.}(2c + 2n - 2).\zeta$$
$$- \tfrac{3}{2}\delta n^2 x . (1 - \tfrac{1}{2}\pi^2) . \text{cof.}\, m\zeta$$
$$- \tfrac{21}{4}\delta n^2 x . \text{cof.}(2 - 2n - m).z$$
$$+ \tfrac{3}{4}\delta n^2 x . \text{cof.}(2 - 2n + m).z$$
$$\mp \frac{27\delta n^2 x^2}{8a} . \text{cof.}(1 - n \mp m).z$$

$$+\frac{9\delta n^2 x^2}{8a}.\cos(1-n+m).z$$
$$+\tfrac{1}{4}\pi^2 n^2 x.\cos(2n+2p).z$$
$$+\tfrac{1}{8}\pi^2 n^2 x.\cos(2+2p).z$$
$$+\tfrac{1}{8}\pi^2 n^2 x.\cos(2-4n-2p).z$$

Erit etiam $\sin. STL = \sin.(1-n).z \mp \delta.\sin.(1-n\mp m).z$, $\sin. 2\,STL = \sin.(2-2n).z \mp 2\delta.\sin.(2-2n\mp m).z$
$$\pm 2\varphi n.\sin.(2-2n\mp c).z - \tfrac{1}{4}\varphi^2 n.\sin.(2c+2n-2).z.$$
Quare si in eadem fig. 57. intelligamus Lunam a syzigiarum linea TS digressam usque ad L retardari actione Solis, & vim ω perpendicularem radio vectori agere in adversam partem, similibus substitutionibus, reductionibusque ex posteriore formula Probl. I. Lib. II. eruetur $\omega =$

$$-\frac{3n^2x^2}{8a}.\sin.(1-n).z$$
$$-\tfrac{1}{2}n^2x(1-\tfrac{3}{2}\pi^2).\sin.(2-2n).z$$
$$-\frac{15n^2x^2}{8a}.\sin.(3-3n).z$$
$$-3\varphi n^2 x.\sin.(2-2n-c).z$$
$$+3\varphi n^2 x.\sin.(2-2n+c).z$$
$$+\tfrac{3}{8}\varphi^2 n^2.\sin.(2c+2n-2).z$$
$$+\tfrac{11}{4}\delta n^2 x.\sin.(2-2n-m).z$$
$$-\tfrac{3}{4}\delta n^2 x.\sin.(2-2n+m).z$$
$$+\frac{9\delta n^2x^2}{8a}.\sin.(1-n-m).z$$
$$-\frac{3\delta n^2x^2}{8a}.\sin.(1-n+m).z$$
$$-\tfrac{1}{8}\pi^2 n^2 x.\sin.(2+2p).z$$
$$-\tfrac{1}{8}\pi^2 n^2 x.\sin.(2-4n-2p).z.$$

COROLLARIA.

I. Ita igitur cum in quantitate differentiali $\omega x^2 dz$ tot angulorum sinus occurrant, & differentialis hujus quantitatis integrale $S\,\varphi\,x^2\,dz$ obvolvatur æquationi differentiali problematis, integrale autem cujusvis sinus sit sinus versus per coefficientem anguli variabilis divi-

ſus

fus, atque ita fit $S.\,d\,z.\,\text{fin.}\,(2c+2n-2).z = \dfrac{1-\text{cof.}(2c+2n-2).z}{2c+2n-2}$;

patet in hifce omnibus reductionibus eorum præcipue terminorum rationem habendam effe, in quibus $2c+2n-2$, aut alius quivis coefficiens anguli variabilis z quantitas eft exigua. In iis igitur terminis approximationes longius perducere neceffe eft. Approximationum autem, ac reductionum antecedentium ratio manifefta eft: atque ut exemplum demus, cum ob parvitatem quantitatis $2\delta.\,\text{fin.}\,mz$ juxta Coroll. I. Probl. LII. Algebræ fit cof. $STL = \text{cof.}\,(z-nz+2\delta\,\text{fin.}\,mz) = \text{cof.}(z-nz)-2\delta.\text{fin.}mz.\text{fin.}(z-nz)$, juxta alias problematis ejufdem formulas refoluto producto finuum erit $\text{cof.}STL = \text{cof}\,(z-nz) - \delta\,\text{cof.}\,(z-nz-mz)+\delta\,\text{cof.}(z-nz+mz)$.

II. Pariter cum æquatione differentiali tertii problematis antecedentis ad formulas illas relata, quas in Probl. XCV. Algebræ explicavimus, terminus quifque, qui cofinum anguli alicujus involvat, ad habendam integrationem dividi debeat per differentiam quantitatis $1-3n^2$, & quadrati coefficientis anguli variabilis propofiti; eorum etiam terminorum præcipua ratio habenda erit, in quibus coefficiens anguli z parum differt ab unitate, ut eft terminus, qui pro argumento habet $(2z-2nz-cz)$. In hifce igitur terminis quantitates inferiorum ordinum fupputare oportebit. Ita cum ob lentiffimum motum apfidum terreftris orbitæ fit proxime $m=n$, in binis terminis argumenti $(z-nz\mp mz)$ fingulari diligentia fupputandus erit terminus, qui figno inferiore defignabitur. Ita etiam ex binis terminis argumenti $(2z-2nz\pm 2nz\pm 2pz)$ qui afficietur inferiore figno dumtaxat in poteftatem aliquam radii x ductus, ac debite refolutus binos alios terminos exhibebit argumenti $(2z+2pz-cz)$ & $(2z+2pz-2cz)$, quorum unus integratione una, alter altera ob eafdem rationes potiffimum augebitur.

III. E contra terminus argumenti $(2z-2nz+2cz)$ cum coefficientem habeat exiguum, ifque imminuatur integratione utraque problematis, negligi omnino poterit. Pariter fi correctione medii nodorum motus, & mediæ inclinationis lunaris orbitæ adjecta, juxta Coroll. III., & IV. Probl. XIX. Lib. V., loco pz fcribamus $pz - \frac{1}{4}n.\text{fin.}(2nz+2pz)$, & loco π^2 fcribamus $\pi^2(1+\frac{1}{4}\,\text{cof.}\,(2nz+2pz))$, in

in posterioribus binis perturbatricium terminis, multiplicatione per radium vectorem facta, nullum alium eruemus terminum cujus potior ratio ob parvitatem coefficientis anguli variabilis, sive ob coefficientem unitati proxime æqualem haberi debeat. Hisce igitur correctionibus neglectis medius nodorum motus pro vero, & media orbitæ inclinatio pro vera pariter substitui poterit: quæ hoc in loco indicanda erant ut subsequentium calculorum seriem evolvendo ex se lector illico intelligat cur neglectis nonnullis terminis alios nonnullos ad minores usque fractiones supputaverimus.

IV. Ex hisce autem omnibus manifestum est rursus, quod jam in Coroll. II. Probl. XCV. Algebræ monuimus, alium prorsus esse ordinem terminorum in differentiali, atque integrali æquatione, eosque etiam terminos, qui in differentiali æquatione omnium sunt minimi maximos æquationis integratæ terminos exhibere posse. Erroneum igitur esset principium, quo quis in differentiali æquatione terminos aliquos, quia inferioris videantur ordinis, negligeret: cui principio theoriam suam de inæqualitatibus Jovis, & Saturni videtur sufsuperstruxisse cum in Propos. XIV. ex variatis sex motuum elementis statuit binorum dumtaxat rationem habendam esse, variatæ nimirum celeritatis projectilis, & primæ directionis, reliquis vis centripetæ, & vectoris radii mutationibus mutationes infinite minores secum trahentibus. Variationes vectoris radii, ac vis centripetæ negligi nequaquam posse ex generali etiam formula problematis trium corporum manifestum est, ac rursus perspicietur evidentissime cum generalis formula evoluta theoriam nostram inæqualitatum Jovis, & Saturni, aliorumque Planetarum inferius exponemus.

PROBLEMA V.

Terminum illum, qui in æquatione differentiali problematis sub alio signo differentiali est, quique productum vis perpendicularis, &. cubi radii vectoris exhibet, resolvere, & integrare.

Si valor radii vectoris x ex problemate tertio, & valor vis perpendicularis ω ex quarto antecedente problemate accipiantur, & quantitatis ωx^3 resolutione facta ii termini scrupulosius supputentur, in quibus coefficiens anguli variabilis est quantitas alia exigua, prodibit

$$-\frac{3 n^2 x^4}{8a}.\text{fin.}(1-n).z = -\frac{3n^2}{8a}.\text{fin.}(1-n).z$$
$$+\frac{15\,\varphi\, n^2}{16a}.\text{fin.}(c+n-1).z$$

$$-\tfrac{1}{2}n^2x^4.(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\text{fin.}(2-2n).z = -\tfrac{1}{2}n^2(1+\varphi^2)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\text{fin.}(2-2n).z$$
$$+3\varphi n^2(1-\tfrac{1}{2}\pi^2)\text{fin.}(2-2n\mp c).z$$
$$+\tfrac{11}{4}\varphi^2 n^2(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\text{fin.}(2c+2n-2).z$$

$$-\frac{15\, n^2 x^4}{8a}.\text{fin.}(3-3n).z = -\frac{15n^2}{8a}.\text{fin.}(3-3n).z$$
$$-\frac{225\,\varphi^2 n^2}{32a}.\text{fin.}(3-3n-2c)z$$

$$-3\varphi n^2 x^4.\text{fin.}(2-2n-c).z = -3\varphi n^2.\text{fin.}(2-2n-c).z$$
$$+6\varphi^2 n^2.\text{fin.}(2c+2n-2).z$$

$$+\frac{3\,\delta\, n^2 x^4}{8a}.\text{fin.}(1-n+m).z = \frac{3\,\delta\, n^2}{8a}.\text{fin.}(1-n+m).z$$
$$+\frac{15\,\varphi\,\delta\, n^2}{16a}.\text{fin.}(1-n+m-c).z$$

$$-\tfrac{1}{4}\delta n^2 x^4.\text{fin.}(2-2n+m).z = -\tfrac{1}{4}\delta n^2.\text{fin.}(2-2n+m).z$$
$$-\tfrac{1}{2}\varphi\delta n^2.\text{fin.}(2-2n+m-c)z$$
$$+\tfrac{15}{8}\varphi^2\delta n^2.\text{fin.}(2c+2n-m-2).z$$

$$+\tfrac{21}{4}\delta n^2 x^4.\text{fin.}(2-2n-m).z = \tfrac{21}{4}\delta n^2.\text{fin.}(2-2n-m).z$$
$$+\tfrac{21}{8}\varphi\delta n^2.\text{fin.}(2-2n-m-c).z$$
$$-\tfrac{105}{8}\varphi^2\delta n^2.\text{fin.}(2c+2n+m-2).z$$

$$-\tfrac{1}{8}\pi^2 n^2 x^4.\text{fin.}(2+2p).z = -\tfrac{1}{8}\pi^2 n^2.\text{fin.}(2+2p).z$$
$$-\tfrac{1}{4}\varphi\pi^2 n^2.\text{fin.}(2+2p-c).z$$
$$-\tfrac{21}{4}\varphi^2\pi^2 n^2.\text{fin.}(2+2p-2c).z$$

Cum itaque fumma omnium finuum fit finus verfus per coefficientem anguli variabilis divifus, fi F denotet fummam coefficientium in fingulis argumenti cujufque terminis contrario figno acceptorum, erit $S\,\omega\, x^2\, dz$

$$= \frac{3\, n^2}{8a(1-n)}.\text{cof.}(1-n).z$$
$$+\tfrac{1}{4}n^2\left(\frac{1+\varphi^2}{1-n}\right)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2).\text{cof.}(2-2n).z$$

$$+\frac{5\,n^2}{8a(1-n)}\,.\,\text{cos}.\,(3-3n)\,.\,z$$

$$+\frac{3\varphi n^2(1-\frac{1}{2}\pi^2)}{2-2n\mp c}\,.\,\text{cos}.\,(2-2n\mp c)\,.\,z$$

$$\pm\frac{3\varphi n^2}{2-2n\mp c}\,.\,\text{cos}.\,(2-2n\mp c)\,z$$

$$-\frac{15\,\varphi\,n^2}{16a(c+n-1)}\,.\,\text{cos}.\,(c+n-1)\,.\,z$$

$$-\frac{3\,\varphi^2 n^2}{16}\left(\frac{10+19n}{c+n-1}\right)(1-\tfrac{1}{2}\pi^2)\,.\,\text{cos}.\,(2c+2n-2)\,.\,z$$

$$-\frac{225\,\varphi^2 n^2}{32a(3-3n-2c)}\,.\,\text{cos}.\,(3-3n-2c)\,.\,z$$

$$-\frac{3\,\delta\,n^2}{8a}\,.\,\text{cos}.\,(1-n+m)\,.\,z$$

$$-\frac{15\,\varphi\,\delta\,n^2}{16a(1-c)}\,.\,\text{cos}.\,(1-n+m-c)\,.\,z$$

$$+\frac{3\,\delta\,n^2}{4(2-n)}\,.\,\text{cos}.\,(2-2n+m)\,.\,z$$

$$-\frac{21\,\delta\,n^2}{4(2-3n)}\,.\,\text{cos}.\,(2-2n-m)\,.\,z$$

$$+\frac{3\,\varphi\,\delta\,n^2}{2(2-n-c)}\,.\,\text{cos}.\,(2-2n+m-c)\,.\,z$$

$$-\frac{15\,\varphi^2\delta\,n^2}{8(2c+n-2)}\,.\,\text{cos}.\,(2c+2n-m-2)\,.\,z$$

$$-\frac{21\,\varphi\,\delta\,n^2}{2(2-3n-c)}\,.\,\text{cos}.\,(2-2n-m-c)\,.\,z$$

$$+\frac{105\,\varphi^2\delta\,n}{8(2c+3n-2)}\,.\,\text{cos}.\,(2c+2n+m-2)\,.\,z$$

$$+\tfrac{1}{16}\pi^2 n^2\,.\,\text{cos}.\,(2+2p)\,.\,z$$

$$+\tfrac{1}{4}\varphi\,\pi^2 n^2\,.\,\text{cos}.\,(2+2p-c)\,.\,z$$

$$+\frac{15\,\varphi^2\pi^2 n^2}{32(1+p-c)}\,.\,\text{cos}.\,(2+2p-2c)\,.\,z+F.$$

COROLLARIUM.

Cum juxta Problema tertium ſit $x^2 = 1 + 3\,\varphi\,.\,\text{cos}.\,cz + \overline{3-\tfrac{1}{2}\varphi^2}\,.\,e$,

ſi

si fiat $S \omega x^2 dz = F + G$, & littera G designentur termini alii omnes variabiles, littera autem F constans integrationis quantitas, resolutis productis cof. cz in cosinus alios omnes, eorumque præcipue terminorum ratione habita, qui cum coefficientem habeant unitati proxime æqualem, integratione alia præcipue augeri debent erit

$$\frac{2x^2 S \omega x^2 dz}{1 + \frac{1}{2}\varphi^2} = \left(\frac{2F + 2G}{1 + \frac{1}{2}\varphi^2}\right)(1 + 3\varphi \cdot \text{cof.}\, cz + \overline{3 - \tfrac{1}{2}\varphi^2} \cdot e + 3e^2)$$

$$= \frac{2F + 2G}{1 + \frac{1}{2}\varphi^2} + \frac{6\varphi F.\text{cof.}\, cz + 6F.\overline{1 - \frac{1}{2}\varphi^2}.e}{1 + \frac{1}{2}\varphi^2} + \frac{6Fe^2}{1 + \frac{1}{2}\varphi^2}$$

$$+ \tfrac{9}{8} n^2 \varphi^2 \left(n + \frac{1}{2 - 2n + c} + \frac{1}{2 - 2n - c}\right). \text{cof.}\,(2 - 2n).z$$

$$+ 3n^2\varphi(1 - \tfrac{1}{2}\pi^2)\left(\frac{3}{4 - 4n} + \frac{2}{2 - 2n - c} - \frac{3\varphi^2}{16}\left(\frac{10 + 19n}{c + n - 1}\right)\right).\text{cof.}\,(2 - 2n - c).z$$

$$+ 9n^2\varphi^2\left(\frac{1}{4 - 4n} + \frac{1}{2 - 2n - c} + n\right).\text{cof.}\,(2 - 2n + c).z$$

$$- \frac{9n^2\varphi\delta}{8 - 4n}.\text{cof.}\,(2 - 2n + m - c).z$$

$$+ \tfrac{9}{16} n^2 \pi^2 \varphi.\text{cof.}\,(2 + 2p - c).z$$

PROBLEMA VI.

Coefficientes numericos terminorum omnium, & quantitatem constantem integratæ æquationis, determinare.

Ut cum Mayeri tabulis formularum nostrarum comparatio recte institui possit, numeros omnes, qui data veluti problematis constituunt, desumemus ex ipsis Mayeri observationibus, & cum juxta præcedentes nostras denominationes sit $1 : n$ ratio temporis periodici Terræ circa Solem ad periodicum tempus Lunæ circa Terram, $1 : c$ ratio motus medii Lunæ ad motum medium ab apogæo supputatum, $1 : p$ ratio medii motus Lunæ ad motum medium nodi, $1 : a$ ratio mediocris distantiæ Lunæ a Terra ad mediocrem distantiam Solis, φ excentricitas lunaris orbitæ, δ excentricitas orbitæ terrestris, π sinus inclinationis mediæ lunaris orbitæ ad Eclipticam; reassumptis numeris, quos in introductione libri hujus, & Coroll. III. Probl. III. exscripsimus, aliisque ex Mayero ipso suffectis statuamus

$n = 0.0748017$, $n^2 = 0.0055953$, $\frac{1}{a} = \frac{1}{381}$;

$c = 0.9916186$, $p = 0.05375$, $\delta = 0.016835$,

$\varphi = 0.0547$, $\varphi^2 = 0.003$, $\varphi^3 = 0.00016$,

$\pi = 0.08962$, $\pi^2 = 0.008$, $\surd(1 - \pi^2) = 1 - \frac{1}{2}\pi^2 = 0.996$.

His positis, coefficientes angulorum variabilium, qui in unoquoque termino exhibent varias Lunæ distantias a Sole, a nodo, & ab apogæo, erunt ut sequitur

$1 - n = 0.9251983$	$2 - 2n + c = 2.842$
$2 - n = 1.9251983$	$2 - 3n - c = 0.783976$
$2 - 3n = 1.7755949$	$3 - 3n - 2c = 0.7923577$
$1 - c = 0.0083814$	$2c + n - 2 = 0.0580389$
$c + n - 1 = 0.06642$	$2c + 2n - 2 = 0.1328406$
$2 - n - c = 0.9335797$	$2c + 3n - 2 = 0.2076423$
$2 - 2n - c = 0.858778$	$1 + p - c = 0.06213$.

Numeris autem hisce omnibus in formula antecedentis problematis substitutis, & reductione coefficientium facta prodibit

$$\frac{3n^2}{8a(1-n)} = 0.00000595$$

$$\frac{1}{4}n^2\left(\frac{1+\varphi^2}{1-n}\right)(1 - \frac{1}{2}\pi^2) = 0.004531195$$

$$\frac{5n^2}{8a(1-n)} = 0.0000992$$

$$\frac{3\varphi n^2(1 - \frac{1}{2}\pi^2) + 3\varphi n^3}{2 - 2n - c} = 0.001144878$$

$$\frac{3\varphi n^2(1 - \frac{1}{2}\pi^2) - 3\varphi n^3}{2 - 2n + c} = 0.000319368$$

$$\frac{-15\varphi n^2}{16a(c+n-1)} = -0.00001109$$

$$\frac{-3\varphi^2 n^2}{16}\left(\frac{10+19n}{c+n-1}\right)(1 - \frac{1}{2}\pi^2) = -0.00053762$$

$$\frac{-225\varphi^2 n^2}{32a(3-3n-2c)} = -0.00000038$$

$$\frac{-3\delta n^2}{8a} = -0.00000093$$

$\frac{-15\varphi\delta n^2}{16a(1-c)} = -0.00000149$

$\frac{3\delta n^2}{4(2-n)} = 0.00003664$

$\frac{-21\delta n^2}{4(2-3n)} = -0.0002781$

$\frac{3\varphi\delta n^2}{2(2-n-c)} = 0.00000828$

$\frac{-15\varphi^2\delta n^2}{8(2c+n-2)} = -0.0000091$

$\frac{-21\varphi\delta n^2}{2(2-3n-c)} = -0.000069$

$\frac{105\varphi^2\delta n^2}{8(2c+3n-2)} = 0.00000178$

$\frac{1}{16}\pi^2 n^2 = 0.000008393$

$\frac{1}{4}\varphi\pi^2 n^2 = 0.000001836$

$\frac{15\varphi^2\pi^2 n^2}{32(1+p-c)} = 0.000005052.$

Collectis igitur in unam summam numeris hisce omnibus, & summa contrario signo accepta erit constans integrationis antecedentis quantitas $F = -0.00525486$.

COROLLARIUM.

Positis hisce omnibus, & facto ut antea $\varphi^2 = 0.003$ erit $\frac{2F}{1+\frac{1}{2}\varphi^2} = -0.010493956$: cui numero addendo $\frac{1}{2}n^2 - 3\varphi^2 n^2 = 0.0027473$, supererit in æquatione differentiali Probl. III. terminus constans -0.0077476. Erit insuper

$\frac{6F.\overline{1-\frac{1}{4}\varphi^2}.t+6F.t^2}{1+\frac{1}{2}\varphi^2} = -0.031497363.t - 0.03148187.t^2.$

Hos terminos, ex quibus pendet motus apogæi Lunæ, ut mox videbimus, diligentissime, & minorum etiam fractionum ratione habita supputare oportuit: & cum quantitas F pendeat ex coefficientibus omnibus terminorum, in quos differentialis quantitas $\omega x^2 dx$ resolvitur, plures exiguos terminos ad calculum revocavimus, quorum nul-

nullam amplius rationem deinde habebimus in ſupputandis medii motus Lunæ æquationibus, quod nulla inde poſſit exſurgere æquatio, quæ ſit ſenſibilis.

PROBLEMA VII.

Iiſdem poſitis æquationem differentialem reducere, & motum medium apogæi Lunæ definire.

Si in æquatione eadem differentiali Probl. III. loco x ſcribamus $1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \varphi.\,\text{coſ.}\,c\zeta + \frac{1}{2}\varphi^2.\,\text{coſ.}\,2c\zeta$ &c. $+ t$, negligamuſque ob parvitatem terminum $\frac{11}{4}n^2\varphi^2.\,\text{coſ.}\,c\zeta$, atque in terminis omnibus, in quibus quantitas t non occurrit, quique ad ellipſim immobilem ob ſolam Terræ attractionem deſcriptam referuntur loco coſ. $c\zeta$ ut antea ſcribamus coſ. ζ, quantitas autem $\frac{2x^3 S\omega x^3 d\zeta}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}$ non omnes quidem terminos, ſed terminos dumtaxat reliquos indicet, quos in corollario antecedente ſingillatim numeris expreſſimus, erit æquatio differentialis problematis

$$\frac{ddt}{d\zeta^2} + (1-3n^2).t = -0.0077473 - 0.03149763.t - 0.03148187.t^2$$

$$+ \frac{3n^2\varphi.\text{coſ.}\zeta}{1+\frac{1}{2}\varphi^2} - (4 - c^2 - 15n^2).\frac{\varphi t.\,\text{coſ.}\,cz}{1+\frac{1}{2}\varphi^2} - \frac{1}{2}\varphi^2 t.\,\text{coſ.}\,2cz$$

$$+ (\text{ſin.}\,c\zeta + \varphi.\,\text{ſin.}\,2c\zeta)\left(\varphi\omega.cx^4 - 4\varphi c.\frac{dt}{d\zeta}\right)$$

$$-(\varphi.\,\text{coſ.}\,cz + \frac{2}{3}\varphi^2.\,\text{coſ.}\,2cz - 3\varphi^2 - \frac{2}{3}n^2\pi^2 + t).\frac{ddt}{d\zeta^2}$$

$$-2t^2 - \frac{\omega dt}{d\zeta} + \frac{2dt^2}{d\zeta^2} + \frac{\varpi x^4}{1+\frac{1}{2}\varphi^2} + \frac{2x^3 S\omega x^3 dz.}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}$$

Aequationem igitur integrando ut in Coroll. I. Probl. III. jam indicatum eſt in expreſſione differentiæ radii vectoris t primo occurret quantitas conſtans $-\frac{0.0077473}{1-3n^2} = -0.00788$ ſatis proxime.

Spectatis ſcilicet viribus omnibus perturbatricibus & juxta vectorem radium lunaris orbitæ, & perpendiculariter ad radium ipſum agentibus media Lunæ diſtantia a Terra fiet minor quam eſſet in ellipſi illa, quæ ſine viribus perturbatricibus circa Terram ſola Terræ attra-

tractione describi posset. Ita quidem ut si sit b semiaxis major hujusmodi ellipseos, t differentia omnis vectoris radii, quæ ob perturbatrices vires inducitur, constans differentiæ pars -0.00788, τ alia differentiæ pars, quæ variabilibus quantitatibus exprimitur; sit radius vector

$$x = b - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \varphi . \text{cos}. cz + \tfrac{1}{2}\varphi^2 . \text{cos}. 2c\zeta \;\&c. + t$$
$$= b - 0.00788 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \varphi . \text{cos}. c\zeta + \tfrac{1}{2}\varphi^2 . \text{cos}. 2c\zeta \;\&c. + \tau$$

Quod si vero unitate illa, quam in denominationibus antecedentibus pro priore radii vectoris termino assumpsimus, exprimi intelligamus summam quantitatum omnium constantium, sive distantiam vere mediocrem Lunæ a Terra, & τ denotet differentiam vectoris radii, quæ ob perturbatrices vires inducitur, & quæ solis exprimitur quantitatibus variabilibus, hoc est si fiat $b - 0.00788 = 1$, & $t = -\frac{0.0077473}{1-3n^2} + \tau$, erit etiam

$(1-3n^2).t = -0.0077473 + (1-3n^2).\tau$, atque ita terminus ille constans in æquatione differentiali evanescet. Erit insuper

$-0.03149763 . t = 0.0002482 - 0.03149763 . \tau$

$-2.03148187 . t^2 = -0.0001262 + 0.03201615 . \tau - 2.03148187 . \tau^2$:

unde erunt priores termini æquationis differentialis

$$\frac{dd\tau}{d\zeta^2} + (1-3n^2).\tau = 0.000122 + 0.00051852 . \tau - 2.03148187 . \tau^2 \&c.,$$

& in æquatione integrata adhuc superesset terminus constans $\frac{0.000122}{1-3n^2}$,

seu proxime 0.000122.

Quod si igitur correctione similiter repetita fiat $\tau = 0.000122 + T$, adhuc numerus 0.000122 tolletur ex æquatione differentiali, & qui numerus ex termino $-2.03148187 . \tau^2$ exsurget tam exigua erit fractio, ut ad ipsum tollendum tertia correctio in subsidium vocari minime debeat. Coefficiens autem omnis differentiæ T superesset $1 - 3n^2 - 0.000023 = 0.983191 = c^2$. Juxta Mayeri tabulas esset $c = 0.9916186$, & $c^2 = 0.983306$. Hoc posito esset $\frac{4 - c^2 - 15n^2}{1 + \frac{1}{2}\varphi^2} = 2.911$,

ac posito insuper $\varphi = 0.0547$, $\pi = 0.08962$, quadratisque acceptis esset $3\varphi^2 + \frac{1}{2}n^2\pi^2 = 0.009178$. Quod si igitur sit T ea pars differen-

rentiæ vectoris radii, quæ gignitur a viribus perturbatricibus, & quæ solis quantitatibus variabilibus exprimitur, differentialis æquatio problematis ad hanc aliam formam reducetur

$$\frac{ddT}{dz^2} + 0.983191.T = \frac{3n^2\varphi.\text{cof}.z}{1+\frac{1}{2}\varphi^2} - 2.911.\varphi T.\text{cof}.cz - \tfrac{1}{2}\varphi^2 T.\text{cof}.2cz$$
$$+ (\text{fin}.cz + \varphi.\text{fin}.2cz)\left(\varphi\omega c x^4 - 4\varphi c.\frac{dT}{dz}\right)$$
$$-(\varphi.\text{cof}.cz + \tfrac{1}{2}\varphi^2.\text{cof}.2cz - 0.009178 + T).\frac{ddT}{dz^2};$$
$$-2T^2 - \omega\frac{dT}{dz} + 2\frac{dT^2}{dz^2} + \frac{\varpi x^4}{1+\frac{1}{2}\varphi^2} + \frac{2x^4 S\omega x^3 dz.}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}$$

COROLLARIA.

I. Aliis igitur correctionibus neglectis, quæ non nisi inferiorum ordinum fractiones exhibent, erit distantiæ mediæ Lunæ a Terra variatio, quæ ob vim Solis inducitur $-0.00788+0.00012=-0.00776$. Erunt etiam priores integratæ æquationis, & differentiæ radii vectoris termini

$$T = \frac{3n^2.\varphi}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}\,\frac{(\text{cof}.z - \text{cof}.\sqrt{(0.983191)}.z}{0.983181-1},$$

seu proxime $T = -\varphi.\text{cof}.z + \varphi.\text{cof}.\sqrt{(0.983191)}.z$, atque in expressione vectoris totius radii, evanescente jam termino $-\varphi.\text{cof}.z$, qui anomaliæ angulo in ellipsi immobili respondet, novus emerget terminus $\varphi.\text{cof}.\sqrt{(0.983191)}.z$. Motus igitur absolutus Lunæ ad motum Lunæ a summa apside supputatum se habebit ut $1:\sqrt{(0.983191)} = 1:0.99156$, qui numerus non nisi 0.00005 ob eo differt, quem ex observationibus collegerat Mayerus. Ipse autem Astronomus celeberrimus in supputando apogæi motu non nisi pro differentia partis ducentesimæ ad observationes accessit propius, ut §. XLVI. expresse monuit.

II. Genesim autem coefficientis secundi termini æquationis, unde pendet apogæi motus considerando manifestum erit ipsum non ex priore quantitate tantum $(1-3n^2).T$ pendere, quam vires perturbatrices juxta vectorem radium agentes exhibent, sed pendere etiam ex terminis $\frac{2x^4 S\omega x^3 dz}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}$, & $-2T^2$, qui proxime se se destruunt, &

& residuam coefficientis illius quantitatem relinquunt proxime $1 - 3n^2$. Horum autem terminorum prior expressionem involuit vis perturbatricis, quæ perpendicularis est radio lunaris orbitæ: alter vero terminus $-2T^2$ oritur ex differentia terminorum x^2, & $\frac{x^2}{1-\varphi^2}$, quæ juxta Probl. III., & Coroll. I. Probl. I. exprimit differentiam gravitatis, & vis centrifugæ. Itaque vires omnes Lunam sollicitantes ad apogæi motum conducunr, & quæ juxta vectorem radium, & quæ perpendiculariter ad radium ipsum diriguntur.

III. Factis etiam substitutionibus iisdem, quæ antea, erit in Corollario Probl. V. $\frac{6\varphi F. \text{cos.} c\zeta}{1+\frac{1}{2}\varphi^2} = -0.03152443.\varphi.\text{cos.} c\zeta$, atque in priore hujus problematis æquatione posito $t = -0.00788 + T$, ex termino $(4 - c^2 - 15n^2).\frac{\varphi t.\text{cos.} cz}{1+\frac{1}{2}\varphi^2}$ eruetur terminus $+0.02248936.\varphi.\text{cos.} c\zeta$: unde numeris simul junctis, iisque ductis in $\varphi = 0.0547$ in æquatione differentiali superesset terminus $-0.00038476.\text{cos.} cz$. Hunc autem terminum omisimus, quod aliis ejusdem . . . . &c.

ERRATA.			CORRIGE.
Pag. 19.	lin. 24.	aliorum	aliorumque
27.	22.	Radius AF	Radius CF
27.	28.	Sector circularis ACK	Sec. Cir. HCK
33.	14.	proportionalis	proportionales.
34.	20.	Si sint	Si sit
37.	8.	se habebit radius	se habebit ut radius
39.	1.	Sint T & periodica	Sint T & s periodica
59.	14.	minores	majores.
122.	5.	interjectum	interjecti
228.	18.	$\left(\frac{25\frac{1}{2}}{365\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{2}}$	$\left(\frac{25\frac{1}{2}}{365\frac{1}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}$
279.	10.	quadratricis	quadraticis
338.	21.	$2SDL$	cos. $2STL$
485.	26.	Prob. IX.	Probl. XIX.

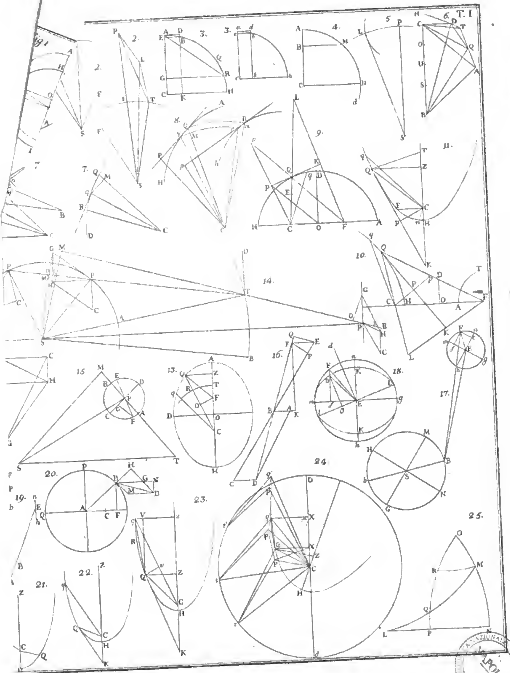
Quæ alia exciderunt menda ex ipso contextu facile dignosci & corrigi poterunt.

INDEX TOMI TERTII.

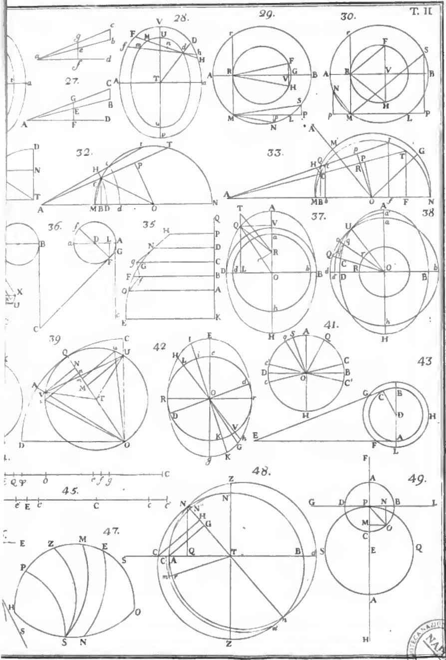
Ca-

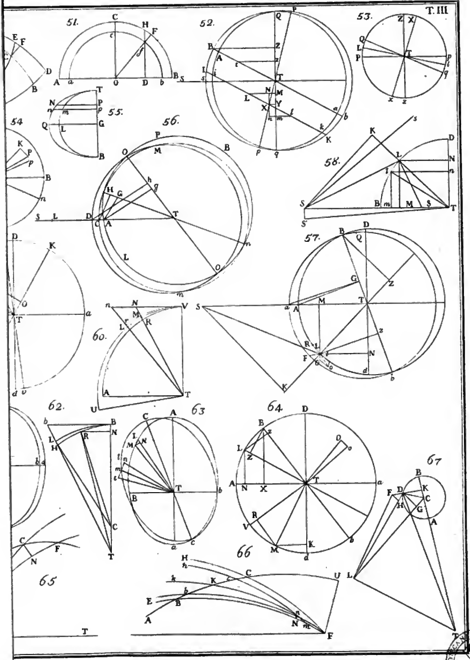
Li-

FINIS.



raphia


T. II
27.
28.
29.
30.
32.
33.
35
36.
37.
38
39
41.
42
43
45.
47.
48.
49.


T. III
51.
52.
53.
54
55.
56.
57.
58.
60.
62.
63
64.
65
66
67